韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 17집, 2003. 10. 191-208.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 17, Dec. 2003. 191-208.

수학 영재 교수-학습 방법 탐색
- 개방형 교수법의 발전적 적용 -

김 남 균 (서울토성초등학교)

영재 교육이 공교육 차원에서 확대됨에 따라 영재 지도 교사의 범위도 확대되고 있다. 이전에는 대학의 수학과 또는 수학교육과의 교원이나 대학원에서 수학 교육을 전공하는 교사들이 수학 영재를 지도하였으나, 점차로 영재 교육 연수를 받은 현장 교사들이 영재 지도를 맡고 있다. 이러한 현상은 역설적으로 수학 영재 교육에 대한 기본적인 사항에 대한 논의를 더욱 심각하게 제기한다. 특히 '수학 영재아란 누구인가'와 '수학 영재 교육은 무엇이며 어떻게 시켜야하는가' 하는 질문은 가장 근본적인 질문이면서도 영재 교육을 담당하는 교사들에게는 풀기 힘든 과제가 아닐 수 없다. 본 고에서는 수학 영재의 교수-학습 방법으로 일반적인 교수-학습 방법 중 창의력을 개발하여 주는 수학 학습 방법을 영재들에게 적합하게 적용할 것을 제안하며, 그 일례로 개방형 교수법의 발전적 적용 방법을 전개하여 보았다.

Ⅰ. 시작하며

2002년 3월 1일부터 영재교육진흥법이 시행되면서 공교육 차원에서 본격적으로 영재 교육이 실행되고 있다. 수학과 과학 분야의 영재 교육은 대학 부설 과학영재센터(영재교육원) 위주로 행해졌으나, 영재교육진흥법이 시행되면서 다양한 형태와 수준에서 영재교육원이 만들어져 활성화되고 있다. 각 시도 교육청에서는 영재시범학교를 지정하여 여러 학교를 하나의 그룹으로 만들어 영재교육원을 운영하고 있으며, 일부 지역에서는 시도 교육청이 지역 내의 대학의 신청을 받아 영재교육원을 개설하여 운영하고 있다. 앞으로 이후 각 시도 교육청, 대학, 국공립 연구소, 정부출연기관 등 공익법인에서도 영재교육원을 설립할 계획에 있다.

영재 교육이 공교육 차원에서 확대됨에 따라 영재 지도 교사의 범위도 확대되고 있다. 이전에는 대학의 수학과 또는 수학교육과의 교원이나 대학원에서 수학 교육을 전공하는 교사들이 수학 영재를 지도하였으나, 점차로 영재 교육 연수를 받은 현장 교사들이 영재 지도를 맡고 있다. 이러한 현상은 역설적으로 수학 영재 교육에 대한 기본적인 사항에 대한 논의를 더욱 심각하게 제기한다. 특히 '수학 영재아란 누구인가'와 '수학 영재 교육은 무엇이며 어떻게 시켜야하는가' 하는 질문은 가장 근본적인 질문이면서도 영재 교육을 담당하는 교사들에게는 풀기 힘든 과제가 아닐 수 없다.

그렇다면, 수학 영재들은 어떤 교수-학습 방법으로 지도해야 하는가? 일반 학생들에게 적용하는 교수-학습 방법 중 영재들의 특성에 좀 더 적합한 것을 선정하고 영재 학생에 맞게 질적인 차이를 두어 적용하여야 한다. 영재들의 대표적인 특징으로 창의성을 꼽을 수 있으며 일반적으로 창의성 신

장을 위한 교수 학습 모형인 '삼부 심화 학습 모형', '문제 중심 학습', '창의적 문제 해결 학습', '자기 주도적인 학습 모형'(김홍원, 2003; 정현철, 2003)을 수학과에 적용하는 방법이 있다. 또 다른 방법으로는 수학과의 교수-학습 방법 중 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 것을 영재들의 특성에 따라 변형하여 지도하는 방법이 있다. 후자의 경우 수학 교사들에게 많이 알려져 있으므로, 교사들이 현장에서 적용하기에 더 용이하리라 생각된다.

학생들의 개인차를 고려하고 창의성을 육성할 수 있는 교수법으로 알려진 교수법으로 개방형 교수법이 있다. 개방형 교수법은 일반적인 학생들의 문제해결학습의 일환으로 문제제기(problem-posing)에서 발전한 교수-학습 방법으로 여러 연구 결과(예. 문성길, 2000; 변은진, 2001) 일반 학생들의 창의성 신장에 효과가 있는 것으로 나타났다. 영재 교육 분야에서도 수학 영재들의 지도에 개방형 교수법을 활용하려는 노력도 활발해 지고 있다(예. 백선수, 2002). 그러나, 일반 학생들에게 적용하던 방법 그대로 적용하는 것보다 영재들의 특성에 맞도록 발전적으로 적용하는 것이 바람직하다.

본 고에서는 일반적인 수학 교수-학습 방법의 하나이지만 수학 영재 지도에 적합한 교수-학습 방법으로 개방형 교수법을 제안하며, 개방형 교수법이 수학 영재 지도에 적합한 근거를 수학 영재들의 특성에서 알아보고, 수학 영재들의 특성에 따라 발전적으로 적용하는 방안을 탐색해보고자 한다.

Ⅱ. 수학 영재와 개방형 교수법

개방형 교수법이란 하나의 정답이 미리 정해진 '완결된(또는 닫힌)' 문제에 반하여 여러 개의 정답과 해결 방법이 가능한 '미완결(또는 개방형)'의 문제를 해결하면서 진행되는 교수-학습 방법을 말한다(Becker & Shimada, 1997). 정동권(1996)은 개방형 문제를 과제로 삼아 그 속에 내포된 해답의 다양성을 적극적으로 수업에 활용함으로써, 그 과정에서 아동으로 하여금 기습의 지식·기능 및 사고 방법을 적절하게 재조직하여 새로운 것을 발견하거나, 좀 더 발전적인 시각으로 수학학습을 바라보거나, 적극적으로 학습에 참여할 수 있는 기회를 제공하는 방법이라고 정의하고 있다. 개방형 교수법은 덜 구조화된 문제의 개방성뿐 아니라 그로 인하여 교수-학습 과정과 학습의 결과에서 개방성이 파생된다.

