韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 17집, 2003. 10. 77-94.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 17, Dec. 2003. 77-94.

소리와 음악을 통한 초월 함수의 학습과 교수[1)]

최 종 술 (인제대학교 대학원)
김 향 숙 (인제대학교)

본고에서는 함수 영역에서 학생들이 가장 배우가 어려워하는 삼각함수와 지수함수 및 로그함수를 대부분의 학생들이 아주 좋아하는 소리와 음악을 통한 새로운 학습과 교수 환경을 제공하고자 한다. 먼저, 소리와 음악을 통하여 학생들의 흥미를 유발시킨다. 두 번째로 초월함수의 성질을 듣고, 볼 수 있게 함으로써 학생들이 이를 쉽게 이해하고 기억할 수 있도록 하였다. 마지막으로 학생들로 하여금 초월함수를 사용하여 그들이 가장 좋아하는 음악을 직접 작곡해보게 함으로서 초월함수들의 실용성을 직접 경험해 보도록 하였다.

I. 서 론

컴퓨터나 계산기와 같은 테크놀로지의 광범위한 사용이 인류 활동의 모든 부분에 큰 영향을 미쳐왔다. 그리하여 학생들의 생각하는 방법 및 수학에 대한 기대도 또한 많이 변화하였다. 수학교사들은 이러한 시대적 변화에 맞추어서 학생들의 수학에 대한 흥미를 유발하고 이를 유지하기 위하여, 또 수학개념의 이해를 위한 더 나은 교수학습 환경을 개발하기 위하여 끝임 없는 노력을 기울여 왔다.

다른 한편으로 누구도 음악이 인류 역사를 통하여 사람들의 감정과 행동에 끼친 지대한 영향을 부인하지는 못할 것이다. 그러한 영향은 긍정적인 면과 부정적인 면이 모두 있었다. 그래서 많은 사회학자들은 음악의 부정적 영향, 특히 청소년에게 미치는 부정적 영향에 대하여 우려를 나타내었다. 최근에 테크놀로지의 광범위한 사용은 청소년에 대한 음악의 영향을 더욱 증대하였다. 그래서 우리가 음악을 수학의 학습에 효과적으로 이용할 수 만 있다면 그 영향은 아주 클 것이다.

본고에서는 함수 영역에서 학생들이 가장 배우기 어려워하는 삼각함수와 지수함수 및 로그함수를 학생들이 아주 좋아하는 소리와 음악을 통한 새로운 학습과 교수 환경을 제안한다. 이 새로운 교수학습 환경은 학생들의 흥미를 유발하고 초월함수의 실용성을 강조한다. 또 삼각함수와 지수함수로 작곡한 음악을 듣게 함으로써 수학과 음악의 오래된 공동 역사와 이의 관련 영역에 관심을 갖게 하며, 따라서 테크놀로지의 중요성과 수학의 아름다움을 인식할 수 있기를 기대한다.

1) 이 논문은 한국수학교육학회 시리즈 D <수학교육연구> 제7권 제3호 (통권 제15호)에 게재된 논문인 The Learning and Teaching of Transcendental Functions through Sound and Music을 번역한 것입니다.

II. 본 론

추상적인 수학개념들을 좀 더 쉽게 가르칠 수 있는 다양한 교수 학습 방법을 고안하는 것이 컴퓨터를 이용한 수학이 나아가는 주요 방향이다. 이러한 주류의 흐름에 맞추어서 소리와 음악을 초월함수를 가르치기 위하여 어떻게 사용할 수 있는지를 보이고자 한다.

1. 삼각함수의 그래프

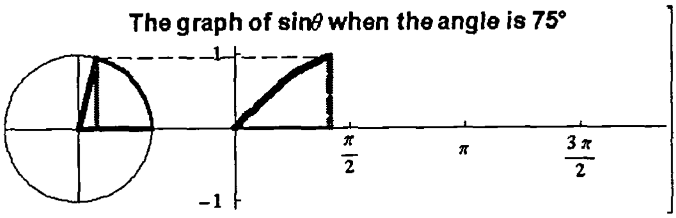
먼저, 삼각함수의 모양을 살펴보자. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수가 소리와 어떤 관계가 있는지 생각하며 그래프의 모양, 주기성, 진동수, 진폭에 대해 알아보자.

