PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
18: 11 ~ 14, 2003

새로운 블랙홀 엔트로피 증가, 각운동량-에너지 추출 방정식
NEW EQUATIONS FOR THE ENTROPY INCREASE AND THE ANGULAR MOMENTUM-ENERGY EXTRACTION OF A BLACK HOLE

박석재
한국천문연구원

Seok Jae Park
Korea Astronomy Observatory
E-mail : *sjpark@kao.re.kr*
(Received December 1, 2003; Accepted December 16, 2003)

ABSTRACT

In the earlier papers we analyzed the axisymmetric, nonstationary electrodynamics of the central black hole and a surrounding thin accretion disk in an active galactic nucleus. Based on those papers we analyze the axisymmetric, nonstationary force-free black hole magnetosphere and the motion of the plasma. We concentrate on deriving the totally new equations for the entropy incrrease and the angular momentum, energy extraction of the black hole.

Keywords: black hole physics — MHD — galaxies : jets

1. 서론

Macdonald와 Thorne(1982, 이하 MT)은 유입물질 원반으로 둘러싸인 거대한 블랙홀의 자기권을 이론적으로 잘 정리하였다. 즉 MT는 stationary 하고 블랙홀의 자전축이 대칭축이 되는 모델을 잘 정리함으로써 이제 교과서에 수록될 정도가 되었다(e.g., Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988). 하지만 우주에서 시간에 따라 변하지 않는 천체는 없는 바, MT 모델도 당연히 nonstationary 한 관점에서 재조명되어야 할 필요가 있다.

그리하여 nonstationary 모델이 자연스럽게 등장하게 되었다(Park & Vishniac 1989; Park 2000, 여기서부터 논문 I; Park 2002). 이 논문에서는 이들 논문에 기반을 두고 블랙홀 사건의 지평선 바로 바깥 부분에서의 경계치 조건과 유입물질의 운동을 다시 살펴보도록 하겠다. 논문 I 에서와 마찬가지로 우리 모델 안의 플라스마가 'force-free' 조건을 만족한다는 전제 아래

$$\rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-1}$$

을 가정한다. 식 (1-1)에서 물리량들은 전자기학에서 정의되는 그대로이다.

2장에서는 논문 I 에서 기술했던 nonstationary 블랙홀 자기권의 전자기학을 정리해 본다. 3장에서는 논문 I 에서 기술했던 사건의 지평선에서의 nonstationary 경계 조건을 정리하고 이를 바탕으로 단위 면적 당 torque, Joule heating에 의한 엔트로피 증가, 적색 이동된 에너지 flux 같은 물리량들을 구해본다. 시간에 따라 변하는 우리 모델의 중심에는 질량 M, 각운동량 J, 질량 당 각운동량 $a \equiv J/M$ 를 갖는 Kerr 블랙홀이 자리잡고 있다고 가정한다.

2. 시간에 따라 변하는 블랙홀 자기권

블랙홀 자기권을 상대론적으로 기술하는 데에 가장 기본이 되는 물리량은 물론 4차원 계량 텐서이다. 경과 함수를 α, 이동 벡터를 β^i, 3차원 공간의 계량 텐서를 γ_{ij} 라 하면 4차원 시공간의 계량 텐서는 일반적으로

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{2-1}$$

와 같이 주어진다. 여기서 라틴 문자는 1에서 3까지 달리고 시공간 부호는 $(-+++)$이다. 이 논문에서 모든 물리량의 단위는 $c = G \equiv 1$을 만족하도록 잡는다.

구좌표계 (r, θ, φ) 원점에 위치한 블랙홀을 기술하는 시공간 계량은

$$\alpha = \frac{\rho}{\Sigma} \Delta \tag{2-2a}$$

$$\beta^{\varphi} \equiv -\omega = -\frac{2aMr}{\Sigma^2} \tag{2-2b}$$

$$\gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta^2} \tag{2-2c}$$

$$\gamma_{\theta\theta} = \rho^2 \tag{2-2d}$$

$$\gamma_{\varphi\varphi} \equiv \varpi^2 = \frac{\Sigma^2}{\rho^2}\sin^2\theta \tag{2-2e}$$

로 주어진다. 여기서 Δ, ρ, Σ는 각각

$$\Delta^2 \equiv r^2 + a^2 - 2Mr \tag{2-2f}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{2-2g}$$

$$\Sigma^2 \equiv (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta^2\sin^2\theta \tag{2-2h}$$

를 의미한다.

이 경우 블랙홀 주위를 각속도 ω로 회전하는 FIDO(Fiducial Observer, see Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988)는

$$\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \frac{\Delta}{\rho}\frac{\partial}{\partial r} \tag{2-3a}$$

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2-3b}$$

$$\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2-3c}$$

와 같은 관성계 단위 벡터를 갖는다.