다음에서는 개방형 교수법에 수학 영재 교수 방법으로 적합한 근거를 영재의 특성에서 찾아본다.

1. 수학 영재의 특성

일반적으로 널리 사용되고 있는 영재아의 개념 중 미국 코네티컷 대학 교수이자 미국 연방 정부의 국립 영재교육 연구소 소장인 렌줄리의 정의가 있다. 렌줄리는 실제로 사회에서 뛰어난 공헌을 한 사람들은 예외없이 '평균 이상의 능력', '높은 창의성', '높은 과제 집착력'을 보이고 있다고 했다

(Renzulli, 1978, 조석희, 2002, 재인용). 렌줄리 정의의 특이할 점은 처음으로 '과제 집착력' 같은 비인지적 요인을 영재성의 한 요소로 포함시켰다는 점이다. 렌줄리는 영재는 이 세 요소를 모두 갖추고 있어야 하지만 이 세 가지 특성에서 모두 대단히 뛰어나야 할 필요는 없다고 강조한다. 한 특성에서는 적어도 상위 2% 이내에 속해야 하지만 나머지 특성에서는 상위 12%이내면 된다고 한다.

수학 영재는 수학적 능력이 뛰어난 학생을 의미한다. 수학 영재는 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식의 요인이 평균 이상의 높은 능력을 지니는 학생이라 정의된다(김홍원 외, 1997). 김홍원 등(1997)의 수학 영재 정의는 각각의 능력을 하부 요소로 조작적 정의하여 교수-학습 방법을 논의하기에 난점이 많다. 연구자는 수학 영재아를 평균 이상의 지능과 수학적 능력, 수학적 창의성, 과제 집착성의 요인이 높은 학생으로 보고, 이에 터하여 개방형 교수법이 수학 영재의 지도에서 적합한 근거를 찾아보았다.

2. 수학 영재의 특성과 개방형 교수법

(1) 수학적 능력의 측면

수학 영재들이 보이는 수학적 능력으로 ① 수학적 사실의 일반화 (법칙을 발견하는 일), ② 사고 기능의 유연성 (한 조작에서 다른 조작으로의 신속한 전환 및 사고의 가역성), ③ 가장 쉽고, 명백하고, 경제적인 해결책에 대한 열망, ④ 사고 과정의 단축 및 추론을 이루는 각 연결 부분의 생략, ⑤ 주변에서 볼 수 있는 특수한 수학적 개념에 대한 초보적인 형태의 형식화 등을 열거할 수 있다(Krutetskii, 1976). 그러나, 수학 영재들이 보이는 수학적 능력의 성향과 질적인 차이는 상당히 크다. Kruteskii(1976)에 따르면 수학 영재아들은 사고 활동에 있어서 시각-도형적(visual-pictorial) 요소와 언어-논리적(verbal-logical) 요소에 따른 유형적 차이를 보인다. 학자들마다 영재에 대한 정의가 다르고 영재라고 보는 범위가 다르기는 하지만, 렌줄리의 정의에 따르면 수학적 능력에서 12%이내에 있는 학생이 수학 영재로 판별될 수 있어 수학 영재들 사이에서도 수준이나 특성의 개인차는 매우 크다.

사사(mentorship)의 방법으로 지도할 때에는 개인차가 문제되지 않지만, 현실적으로 영재를 학급으로 묶어서 지도하기 때문에 영재의 개인차가 인정되는 교수-학습 방법이 필요하다. 개방형 교수법은 학생 반응의 개방성을 인정하므로, 개방형 교수법 하에서 수학 영재들은 그들의 능력에 맞는 방법으로 문제를 해결하고 답을 내게 된다. 수학 영재들의 다양한 사고 방식과 전략을 십분 발휘할 수 있으며 다양한 해결 방법에 대한 토의가 가능하다. 일선의 영재 지도 교사 중에는 영재의 개인적인 성향으로 인하여 소집단 학습이나 토론식 수업이 힘들다고 토로하는 교사가 많이 있다. 개방형 교수법을 활용하게 되면 이를 해소할 수 있다고 본다.

개방형 과제를 가지고 학습하며 수학 영재들은 도전감을 가지고 서로의 해법에 대해 토론하고 다양한 해법을 찾기 위해 거리낌 없이 협동하게 된다. 또한 상대적으로 낮은 수준의 영재라 할지라도 덜 위축되고 능동적으로 문제 해결에 참여할 수 있게 될 것이다.

(2) 수학적 창의력 개발의 측면

수학적 창의성은 영재에 대한 정의만큼 그 정의나 접근방법이 다양하다. Weaver와 Brawley(1959)는 수량적인 상황을 고정된 방식이 아니라, 통찰, 상상, 창의성, 자기 주도성, 독립성, 열망, 집중성, 끈기를 가지고 융통성 있게 생각하고 수행하는 능력, Sparker(1960)는 비일상적이거나 독창적이면서, 적용 가능한 수학적 문제 해결 방법을 산출하는 능력으로 정의하고 있다(김홍원 외, 1996 재인용). 즉, 수학적 문제 상황에서 기존의 지식과 경험 등을 바탕으로 정형화된 범주에서 벗어나 다양하고 새롭게 사고하고 문제를 해결하는 것과 관련된다고 알 수 있다.

일반적으로 수학 영재들은 수학적 창의성 수준이 높으며 창의성을 발휘할 수 있는 과제와 활동에 참여하는 것을 즐겨한다. 개방형 문제와 교수법은 수학적 창의력과 밀접히 관련된다. 연구 결과들에서 개방형 문제로 학생들의 수학적 창의성을 측정할 수 있고(정동권, 1997, 김홍원 외, 1997, 송상헌, 1998), 개방형 문제를 활용하여 수학 학습을 하게 되면 학생들의 창의성이 신장됨(문성길, 2000, 송상헌, 1998)을 알 수 있다. 개방형 문제는 수학적 창의성 측정뿐 아니라 창의성 신장을 위한 과제가 된다.