(1) 사인 곡선

각 θ의 변화에 따른 sine함수의 그래프를 그려보자(이 그래프를 위한 메스메티카 프로그램이 부록 [1]에 있다).

• 다음은 사인곡선이 그려지는 과정을 애니메이션을 통해 보여준다 .

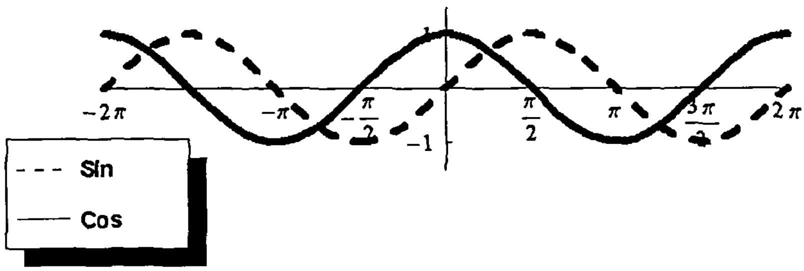
Do[SinPlot[θ], { θ, (π/180)*15, 2π, (π/180)*15}];



사인곡선은 주기가 2π인 주기 함수임을 보인다.

• 다음은 사인곡선과 코사인곡선을 동시에 그려서 보여준다.

```
Needs["Graphics`Legend`"];
Plot[{Sin[ θ],Cos[ θ]},{ θ,- −2π, 2π},
PlotStyle->{{Dashing[{0.02,0.03}], RGBColor[0,0,1], Thickness[0.01]}, {Hue[0.9],
 Thickness[0.01]}},DefaultFont->{"Times",14},
 PlotLegend->{FontForm["Sin",{"Arial-Bold",14}], FontForm["Cos",{"Arial-Bold",14}]},
 LegendSize->{0.5,0.3}, Ticks->{{ −2π, − π, − π/2 ,0, π/2, π, 3π/2, 2π},{-1,0,1}},
 AspectRatio->Automatic,ImageSize->500, PlotRange->{{ −2π, 2π},{-1.5,1.5}}];
```



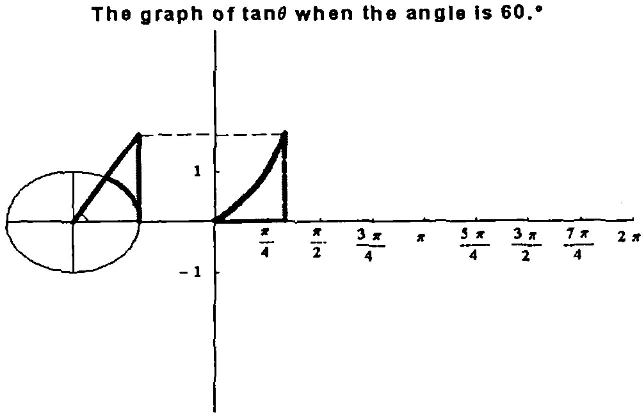
코사인곡선은 사인곡선의 평행이동이며, 따라서 역시 주기가 2π인 주기 함수임을 안다.

(2) 탄젠트 곡선

각의 변화에 따른 tangent함수의 그래프를 그려보자(이 그래프를 위한 메스메티카 프로그램은 부록 [2]에 있다).

• 다음은 탄젠트곡선이 그려지는 과정을 애니메이션을 통해 보여준다 .