식 (2-2e)로 주어지는 ϖ에 의해 $\boldsymbol{m} \equiv \varpi\, \boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}$ 로 정의되는 벡터 $\boldsymbol{m}$은 축대칭 Killing 벡터가 되며 ∂A는 $\boldsymbol{m}$-고리(loop)라고 보면 된다. 축대칭 가정으로부터 임의의 스칼라 f와 , 임의의 벡터 $\boldsymbol{f}$, 그리고 $\boldsymbol{m}$에 대한 Lie 미분 L에 대하여

$$\boldsymbol{m}\cdot\nabla f = 0,\ L_{\boldsymbol{m}} f = 0, \tag{2-4a}$$

이 성립하고 시간에 따라 변한다는 조건으로부터

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \dot{f} \neq 0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \equiv \dot{\boldsymbol{f}} \neq 0 \tag{2-4b}$$

을 만족한다.

따라서 Kerr 블랙홀 주위 FIDO가 측정하는 Maxwell 방정식은(I, 식 [2.7])

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e \tag{2-5a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{2-5b}$$

$$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{E}) = -\dot{\boldsymbol{B}} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla\omega)\boldsymbol{m} \tag{2-5c}$$

$$\nabla\times(\alpha\boldsymbol{B}) = \dot{\boldsymbol{E}} - (\boldsymbol{E}\cdot\nabla\omega)\boldsymbol{m} + 4\pi\alpha\boldsymbol{j} \tag{2-5d}$$

로 주어져야 한다.

블랙홀 사건의 지평선과 만나지 않는 $\boldsymbol{m}$-고리 A를 생각해 보자. 가장자리를 ∂A, 그리고 A의 작은 면적에 대한 직교 벡터를 $d\boldsymbol{\sigma}$ 같이 표시하면, 우리는 A를 관통하는 총 전류 $I(t, \boldsymbol{r})$, 총 전기 flux $\Phi(t, \boldsymbol{r})$, 총 자기 flux $\Psi(t, \boldsymbol{r})$를 각각(I, 식 [2.3]),

$$\Psi(t, \boldsymbol{r}) = \int_A \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{2-6a}$$

$$\Phi(t, \boldsymbol{r}) = \int_A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{2-6b}$$

$$(t, \boldsymbol{r}) = -\int_A \alpha\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{2-6c}$$

와 같이 정의할 수 있게 된다.

이 경우 전기장과 자기장은(I, 식 [2.5])

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = -\frac{2}{\alpha\varpi}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}} = -\frac{2}{\alpha\varpi^2}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\boldsymbol{m} \tag{2-7a}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}} = \frac{\nabla\Phi\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi} = \frac{\nabla\Phi\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2} \tag{2-7b}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = -\frac{2}{\alpha\varpi}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}} = -\frac{2}{\alpha\varpi^2}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{m} \tag{2-7c}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} = \frac{\nabla\Psi\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi} = \frac{\nabla\Psi\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2} \tag{2-7d}$$

$$\alpha\boldsymbol{j}^{\mathrm{P}} = -\frac{\nabla I\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}}{2\pi\varpi} = -\frac{\nabla I\times\boldsymbol{m}}{2\pi\varpi^2} \tag{2-7e}$$

와 같이 주어지고 각운동량, 에너지 Poynting 벡터들은 각각(I, 식 [2.6])

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{P}} = \frac{1}{2\pi\alpha}\left\{\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} + \left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}\right\}, \tag{2-8a}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}} = \frac{\alpha}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})^{\mathrm{P}} + \omega\,\boldsymbol{S}_{\mathrm{J}}^{\mathrm{P}}, \tag{2-8b}$$

로 주어지게 된다. 식 (2-7), (2-8)에서 T는 toroidal, P는 poloidal 성분을 각각 의미한다.

3. 엔트로피 증가와 각운동량, 에너지 추출

논문 I 에서와 같이 우리 nonstationary 모델에서는 자기력선의 속도 $\boldsymbol{v}$가

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{v}^{\mathrm{P}} \tag{3-1}$$

로 주어져야 한다. 식 (3-1)에서 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 항만 있다면 stationary 모델이 된다. 왜냐하면 자기력선들이 회전만 할 뿐 실질적으로 블랙홀로 유입되지 않기 때문이다. 즉 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}$ 항이 존재함으로 말미암아 시간에 따라 변하는 모델이 가능하다는 것을 다시 확인할 수 있게 된다. 식 (3-1)로 주어지는 $\boldsymbol{v}$가 만일

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=0 \tag{3-2a}$$

을 만족한다면 자기력선과 같이 움직이는 관측자는

$$\boldsymbol{E}'=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{2}}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{3-2b}$$

이므로 전기장을 느낄 수 없게 된다.