수학적 창의성은 영재의 선발의 한 요소로 개방형 문제를 활용하여 측정된다. 영재의 선발은 일회에 그치는 것이 아니라 수학 영재의 평가 즉, 수학 영재 교육을 지속시켜야 하는가를 판단하는 계속적인 작업이다. 또한 지필 검사의 형태로 문제해결과 결과만을 평가하여서는 창의성을 제대로 측정할 수 없다. 수학 영재의 학습 과정에서 평가되어야 바람직하다. 개방형 교수법을 통해 수학 영재들이 다양하고 창의적인 문제 해결 방법을 직·간접적으로 경험함으로써 영재들의 창의력을 신장시킬 수 있다. 따라서 개방형 교수법은 수학 영재들의 창의성 과제에 대한 욕구를 충족하면서 그들의 창의성을 신장시키고 올바르게 평가할 수 있는 교수-학습 방법이라 하겠다.

(3) 과제 집착력 측면

수학 영재들의 과제 집착력은 활동력과 지속성을 가지고 수학적 문제를 풀이하는 행동적 특성[1]이라 할 수 있다. 수학 영재들이 활동력과 지속성을 가지고 시도할 수 있는 문제는 수학 내용적으로나

1) House(1987)은 수학 영재들이 가지고 있을 만한 행동 특성을 크게 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동 특성의 4가지로 나누고 각각을 자세히 기술하고 있다. 수학적 행동 특성 가운데 과제 지속력 관련 항목을 인용한 것이다.

문제의 구조 상 이들의 홍미를 자극하고 도전할만한 가치가 있는 것이다. 단순한 암기의 과제나 기계적인 계산 문제는 영재들의 학습 욕구를 만족시키지 못하여 과제에 대한 홍미를 유발시키거나 지속시키지 못한다.

개방형 문제는 비구조화되어 있으며 수학적으로 내용이 풍부하고 가치가 있어야 한다(Becker & Shimada, 1997). 잘 구성된 개방형 문제라면 영재 학생들은 과제에 몰입할 것이며 교사와 동료 영재 학생과의 상호작용을 통하여 과제를 다양한 방법으로 해결하기 위해 지속적인 노력을 보일 것이다. 수학 영재를 지도할 때 행동 특성에 대한 지도는 간과하게 된다. 그러나 개방형 교수-학습 방법을 통하여 지속적으로 과제를 해결하는 행동 특성도 신장시킬 수 있다.

이상에서 볼 때 개방형 교수법은 영재지도 교사들이 복잡한 교수-학습 모형이나 이론적 지식의 이해에 대한 부담없이, 영재들의 특성에 맞게 지도할 수 있는 교수 방안이라 할 수 있다.

Ⅳ. 개방형 교수법을 활용한 수학 영재지도

다음에서는 개방형 교수법의 이론을 알아보고 수학 영재들에게는 어떻게 차별화시켜 적용해야 할지 초등학교 고학년이나 중학교 저학년 수학 영재들에게 적용할 수 있는 수업을 예로 들어 알아본다.

1. 개방형 교수법

(1) 개방형 문제

개방형 교수법이 다른 교수-학습 방법과 가장 크게 차별화되는 것은 학생들이 해결해야할 문제의 특성이다. 문제를 구분하는 방법은 여러 가지가 있다. 坪田耕三(1993, 문성길, 2000에서 재인용)는 문제를 개방성의 정도에 따라 즉, 문제에 대한 결과(답)가 열려 있는가 또는 해답에 이르는 풀이 과정이 열려 있는가에 따라 다음의 세 가지 형태로 나눈다.

첫째, 문제에 대한 해답이 유일하고, 그 해답에 이르는 과정 또한 하나 뿐인 문제
둘째, 결과는 유일하지만, 그 결과에 이르는 과정이 열려있는 문제
셋째, 과정과 결과 모두 열려있는 문제

문성길(2000)은 첫 번째와 두 번째 유형의 문제를「닫힌 문제」, 또는 「완결된 문제」라고 하고, 세 번째 유형을 「개방형 문제」라고 하였다. 문성길은 닫힌 문제를 과제로 하는 수업에서는 옳은

답이 오직 하나이기 때문에 어느 한 아동이 그 답을 말해 버리면 다른 많은 아동은 말할 기회를 잃게 되며 한 번 답을 찾은 후에는 교사의 지시를 기다리거나, 다른 친구들이 다 할 때까지 아무 것도 하지 않고 있어야 하지만, 세 번째 유형의 문제에서는 하나의 주어진 문제에 대하여 여러 가지의 답이 가능한 개방형 문제를 과제로 하여 진행하는 수업에서는 하나의 답이 나왔다고 하더라도, 또 다른 옳은 답이 몇 개라도 더 나올 수 있기 때문에 자연스럽게 발표의 장이 활성화될 수 있다고 보았다.

세 번째 문제 유형으로 학습하게 되면 과정과 결과가 학습자의 탐구 능력에 따라 달라질 수 있어 수학 영재들이 다양하게 접근할 수 있는 개방형 교수법을 전개할 수 있다. 그러나, 수학에서는 답 뿐 아니라 답에 이르게 된 해결과정이 매우 중요한 것이며, 다양한 해결 방법을 찾는 것도 학생들의 창의성을 신장시킬 수 있으므로 두 번째 문제 유형도 개방형 교수법에서 충분히 활용할 수 있다고 보여진다.

(2) 개방형 문제의 유형

개방형 문제의 유형은 다음 여섯 가지로 나눌 수 있다(坪田耕三, 1993, 문성길, 2000에서 재인용)[2]. 아래와 같은 과정과 답이 모두 개방적인 문제 외에, 해결과정이 다양한 문제까지 포함한다면 일반적으로 수학 학습에서 활용하는 많은 문제 상황이 개방형 교수법으로 전개될 수 있을 것이다.

가. 관계나 법칙을 찾아내는 문제

어떤 수학적 규칙이나 관계를 찾는 문제이다. 예를 들어, 곱셈 구구표를 보여주고, "이 표에 나타나는 규칙을 되도록 많이 찾아 보아라."와 같은 문제가 이에 해당한다.