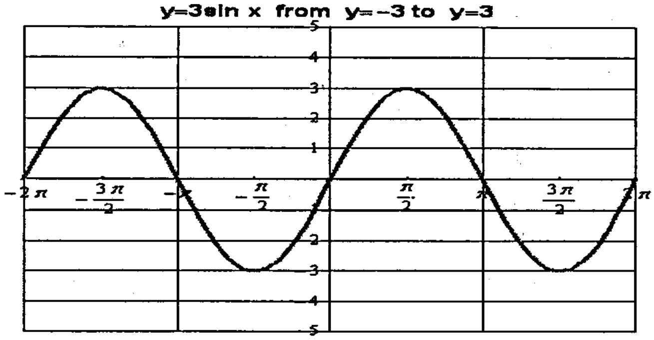
Do[TanPlot[θ],{ θ, (π/180)*15, 2 π, N[(π/180)*15]}]



탄젠트곡선은 주기가 π인 주기 함수임을 보인다.

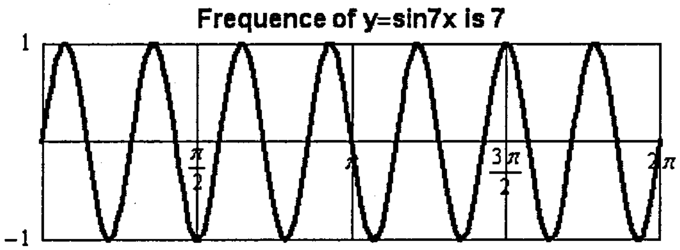
sine함수와 소리사이의 관계를 이해하기 위해서 소리의 진폭과 진동수에 관련된 두 함수를 그려보자. 즉, 임의의 실수 a, b에 대하여 $a\sin(x)$와 $\sin(bx)$를 그려보자.

a의 변화에 따른 $a\sin(x)$의 그래프, 즉 진폭이 변할 때 $\sin(x)$의 변화를 살펴보자(이 그래프를 위한 메스메티카 프로그램은 부록 [3]에 있다).



• b의 변화에 따른 $\sin(bx)$의 그래프, 즉 진동수가 변할 때 $\sin(x)$의 변화를 살펴보자.

Table[Plot[Sin[b x],{x, 0, 2π}, PlotStyle->{RGBColor[0,0,1], Thickness[0.01]},
PlotLabel->FontForm[" Frequence of y=sin"<>ToString[b]<> "x is "<>ToString[b]<>"" ,
{"Helvetica-Bold",16}],
Background->GrayLevel[1], DefaultFont->{"Times",14},
GridLines->{{0, π/2, π, 3π/2, 2π}, {-1,0,1}}, Ticks->{{0,p/2,p,3p/2,2p},{-1,1}},
AspectRatio->Automatic, ImageSize->500, PlotRange->{{0, 2π}, {-1,1}}];,{b,1,10,1}];



2. 소리

소리는 공기의 진동으로 생기는 현상이므로, 삼각함수들이 소리를 내는지에 대해 생각해보기로 하자.

위의 삼각함수들은 소리를 낼까요? 소리를 낸다면 그 소리는 어떤 변수들과 상관이 있을까요? 사인함수, 코사인함수 그리고 탄젠트 함수는 같은 소리를 낼까요? 음악에 관한 피타고라스 법칙을 들어 보셨나요? 지금부터 소리에 대해 살펴봅시다.

진폭과 진동수는 소리와 어떤 관계가 있는지 살펴보자.

(1) 진동수

진동수는 소리의크기, 소리의 음질, 소리의 높고 낮음 중 무엇과 상관이 있을까요?

• 다음은 진동수가 작으면 소리가 들리지 않음을 보여준다.

Play[Sin[8x], {x,0,1}];

• 청각가능한 소리의 진동수는 동물에 따라 다르다.사람이 청각가능한 소리는 220Hz~40000Hz로 알려져 있다.