식 (3-2a)를 만족하는 $\boldsymbol{v}$를 논문 I 에서처럼(I, 식 [3.3])

$$\boldsymbol{v}\equiv-\frac{\omega-\Omega^{\mathrm{F}}}{\alpha}\boldsymbol{m}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}} \tag{3-3a}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=-\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}-\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{3-3b}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{3-3c}$$

로 주어질 수 있다. 여기서 Ω^{F}는 자기력선의 각속도이다. 식 (3-3)에서 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}$에 관한 한 어떤 제약도 없음에 유의하자. 식 (3-3)을 이용하면 전기장은(I, 식 [3.4], [3.5])

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{2\pi\varpi^{2}}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\cdot\nabla\Psi)\boldsymbol{m} \tag{3-4a}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=\frac{\omega-\Omega^{\mathrm{F}}}{2\pi\alpha}\nabla\Psi+\frac{2}{\alpha\varpi^{2}}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{m} \tag{3-4b}$$

와 같이 구해진다.

사건의 지평선에서는

$$\alpha\to 0,\quad \omega\to\Omega^{\mathrm{H}} \tag{3-5}$$

가 만족되는데, 여기서 Ω^{H}는 블랙홀의 각속도를 의미한다. 사건의 지평선 물리학을 기술하기 위해 수직인 단위 벡터 $\boldsymbol{n}$을 정의하고 블랙홀 표면의 전하를 σ^{H}, 전류를 $\boldsymbol{j}^{\mathrm{H}}$, 전기장을 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}$, 자기장을 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$, 저항을 R^{H}, 온도를 T^{H}, 엔트로피를 s^{H}라 하면 잘 알려진 경계치 조건은(I, 식 [2.8])

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}(\equiv E_{\perp})\to\sigma^{\mathrm{H}} \tag{3-6a}$$

$$\alpha\boldsymbol{B}_{\parallel}\to\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=4\pi\boldsymbol{j}^{\mathrm{H}}\times\boldsymbol{n} \tag{3-6b}$$

$$\alpha\boldsymbol{E}_{\parallel}\to\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}=R^{\mathrm{H}}\boldsymbol{j}^{\mathrm{H}}=4\pi\boldsymbol{j}^{\mathrm{H}} \tag{3-6c}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} \tag{3-6d}$$

로 주어진다. 여기서 $\perp$, $\parallel$ 는 각각 사건의 지평선에 수직, 평행한 성분을 말한다.

식 (2-7), (3-4), (3-5), (3-6)으로부터

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}=-\frac{2}{\varpi}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}-\frac{2}{\varpi}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\lambda}, \tag{3-7a}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}=-\frac{2}{\varpi}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}-\frac{2}{\varpi}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\boldsymbol{e}_{\lambda}, \tag{3-7b}$$

임을 알게 되고(I, 식 [3.11]) 아울러 유용한 식

$$\frac{\Psi}{4\pi}=\frac{\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi}{4\pi} \tag{3-8a}$$

$$I-\frac{\Phi}{4\pi}=\frac{\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}}}{2(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}})}\varpi^{2}B_{\perp}=-\frac{\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi}{4\pi} \tag{3-8b}$$

를 얻는다(I, 식 [2.8]). 여기서 단위벡터 $\boldsymbol{e}_{\lambda}$는 관계식 $\boldsymbol{e}_{\lambda}\times\boldsymbol{e}_{\hat{\varphi}}=\boldsymbol{n}$을 만족하는 것으로 블랙홀의 '북극'에서 '적도'를 향하는 방향을 갖는다. 식 (3-8b)의 두 번째 부분은 이 논문에서 처음으로 발표되는 것이다.

사건의 지평선에서 Poynting 벡터들의 경계 조건은(I, 식 [3.16])

$$-\alpha\boldsymbol{S}_{\mathrm{J}}\cdot\boldsymbol{n}\to\frac{\Delta J}{\Delta\sigma}=-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}}}{4\pi(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}})}(\varpi B_{\perp})^{2}-\frac{E_{\perp}}{2\pi}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right) \tag{3-9a}$$

$$T^{\mathrm{H}}\frac{\Delta\dot{s}^{\mathrm{H}}}{\Delta\sigma}=\frac{(\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}})^{2}}{4\pi(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}})^{2}}(\varpi B_{\perp})^{2}+\frac{1}{\pi\varpi^{2}}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)^{2} \tag{3-9b}$$

$$\begin{aligned}-\alpha\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}\cdot\boldsymbol{n}\to\frac{\Delta M}{\Delta\sigma}&=T^{\mathrm{H}}\frac{\Delta\dot{s}^{\mathrm{H}}}{\Delta\sigma}+\Omega^{\mathrm{H}}\frac{\Delta J}{\Delta\sigma}\\&=-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}}}{4\pi(1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}})}(\varpi B_{\perp})^{2}\left(\Omega^{\mathrm{H}}-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}}}{1+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}}\right)\\&\quad+\frac{1}{\pi\varpi^{2}}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\left\{\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}}{2}\varpi^{2}E_{\perp}\right\}\end{aligned} \tag{3-9c}$$

로 주어진다.