나. 분류하는 문제

동일 범주에 속하는 서로 다른 구체적인 예를 많이 열거하고 그 가운데서 하나의 대상을 지정하여 그것과 같은 특징을 갖는 것들을 찾아보게 하는 문제로서, 이 경우 그 특징을 파악하는 관점이 다양할수록 많은 해가 도출될 수 있다. 예컨대, 몇 가지 도형을 보여주고, 그 중 하나를 지정하여 "이 도형이 지닌 특징을 다양하게 생각해 보고 그것과 같은 특징을 지닌 다른 도형을 알아보아라."와 같은 문제가 이에 해당한다.

2) Becker와 Shimada(1997)는 관계를 찾는 문제, 분류하는 문제, 수량화하는 문제의 세 가지로 구분하고 있다. 전자의 분류에 후자의 분류가 모두 포함되며, 더 다양한 수학적 활동을 개방형 문제에 포함시키고 있기 때문에 坪田耕三(1993)의 구분을 따르기로 한다.

다. 수량화 문제

정도의 차가 나타나는 구체적인 수학적 장면을 제시하고, 그 정도의 차이를 수량화하는 방법을 탐구하도록 하는 문제이다. "여러 팀의 야구 경기결과표를 주고 순위를 결정하는 방법을 다양하게 생각해 보아라."와 같은 문제를 예로 들 수 있다. 수로서 나타내는 방법이나 기준을 다양하게 정해 각각의 방법에 있어서 장·단점을 부각시켜 그것을 수정하는 활동을 행할 수 있다.

라. 역(逆) 문제

조건과 결론 부분을 거꾸로 구성하여 답이 유일하게 설정되지 않도록 짜여진 문제이다. "3×4는 얼마인가?"의 문제를 "12는 무엇과 무엇을 곱하면 되나?"와 같은 형태로 변환한다든지, "가로의 길이가 3cm, 세로의 길이가 5cm인 도형의 넓이를 구하여라."의 문제를 넓이를 지정하고 모눈종이나 기하판 위에 같은 넓이를 갖는 도형을 구성해 보게 하는 문제로 변환하여 만들 수 있다.

마. 조건불비(條件不備)의 문제

그 부족한 조건을 스스로 찾아서 챙겨야 하기 때문에 다양성이 보장되는 문제이다. 조건의 부족에 따라 부정, 불능의 문제가 될 수도 있겠지만 부정, 불능의 문제도 문제의 조건을 보완하거나 수정하여 다양한 해결 과정과 결과를 찾을 수 있다. 예를 들어, 단순하고 일반적인 문제 같지만 "약 5000은 원래 어떤 수였을까요?"라는 문제가 이에 해당된다. 5000이 어떤 자리까지의 어림수인가, 반올림이나 올림, 버림 등 어떤 어림수 처리를 하느냐에 따라 다양한 해가 제시될 것이다.

바. 구성 활동의 문제

실제로 학생들에게 조작 활동을 해보게 하는 문제로 예를 들어, 주어진 입체의 전개도에서 각자 자유롭게 면을 잘라서 새로운 입체를 구성해 보도록 하는 활동이나, 기하판 위에 주어진 길이를 한 변으로 하는 이등변삼각형의 구성 활동 등이 이에 해당된다.

(3) 개방형 교수법에 의한 수업 전개

개방형 교수법은 교수법 자체도 개방적이어서 정해진 절차가 있지 않다. Becker와 Shimada(1997)는 개방형 문제를 지도하는 과정을 문제 제시, 수업 조직, 학생들의 반응 기록하기, 학습한 내용 요약/정리하기로 제시하고 있다. Becker와 Shimada는 일반학생들을 대상으로 개방형 교수법을 연구한 바, 일반 학생들에게 수업을 실시하여 그 수업 과정과 학생들의 반응을 분석하였다. 영재들에게 실시할 때는 약간의 변형이 이루어져야 한다. 수업의 과정 등 형식보다는 문제와 문제를 도입하고 토의하는 방식 등 구체적인 내용에서 차별화되어야 하겠다. 개방형 수업을 영재들에게 적용할 때에는 문제의 도입에서 정리까지 모든 부분에서 교사의 설명과 개입을 줄이고 학생들의 활동과 토의를 강조

해야 할 것이다. 개방형 교수법 과정에 영재들을 지도할 때 고려할 점을 덧붙여 알아보면 다음과 같다.

가. 문제 제시하기

모든 수업이 그렇듯 먼저 학생들에게 문제를 제시한다. 개방형 문제를 제시할 때, '어떤 성질(관계, 규칙, 방법 등)을 발견할 수 있는가?'는 질문이 동반된다. 그러나, 개방형 교수법에 익숙치 않은 학생들은 수학 학습에서 성질, 관계, 규칙, 방법 등의 용어에 낯설어하면서 문제를 제대로 탐구하지 못한다. 학생들의 이해를 돕기 위해서는 문제를 제시할 때 아래와 같은 방법을 취하면 도움이 된다.

1)OHP와 잘 준비된 TP 자료를 이용하여 학생들이 동일한 논점에 초점을 맞출 수 있게 한다.

2)문제 상황을 다양하게 도입하거나, 문제에 진술에 포함된 것 이상의 구체적인 예를 제시하는 등 일반화를 위한 보다 많은 자료를 제시한다.

3)학생들의 사고를 제한하지 않으면서 문제에 대한 시각을 개발할 수 있는 구체적인 질문을 던진다.

4)필요한 경우 모형과 같은 구체물을 적절히 사용한다.

영재들의 경우에는 문제의 내용을 교사가 너무 자세히 설명하거나, 구체물을 제시할 필요가 없는 경우가 많다. 영재들의 수준에 맞추어 문제의 설명을 간소히 하거나, 학생들에게 문제를 설명해보게 하는 것도 좋은 방법이다.