Play [Sin[400x], {x,0,1}];

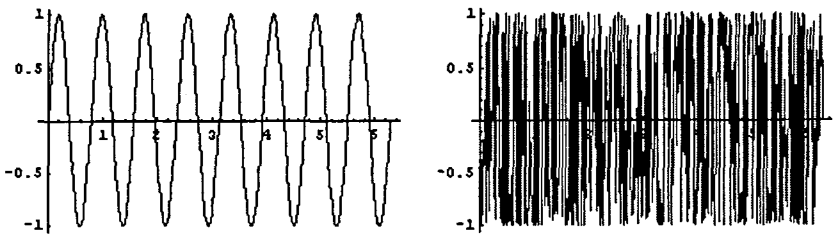
Play [Sin[800x], {x,0,1}];

• 위의 두 함수를 그래프로 확인하여 진동수가 다름을 확인해 보자.

s2=Plot[Sin[8x],{x,0,2p}, PlotStyle->{RGBColor[0,0,1]}, ImageSize->400, DisplayFunction->Identity];

s4=Plot[Sin[800x], {x, 0, 2π}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0]}, ImageSize->400, DisplayFunction->Identity];

Show[GraphicsArray[{s2, s4}], ImageSize->550, DisplayFunction->$DisplayFunction];



• 진동수가 다른 두 sine함수의 소리를 비교해 보자. 각 각 들어보자.

Play[Sin[700x],{x,0,1}];

Play[Sin[1400x] ,{x,0,1}];

• 시간간격을 두고 들어보면 확실히 소리의 높이가 다름을 알 수 있다.

Play[Which[0<x<1,Sin[700x] ,
  1<x<2,Sin[1400(x-1)]], {x,0,2}];

진동수는 소리의 높고 낮음을 결정짓는다. 즉, 진동수가 클수록 높은 소리가 나게된다. 피타고라스는 "하프의 현의 길이가 짧을수록 진동수는 커지고, 현의 진동수가 클수록 높은 음이 난다"는 사실을 발견했다. 이것이 음악에서의 피타고라스 법칙이다.

(2) 음질

소리의 음질은 wave의 모양과 관계가 있다. wave의 모양이 부드러울수록 음질이 좋아지지만, 모양이 부드럽지 못하게 되면 될수록 소음(noise)에 가까운 소리를 낸다는 것을 알 수 있다. 즉, 모양이 예쁜 곡선은 소리도 아름답다는 것을 확인해 보자.

삼각함수(sine, cosine, tangent) 각각의 소리를 비교하여 들어보자.

· 평행이동을 하면 겹치게 되는 sine, cosine함수는 모양이 같지만, tangent 함수는 두 함수와 모양이 다르다. 이러한 사실을 소리의 음질을 통하여 확인해보자.

Play [Sin[1500x], {x,0,1}];

· $\cos[1500x]$는 $\sin[1500x]$와 같은 소리를 낸다.

Play [Cos[1500x], {x,0,1}];

· 연속적으로 들어보면 확실히 소리가 같음을 알 수 있다.

Play[Which[0<x<1, Sin[1500x], 1<x<2, Cos[1500(x-1)]], {x,0,2}];

· sine함수를 이용한 다른 소리를 들어보자.

Play[Sin[20 t] Sin[23 t] Sin[2000 t], {t, 0, 2.05}];

· $\tan[1500x]$은 잡음을 낸다.

Play[Tan[1500x], {x,0,1}];

· $\sec[1500x]$은 잡음을 낸다.

Play [Tan[1500x], {x,0,1}];

sine, cosine함수가 아름다운 소리를 낸다는 사실을 음계를 들어서 확인해 보자.