그런데 식 (3-8a)와 식 (3-8b)의 첫 부분을 이용하면 약간의 계산 끝에

$$\frac{\Delta J}{\Delta\sigma}=-\frac{1}{2\pi}\left\{\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)B_{\perp}+\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)E_{\perp}\right\} \tag{3-10a}$$

$$T^{\mathrm{H}}\frac{\Delta\dot{s}^{\mathrm{H}}}{\Delta\sigma}=\frac{1}{\pi\varpi^{2}}\left\{\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)^{2}+\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)^{2}\right\} \tag{3-10b}$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta\sigma} = \frac{1}{\pi\varpi^2}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\left\{\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}}{2}\varpi^2 B_\perp\right\} + \frac{1}{\pi\varpi^2}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\left\{\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}}{2}\varpi^2 E_\perp\right\} \tag{3-10c}$$

처럼 나타낼 수 있게 된다. 식 (3-10)는 이 논문에서 처음으로 소개되는 것으로 식 (3-10a)는 단위 면적 당 torque, 즉 블랙홀 각운동량의 추출을, 식 (3-10b)는 Joule heating에 의한 엔트로피 증가를, 식 (3-10c)는 적색이동된 에너지 flux, 즉 블랙홀 에너지의 추출을 각각 의미한다.

4. 결론

식 (3-8b)의 두 번째 부분은 식 (3-8a)와 비슷한 형태로 주어져서 앞으로 블랙홀 사건의 지평선 경계 조건에 관여하는 방정식들을 훨씬 더 규칙성 있게 나타내게 될 것이다. 예를 들면 식 (3-9), (3-10)는

$$\frac{\Delta I}{\Delta\sigma} = \frac{1}{16\pi^3\varpi}\{(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi)(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\nabla\Psi) - (\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi)(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\nabla\Phi)\} \tag{4-1a}$$

$$T^{\mathrm{H}}\frac{\Delta\dot{s}^{\mathrm{H}}}{\Delta\sigma} = \frac{1}{16\pi^3\varpi^2}\{(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi)^2+(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi)^2\} \tag{4-1b}$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta\sigma} = \frac{1}{16\pi^3\varpi}(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi) \times\{(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Phi)+\varpi\Omega^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\nabla\Psi)\} + \frac{1}{16\pi^3\varpi}(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi) \times\{(\alpha\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi)-\varpi\Omega^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\nabla\Phi)\} \tag{4-1c}$$

와 같이 변형될 수 있다. 따라서 이 논문에 새로 유도된 식들은 앞으로 블랙홀 각운동량의 추출, 엔트로피 증가, 블랙홀 에너지의 추출 연구에 기여를 할 것으로 믿어진다.

식 (3-9)에서 시간으로 미분된 양들과 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}$를 모두 0으로 놓으면

$$-\alpha\boldsymbol{S}_{\mathrm{J}}\cdot\boldsymbol{n}\rightarrow\frac{\Delta I}{\Delta\sigma}=-\frac{\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}}}{4\pi}(\varpi B_\perp)^2 \tag{4-2a}$$

$$T^{\mathrm{H}}\frac{\Delta\dot{s}^{\mathrm{H}}}{\Delta\sigma}=\frac{(\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}})^2}{4\pi}(\varpi B_\perp)^2 \tag{4-2b}$$

$$-\alpha\boldsymbol{S}_{\mathrm{E}}\cdot\boldsymbol{n}\rightarrow\frac{\Delta M}{\Delta\sigma}=-\frac{\Omega^{\mathrm{F}}(\Omega^{\mathrm{H}}-\Omega^{\mathrm{F}})}{4\pi}(\varpi B_\perp)^2 \tag{4-2c}$$

가 된다(MT, 식 [5.12], [5.13], [5.14]). 따라서 이 경우 이 논문에서 구한 nonstationary 식들은 모두 자연스럽게 stationary 경우로 환원됨을 밝혀둔다

참고문헌

Macdonald, D. A., & Thorne, K. S. 1982, MNRAS, 198, 345 (MT)

Novikov, I. D., & Frolov, V. P. 1988, Physics of Black Holes(Kluwer Academic Pub.)

Okamoto, I. 1975, MNRAS, 173, 357

Park, S. J. 2000, J. Korean Astron. Soc., 33, 19 (논문 I)

Park, S. J. 2002, in Current High-Energy Emission around Black Holes, ed. C.-W. Lee & H.-Y. Chang(World Scientific), 231

Park, S. J., & Vishniac, E. T. 1989, ApJ, 337, 78

Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, Black Holes: The Membrane Paradigm(Yale Univ. Press)