나. 수업을 조직하기

개방형 교수법은 학생 개개인의 수학적 사고를 특별히 강조하기 때문에, 특정 학생의 의견을 채택하여 다른 모든 학생들에게 특정한 방법을 강요하지 않도록 수업을 조직해야 한다. 처음에는 개별적으로 해결하고 다음에 소집단 토의를 통하여 더 독창적이고 정교한 해로 발전시키며, 이를 다시 전체 학급 토의에서 논의하게 할 수 있다. 문제의 특성에 따라 개별 활동에서 바로 전체 토의를 하게 한다.

일반적으로 수학영재들은 개인적으로 학습하기를 즐겨하고 소집단 협동 학습을 꺼려한다고 인식된다. 그러나, 개인적인 활동보다는 서로 토의하면서 해결방법을 세련화시킬 수 있는 것도 사실이다. 개방형 문제는 학생들이 다양한 해결방법과 정답을 낼 수 있으므로, 영재 학생들이 정답에 집착하지 않고 소집단 또는 대집단 활동에 참여할 수 있다. 그러므로, 영재들에게 개방형 교수법을 적용할 때에는 개별 활동, 소집단, 대집단 토의를 적절히 조직하는 것이 바람직하다.

일반 학생들은 개방형 문제를 해결할 때에, 새로운 방법을 고안해내지 못하거나 정교하지 못한 해결법을 사용한다. 반면에 수학 영재들은 독창적이고 정교한 방법으로 해결할 가능성이 많다. 영재를

지도할 때에는 학생들이 자신의 방법을 다른 학생들과 대등하게 놓고 토의할 수 있도록 허용해주도록 한다. 일반 학생에게는 개방형 문제에 답하도록 그리고, 다양한 해결 방법을 생각하도록 하기 위해서 교사가 많은 안내를 해주어야 한다. 하지만, 영재들의 경우 다양한 해결방법을 생각하여 정교화하는 주도권을 영재들에게 주어야 할 것이다.

다. 학생들의 해결 방법 기록하기

개방형 문제를 개별적으로 해결하면서 그리고, 소집단 토의를 하면서 기록하게 한다. 개별 또는 소집단별 문제에 대한 반응, 풀이 방법, 답 등을 종이 위에 기록하는 것은 개방형 수업 과정뿐 아니라 수업 후에도 매우 중요하다. 공책이나 활동지를 이용하여 학생들에게 자신(또는 본인이 속한 소집단)의 해결 방법을 기록하게 되면 그 내용을 학급토의에 활용하여 더욱 주제에 밀착되게 토의를 하고 개방형 문제의 다양한 해와 수학적 장단점과 의미를 심도있게 파악할 수 있게 된다. 그리고, 학생들이 기록한 내용은 수행평가 자료로 이용될 수도 있다.

영재들은 개방형 문제에 다양하고 독창적으로 답한다. 그리고, 이를 기록할 때도 일반 학생보다 간단하고, 명료하고, 세련되게 하며 수학식 표현을 잘하는 경향이 있다. 따라서, 영재 학생들이 해결방법을 말로만 설명하게 하기보다는 수학적이 표현을 사용하여 기록하고 이를 토론과 평가에 충분히 이용하도록 한다.

라. 학습한 것을 요약/정리하기

전체 토의를 하면서 개별 또는 소집단 활동 내용을 서로 비교하고 세련시키면서 요약/정리한다. 칠판이나 실물화상기로 학급 학생 전체가 볼 수 있도록 해준다.

일반 학생들의 수업에서는 대개 교사가 학습 내용을 정리한다. 교사가 준비한 예상 반응에 따라 학생들의 해결 방법을 평가하고 체크하게 된다. 반면 영재들의 수업에서는 교사가 학습 내용을 요약하고 정리하는 것보다 학생에게 정리의 기회를 주고, 서로 정리하고 범주화한 내용 자체를 또 다른 학습 소재로 삼아 토론할 수 있게 해준다. 예를 들어, 특정한 학생을 선정하여 그 학생이 여러 학생들이 발표한 해결 방법을 범주로 구분하고 학습 내용을 정리하여 발표한 후 이에 대해서 다른 학생과 비교하고 정당화하는 수학적 토론을 하고 교사가 이를 보완하고 정리하는 형식을 띄는 것도 좋다. 개방형 교수법을 처음 실시할 때는 어려움도 있겠지만, 익숙해지면 수학 영재들은 개방형 문제를 다양하게 해결하고 토론하며 이를 요약/정리하는 활동을 즐기게 될 것이다.

(4) 평가 방법

가. 답과 해결 방법의 평가

개방형 수업 후 학생의 평가는 닫힌 문제로 수업을 한 수업보다 더 복잡하다. 학생들의 반응이 다양하기 때문이다. 개방형 교수법의 평가는 일반적으로 개방형 수업 후 또는 개방형 수업 중에 학생

들의 반응을 항목에 따라 분류하여, 교사가 수업 전에 미리 작성한 (예상) 반응표를 보고 기준에 따라 평가한다(Becker & Shimada, 1997). 이 때 평가하는 기준은 유창성, 융통성, 독창성, 정교성이며 앞의 두 기준은 양("얼마나 많은가")을 평가하는 방법이고 뒤의 두 기준은 질("얼마나 혁신적이고 정교한가")을 평가하는 방법이다. 이 기준에 학생들의 다양한 답을 평가하는 방법을 설명하면 다음과 같다.

1) 유창성(Fluency)

유창성은 '학생 개개인이 얼마나 많은 해를 만들어 낼 수 있는가?'하는 것이다. 학생(또는 소집단)의 반응 중 '올바른 반응의 총 수'로 학생들의 수학적 사고에 대한 유창성의 지표를 평가하게 된다. 즉, 한 학생(또는 소집단)의 여러 개의 해결 방법 중 올바른 것 방법의 수가 많다면 그 학생들은 수학적 사고의 유창성이 높다고 할 수 있다.

2) 융통성(Flexibility)

융통성은 '학생들이 서로 다른 수학적 아이디어를 얼마나 많이 발견할 수 있는가?'로 알 수 있다. 개방형 문제의 해결방법은 다양하며, 해결 전략에 따라 여러 가지 범주로 나눌 수 있다. 한 학생(또는 그룹)에 의해 만들어진 정확한 해나 풀이방법은 여러 개의 범주로 나누어질 수 있다. 만약, 두 가지의 해(또는 풀이방법)가 똑같은 수학적 아이디어에 의한 것이라면, 두 가지 해 모두 같은 범주에 포함된다. 이런 범주의 수를 '긍정적인 반응의 수'라고 한다. 긍정적인 반응의 수는 학생들의 수학적 사고에 대한 융통성의 지표로 간주될 수 있다.