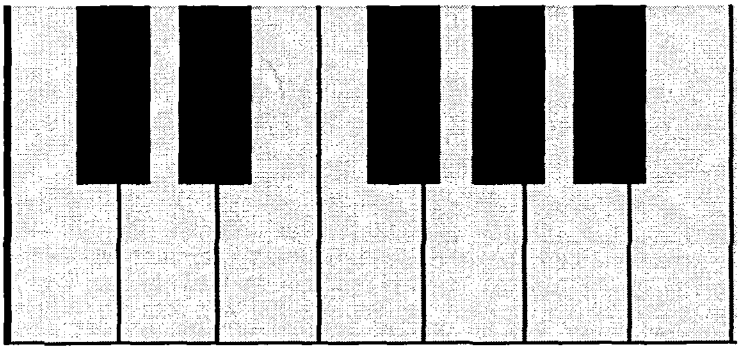
· sine 함수를 사용한 도, 미, 솔의 소리를 들어보자.

$$\text{Play}\Big[\text{Which}\Big[0 < x < 1,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\,x\,2^{\frac{0}{12}}\right]\text{^}2}{e^{x\,2^{\frac{0}{12}}}},$$

$$1 < x < 2,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\,(x-1)\,2^{\frac{4}{12}}\right]\text{^}2}{e^{(x-1)\,2^{\frac{4}{12}}}},$$

$$2 < x < 3,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\,(x-2)\,2^{\frac{7}{12}}\right]\text{^}2}{e^{(x-2)\,2^{\frac{7}{12}}}}\Big],\quad \{x, 0, 3\}\Big];$$

피아노건반



도 레 미 파 솔 라 시 도2 : 음계

$2^{\frac{0}{12}}=1$ $2^{\frac{2}{12}}$ $2^{\frac{4}{12}}$ $2^{\frac{5}{12}}$ $2^{\frac{7}{12}}$ $2^{\frac{9}{12}}$ $2^{\frac{11}{12}}$ 2 : 진동수의 비

피타고라스 12음계는 위 7음계에다 검은 건반까지 넣은 12음계를 말하며, 각 음계간 진동수의 비를 $\sqrt[12]{2}$ 정하였다. 즉 진동수의 비는 초항이 1이고 공비가 $\sqrt[12]{2}$ 인 등비수열이다.

- cosine 함수를 사용한 도, 미, 솔의 소리를 들어보자.

$$\mathrm{Play}\Big[\mathrm{Which}\Big[0<x<1,\ \frac{\mathrm{Cos}\big[1000\, x\, 2^{\frac{0}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{x\, 2^{\frac{0}{12}}}},\quad 1<x<2,\ \frac{\mathrm{Cos}\big[1000\,(x-1)\, 2^{\frac{4}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{(x-1)\, 2^{\frac{4}{12}}}},\quad 2<x<3,\ \frac{\mathrm{Cos}\big[1000\,(x-2)\, 2^{\frac{7}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{(x-2)\, 2^{\frac{7}{12}}}}\Big],\ \{x,0,3\}\Big];$$

- tangent 함수를 사용한 도,미,솔의 소리를 들어보자.

$$\mathrm{Play}\Big[\mathrm{Which}\Big[0<x<1,\ \frac{\mathrm{Tan}\big[1000\, x\, 2^{\frac{0}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{x\, 2^{\frac{0}{12}}}},\quad 1<x<2,\ \frac{\mathrm{Tan}\big[1000\,(x-1)\, 2^{\frac{4}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{(x-1)\, 2^{\frac{4}{12}}}},\quad 2<x<3,\ \frac{\mathrm{Tan}\big[1000\,(x-2)\, 2^{\frac{7}{12}}\big]\,\hat{}\,2}{e^{(x-2)\, 2^{\frac{7}{12}}}}\Big],\ \{x,0,3\}\Big];$$

삼각함수들의 합성함수의 소리는 어떨까?

• 먼저, 함수를 입력받아 그 함수를 n번 합성한 후의 그래프를 확인해 보자.

```
f[x_]=Input["f(x)="]
g[x_,n_]:=Plot[Nest[f,x,n], {x,-12,12}, PlotRange->{{-11,11}, {-1.5,1.5}},
    PlotStyle->{Hue[0.55], Thickness[0.009]},
    FontSize->16, FontColor->Hue[0.6]], {1,1.3}, {-1,0}]],
g[x,10];
Table[g[x,n], {n,2,20,2}];
```

• $\sin(400x)$을 1000번 합성한 함수와 $\sin(400x)$의 소리를 비교해 보자.

```
Play[Which[0 < x < 1, Nest[Sin, 400 x 2^(4/12), 1000],
        1 < x < 2, Sin[400 (x - 1) 2^(4/12)] ], {x, 0, 2}];
```

위의 두 소리로 부터 소리는 진폭과 어떤 관계가 있는지에 대한 의문을 가져보고, 그것을 다음절에서 확인해 보자.

(3) 소리의 세기

진폭이 다른 두 sine함수의 소리를 들어보자.

• 따로따로 들으면 그 차이를 잘 알 수 없다.

```
Play[Sin[1000 x 2^(3/12)] Sin[1000 x 2^(3/12)], {x, 0, 1}];
Play[8 Sin[1000 x 2^(3/12)] Sin[1000 x 2^(3/12)], {x, 0, 1}];
```

• 연속적으로 들어보면 확실히 소리의 세기가 다름을 알 수 있다.

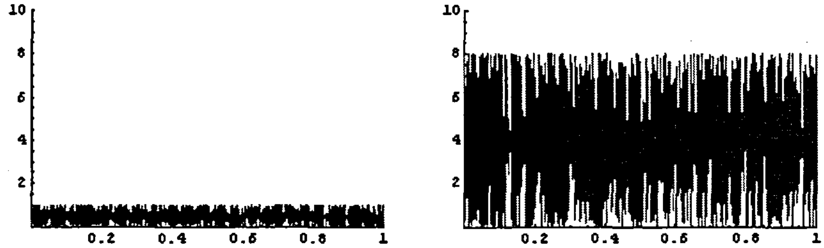
```
Play[Which[0 < x < 1, Sin[1000 x 2^(3/12)] Sin[1000 x 2^(3/12)],
1 < x < 2, 8 Sin[1000 (x - 1) 2^(3/12)] Sin[1000 (x - 1) 2^(3/12)] ], {x, 0, 2}];
```

소리의 세기는 진폭에 비례한다. 즉, 진폭이 클수록 소리의 세기가 커지게 된다.