3) 독창성(Originality)

'학생들의 아이디어가 얼마나 독창적인가'를 말한다. 어떤 학생(또는 집단)이 참신하고 통찰력이 강한 아이디어를 내었다면 독창성이 높다고 할 수 있다. 올바른 반응 중에서 독창적인 해의 질에 대해 가치를 인정해 주는 것이므로 '긍정적인 반응의 가중치'라 하기도 한다.

독창성을 알아보기 위해서는 가능한 해의 범주는 조사하고 어느 범주의 반응이 색다르고 통찰력이 있는지, 통상적이지 않는지를 판단해야 한다. 개방형 문제를 만들고 예상 반응을 만든 후 다른 교사들과 그 반응의 범주를 분류하고 진기함을 따져 보는 활동이 선행되어야 바르게 평가할 수 있다. 수업 중에 예상하지 못한 올바르고 진기한 반응이 나왔다면 그 답을 낸 학생의 아이디어도 독창적이라 판단할 수 있겠다.

4) 세련미(Elegance)

학생들이 '자신의 생각을 얼마나 세련되게 표현하는가'를 말한다. 어떤 학생들은 자신의 해나 풀이 과정을 애매하게 쓰지만, 어떤 학생들은 간단하고, 분명하게, 그리고 세련되게 정리한다. 보통의 문장

을 사용하는 것보다 변수나 수식을 이용하여 수학적 관계를 표현하는 경우가 수학적 세련미가 높다고 할 수 있다.

이 평가 기준을 표로 정리하면 아래와 같다.

<표 1> 개방형 문제 평가기준

구분	평가 내용	평가 관점
유창성	올바른 반응의 총 수	얼마나 많은가
융통성	긍정적인 반응의 수 (반응의 범주 수)	
독창성	독창적인 긍정적인 반응의 수	얼마나 혁신적이고 정교한가
세련미	수학적 표현의 사용	

Becker와 Shimada(1997)는 평가기준을 유창성, 융통성, 독창성, 세련미의 네 가지로 제시하고 있지만 문제나 상황에 따라 조절하여 적용하여야 한다 제안한다. 예를 들어, 세련미의 평가는 애매하고 어려우며, 어떤 문제는 범주를 나누기 어려워 융통성이나 독창성의 평가가 힘든 경우도 있다. 이 때는 평가 기준의 수를 줄여 평가하는 것도 한 방법이 되겠다.

나. 해결 방법의 범주화 결과 평가

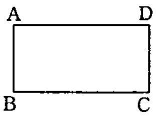
수학 영재들에게 하나의 문제에 대한 해결 방법을 범주에 따라 나누어 정리해 보게 하였다면, 해결 방법을 범주화한 내용도 평가한다. 창의적이고 다양한 접근법을 생각하는 능력 못지 않게 범주화 능력은 고차원적인 수학적 능력을 요하므로, 범주와 결과까지 평가해야 수학 영재들의 능력을 제대로 평가하는 것이다. 이 때, 학생들의 범주화 내용은 교사가 예상한 범주와 일치할 수도 있지만, 교사가 예상하지 못한 범주이면서 동시에 수학적으로 유의미할 수 있으므로 평가에 유의해야 한다.

2. 개방형 교수법을 활용한 영재 수업의 예

다음에서는 초등학교 사각형의 변의 길이와 넓이, 중학교의 닮음 내용과 연계하여 활용할 수 있는 개방형 교수법을 활용한 예이다. 수학 영재를 지도하는 교사의 수업 준비과정에 따라 기술하였다.

(1) 문제 만들기

> 다음 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 2배씩 하여 넓이가 4배가 되는 직사각형을 만들려 한다. 만들 수 있는 방법을 여러 가지로 생각해서 이를 그림과 함께 설명하여 보아라.

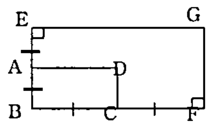


이 문제[3]는 초등학교 고학년이나 중학교 저학년 수준의 영재들에게 적합하다. 실제로 하나의 정답만을 구한다면 이 문제는 개방형 문제라 할 수 없다. 그러나, 문제에서 요구하는 것은 가로와 길이를 각각 2배씩 하여 4배가 되는 직사각형을 여러 가지 방법으로 만들어 보고 이를 수학적으로 정리하는 것이다. 이에 맞추어 예상 반응을 만들어야 하고, 수업의 초점을 다양한 방법으로 직사각형을 만들고 그를 수학적으로 정교하게 표현하는데 두어야 한다.

(2) 예상 반응과 범주 작성

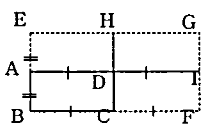
[범주 1] 변과 각을 이용

1. 변 BA와 BC를 2배로 늘려서 점 E와 F를 찾는다. 선분 BE와 BF에 수직인 직선 EG와 FG를 그어 교점 G를 찾는다.



$2BA=BE,\ \ 2BC=BF\ \ \ m\angle GEB=\angle GFB=90^0$

2. 변 BA와 CD를 2배로 늘려서, 점 E와 H를 찾는다. 변 BC와 AD를 2배로 늘려서, 점 F와 I를 찾는다. 그리고, 직선 EH와 FI를 그으면 G에서 만난다.

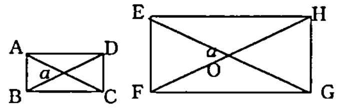


$2BC=BF=AI,\qquad 2BA=BE=CH$

---

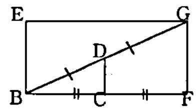
3) Becker와 Shimada(1997)의 *The open-ended approach* 에 수록된 문제임.

3. 대각선 AC와 BD에 의해 만들어진 각 a를 옮겨서, 각의 꼭지점을 O라 하고, 변 AC의 길이만큼 선분 OE, OF, OG, OH를 그려 점E, F, G, H를 잇는다.



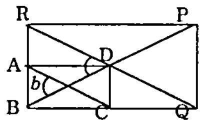
$AC = OE = OF = OG = OH$

4. BD와 BC를 두 배로 늘려서, 점 G와 F를 찾는다. 삼각형 BGF를 만들고, 삼각BGF와 합동인 삼각형 CBE를 만든다.



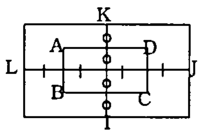
$2BD = BG\ 2BC = BF$, $\triangle BGF \cong \triangle GBE$

5. 대각선 AC와 BD를 그어 생긴 각 b를 만든다. 점 D를 지나는 선분 BP와 RQ를 그어 각b와 같은 크기의 각을 만든다. 대각선 BD를 두 배로 늘려서 점 P를 찾고, 선분 BA, BC의 연장선과 선분 RQ와의 교점 R과 Q를 얻는다.



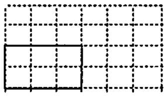
$m\angle b = m\angle RDB$, $2BD = BP$

6. 사각형 ABCD 각 변의 중점을 연결한 뒤 교점을 찾는다. 교점에서 각 변에 이르는 길이의 2배가 되는 점I, J, K, L을 찾는다. 점 I, J, K, L을 지나는 사각형 ABCD의 각 변의 평행선을 그려 직사각형을 완성한다.



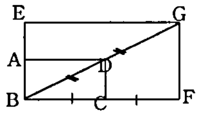
[범주 2] 정사각형 격자 이용하기

7. 주어진 직사각형 안에 1cm의 정사각형 격자를 만든 다음, 각 변의 모눈을 두 배한다.

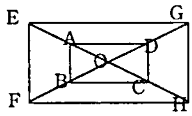


[범주 3] 닮음의 중심 이용하기

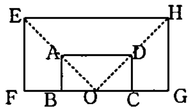
8. 점 B를 닮음의 중심으로 해서, 2BC=BF, 2BD=BG, 2BA=BE가 되게 점 F, G, E를 정한다.



9. 대각선의 교점 O를 닮음의 중심으로 해서, $2OA=OE$, $2OB=OF$, $2OC=OH$, $2OD=OG$가 되는 점 E, F, G, H를 찾아 연결한다.

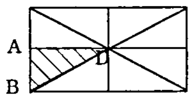


10. 직사각형 ABCD의 한 변 위에 한 점 O를 잡아 닮음의 중심으로 삼아 $OE=2OA$, $OF=2OB$, $OG=2OC$, $OH=2OD$인 점 E, F, G, H를 잡아 서로 연결한다.

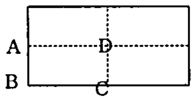


[범주 4] 기타 방법들

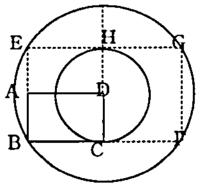
11. 삼각형 ABD와 합동인 8개의 삼각형을 가지런히 놓는다.



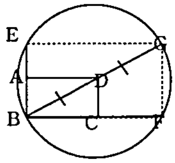
12. 직사각형 ABCD와 합동인 4개의 직사각형을 가지런히 놓는다.



13. 점 D가 중심이고, 반지름이 CD, BD인 두 원을 그린다. 변 BA, BC, CD의 연장선과 두 원의 교점을 찾아 각각 E, F, H라 한다. 선분 EH를 점 G까지 연장하고, 점 E, G, F를 연결해서 사각형 EBFG를 만든다.



14. 점 D를 중심으로 하고, 반지름이 DB인 원을 그린다. 선분 BA, BD, BC의 연장선과 원의 교점을 연결해서 사각형 EBFG를 만든다.



(3) 개방형 교수법 실행

가. 문제 제시

이 문제는 문제의 뜻을 이해하기는 간단하므로, 문제를 제시할 때 별다른 기법이 필요하지 않다. 문제의 핵심인 '어떤 방법이 있는가'를 찾아 수학적으로 정교하게 정리하도록 안내해준다.

나. 수업 조직하기

학생 개인이 해결 방법을 다양하게 찾고 나서 소집단 토의와 대집단 토의를 통해 해결방법을 범주화하고 정교화시키도록 할 수 있다. 지도하고 있는 수학 영재들의 특성에 따라 개별적인 문제 해결에서 대집단 토의로 조직하는 것도 한 방법이다. 교사는 영재 학생들이 다양한 방법을 고안하고 토론을 통하여 정교화시키며, 범주를 나누어 가도록 안내해준다.

다. 학생들의 해결방법 기록하기

해결 방법을 기록할 때는 그림과 적절한 수학적 표현을 사용하도록 권한다. 일반학생의 경우 수학

적 기호화가 어려운 경향이 있으므로, 수학적 아이디어에만 초점을 맞추어도 좋겠다. 하지만, 수학영재의 경우는 특성상 수학적 기호를 사용하여 표현하려는 경향이 많고, 영재들의 추상적인 사고를 기록하고 의사소통하기에는 일반 언어보다는 수학 기호에 접하도록 해야 하기 때문에 수학적으로 기호화하도록 권장한다.

해결 방법을 기록할 때는 범주에 따라 나누도록 안내하여 기록함으로써 각 해결 방법이 어떻게 다르고 어떻게 같으며, 세련된 방법은 무엇인지를 토의하면서 학생들이 판단할 수 있게 도와준다.

라. 학습한 것을 요약/정리하기

앞 단계에서 토의하고 기록한 여러 가지 해결 방법과 범주화 한 내용을 요약/정리한다. 특히, 학생들마다 또는 소집단 별로 범주화한 내용이 다를 수 있으므로, 조별로 또는 몇 명의 학생에게 학습 내용을 요약하도록 하는 것도 좋은 방법이다. 직사각형을 4배하는 문제의 경우 위에 제시한 예상 반응처럼 범주화해서 정리할 수 있지만, 학생들에게 해결방법을 비교하여 새로운 범주로 정리하게 해준다. 예를 들어, 변 이용, 내부의 점 이용, 각 이용, 합동 및 모눈 이용, 원 이용으로 범주를 나눌 수 있다[4].

(4) 평가

개별 학생의 해결 방법 기록 내용이나 소집단의 기록 내용은 좋은 수행평가의 자료로 활용된다. 예상 반응표를 보고 학생들의 반응을 유창성, 융통성, 독창성, 세련미에 따라 그 내용을 기록하거나 점수화하여 평가한다. 학생에게 범주를 만들도록 했다면 범주화한 기준과 함께, 그 기준에 따라 적절하게 분류하였는가도 평가한다. 수학영재들의 고차원적이고 메타인지적인 사고까지 평가할 수 있다.

Ⅳ. 결론

수학 영재들을 지도하려면 일반 학생들을 지도할 때보다 수학 내용적인 측면도 많이 알아야 하지만 효과적으로 지도하는 방법도 그에 못지 않게 중요하다. 현장에서 수학 영재를 지도할 때 일반 학생들과 구별되는 영재들을 위한 교수-학습 방법을 찾기보다 기존의 여러 교수-학습 방법을 익혀 영재들의 특성에 더 적절한 교수-학습 방법을 선택하고 이를 수학영재의 특성에 맞도록 적용하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 수학 영재의 교수-학습 방법으로 일반적인 교수-학습 방법 중 창의력을 개발하여 주는 수학 학습 방법을 영재들에게 적합하게 적용할 것을 제안하며 그 일례로 개방형 교수법을 발전적으로 적용하는 방법을 알아보았다. 다음과 같은 제언을 하며 연구를 끝맺고자 한다.

첫째, 개방형 교수법에서는 학생 반응의 다양성이 허용되어야 하며, 그 다양성은 수학적으로 의미있는 것이어야 한다. 대개의 수학교실에서는 학생들에게 여러 가지 방법을 찾아보라는 주문을 많이

---

4) 변은진(2001)에서 범주화한 내용을 참고함.

하지만, 그 방법 간의 수학적 의미와 차이점 등을 비교하고 정당화하는 활동이 결여된 경우가 많다. 그리고, 창의성 개발 학습 프로그램 중 퍼즐형의 과제를 다루며 수학적 심화 활동을 소홀히 하는 잘못을 저지르기도 한다. 개방형 교수법도 학생의 수준에 맞는 수학적 내용을 다루도록 계획하여 활용해야 할 것이다.

둘째, 개방형 교수법을 계획의 활용의 성패는 문제에 달려 있다고 해도 과언이 아닐 만큼 개방형 교수법에서는 문제가 중요하다. 학생들에게 흥미 있고 고등 수학적 사고를 자극하는 문제를 만들어야 하며, 개방형 문제의 활용 목적이나 학습목표를 분명히 하여 야 한다. 그리고, 수업 전에 문제에 대한 학생들의 예상반응을 충분히 예상하고 예상반응들을 범주화하여 수업에 임해야 내실 있는 수업이 이루어질 것이다. 특히 수학영재들의 수업을 위해서는 일반 학생들을 지도할 때보다 더 다양하고 폭넓은 수준(구체적인 수준에서 추상적인 수준까지)의 반응을 예상하여 다양한 시각으로 범주화하여 수업하여야 한다. 또한 다양한 반응과 범주화 뿐 아니라 학생들이 자신의 해결법을 (고등) 수학 내용과 관련짓도록 도움을 주어 수학적으로 발달시키려는 노력이 요구된다.

셋째, 수학 영재의 다양성을 감안한다면 교수-학습 방법도 다양해야 한다. 개방형 교수법 이외의 여타의 교수법에 대해서 영재들에게 적합한 방법인가, 그리고 어떻게 적용할 것인지를 구체적으로 생각해보아야 할 것이다. 그 접근법은 구체적인 사례 분석을 통하여 수학 교육에서 언급되는 교수-학습 방법을 수학 영재들에게 어떻게 적용할 것인가, 일반적인 영재 교수-방법을 수학 영재들에게 활용할 때는 어떻게 구현되어야 하는가의 탐색으로 나누어 생각할 수 있다. 두 가지 방향에서 수학 영재 교수-학습 방법을 연구하고 구체적인 예를 통하여 현장 교사들에게 도움을 주어야 수학 영재 교육이 발전할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김홍원 (2003). 영재 교수-학습 방법, 한국교육개발원 2003년도 영재교육 담당교원 심화연수 사이버 연수 자료, 한국교육개발원.

김홍원 · 김명숙 · 방승진 (1997). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(II) -검사제작편-, 한국교육개발원.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌 (1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(I) -기초연구편-, 한국교육개발원.

문성길 (2000). 개방형 교수법에 의한 수학지도가 문제해결력과 신념 형성에 미치는 효과, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

변은진 (2001). 개방형 문제를 활용한 평가가 수학적 창의력에 미치는 효과, 한국교원대학교 석사학위논문.

백선수 (2002). 창의력을 신장시키지 위한 개방형 문제의 활용 방안, 창의적 지식 생산자 양성을 위한 영재 교육 [초등수학편], 연수교재 TM 2002-24-1, pp.109-125, 교육인적자원부 · 한국교육개발원.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구, 서울대학교 박사학위논문.

_____ (2002). 수학 영재를 위한 교수 원리 및 방법의 적용에 대한 소고, 인천교육대학교 과학교육논총 **14**, pp.311-329.

정동권 (1996). 아동의 발전적 사고력을 기르기 위한 Open-ended Problem의 활용, 인천교육대학교 논문집 **29(2)**, pp.225-239.

정현철 (2003). 문제중심학습모형, 한국교육개발원 2003년도 영재교육 담당교원 심화연수 사이버연수 자료, 한국교육개발원.

조석희 (2002). 영재성의 개념 및 판별, 창의적 지식 생산자 양성을 위한 영재교육 [이론 · 전문직편] 연수교재 TM 2002-24, pp.10-27, 교육인적자원부 · 한국교육개발원.

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open-ended approach : A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*, The Univ. of Chicago Press.