• 진폭이 다른 두 함수를 그래프를 이용하여 확인해 보자.

```
f2 = Plot[Sin[1000 x 2^(3/12)] Sin[1000 x 2^(3/12)], {x, 0, 1}, PlotStyle → {RGBColor[0.3, 0.7, 0]},
ImageSize → 400, PlotRange → {{0, 1}, {0, 10}}, DisplayFunction → Identity];
f4 = Plot[8 Sin[1000 (x - 1) 2^(3/12)] Sin[1000 (x - 1) 2^(3/12)] , {x, 0, 1},
PlotStyle → {RGBColor[0.3, 0.7, 0]}, ImageSize → 400, PlotRange → {{0, 1}, {0, 10}},
DisplayFunction → Identity];
```

```
Show[GraphicsArray[{f2, f4}], ImageSize → 550, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



삼각함수들에서 진동수, 진폭, 그래프의 모양이 각 각 소리의 높고 낮음, 소리의 세기, 음질을 결정함을 알았다. 위의 사실을 바탕으로 지금부터는 지수함수와 로그함수의 그래프의 모양을 소리를 이용하여 확인해 보고, 나아가 두 함수의 역함수관계를 밑의 변화에 따른 애니메이션으로 확인해 보고자 한다.

(4) 소리를 통한 지수 로그 함수 학습

음악과 수학은 오래 전부터 공동역사를 가져왔으며, 수학의 많은 이론들이 음악에 적용되어 음악의 발전에 기여를 해왔으나, 대부분의 수학자들은 음악이 수학이라는 사실에 생소해한다. 즉 지금까지는 수학의 실용성에 대해 수학자들 자신은 자신들의 영역이 아니라고 생각해 온 것이 사실이다. 그러나 요즈음은 수학이 수학 그 자체만으로 보다는 실용성이 더해질 때 현장교육에서 더 설득력이 있음을 많은 사람들이 실감하고 있는 현실이므로, 수학교실을 떠나고 있는 많은 학생들에게 수학의 실용성, 동기유발 및 수학의 아름다움을 주기 위해 학생들이 가장 어려워하는 초월함수, 즉 삼각함수, 지수함수, 로그함수를 음악을 통해 지도하고자 한다.

먼저, 소리를 통해 지수함수와 로그함수의 그래프의 모양을 추측하게 한다.

1) 지수함수와 로그함수를 이용한 소리비교

지수함수와 로그함수를 사용한 "도"와 사용하지 않은 "도"의 소리를 비교해 보자.

먼저 지수함수를 사용한 "도"와 사용하지 않은 "도"의 소리를 비교해 보자.

• 도의 소리를 들어보자.

$$\text{Play}\left[\text{Sin}\left[1000\,x\,2^{\frac{0}{12}}\right]\text{^}2\ ,\ \{x,\,0,\,1\}\right];$$

• 분모를 $\exp(x)$ $(0 \le x \le 1)$로 나눈 도의 소리를 들어보자.

$$\text{Play}\left[\frac{\text{Sin}\left[1000\,x\,2^{\frac{0}{12}}\right]\text{^}2}{e^{x}}\ ,\ \{x,\,0,\,1\}\right];$$

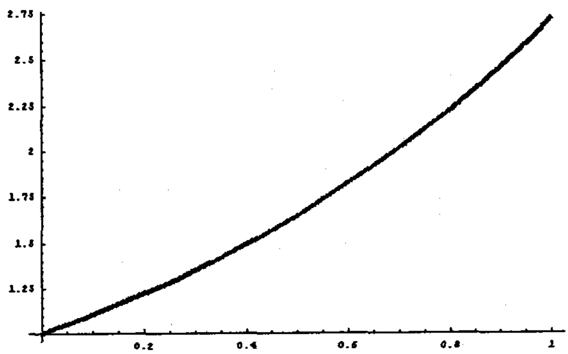
• 분모를 $|\exp(x)|$ $(0 \le x \le 1)$로 나눈 도의 소리를 들어보자.

$$\texttt{Play}\left[\frac{\texttt{Sin}\left[1000 \times 2^{\frac{0}{12}}\right]\texttt{\^{}}2}{e^{x}}, \{x, 0, 1\}\right];$$

지수함수를 사용한 "도"와 사용하지 않은 "도"의 소리를 비교해 볼 때, 지수함수를 분모로 나누면 소리가 작아짐을 알 수 있다. 즉 x가 변할 때 $\exp(x)$ $(0 \le x \le 1)$는 함수값이 커지는 함수임을 알 수 있다. 따라서 함수 $\exp(x)$로써 주어진 sine 함수를 나누면 소리가 작아지는 효과음을 만들 수 있다. 그러므로 함수 $\exp(x)$로써 주어진 sine 함수를 나눈 소리는 피아노 건반을 두드리고 손을 떼면 그 여운이 남는 듯한 음을 만든다.

• 위 사실을 $\exp(x)$ $(0 \le x \le 1)$의 그래프로 확인해 보자.

```
Plot[ⅇ^x, {x, 0, 1}, PlotStyle → {Hue[0.55], Thickness[0.009]}, ImageSize → 500];
```



• 시간을 더 늘려, 분모를 $\exp(x)$ $(0 \le x \le 3)$로 나눈 도의 소리를 들어보자.

$$\texttt{Play}\left[\frac{\texttt{Sin}\left[1000 \times 2^{\frac{0}{12}}\right]\texttt{\^{}}2}{e^{x}}, \{x, 0, 3\}\right];$$

시간을 늘리면 함수 exp(x)로써 주어진 sine 함수를 나눈 소리는 피아노 건반을 두드리고 손을 떼면 그 여운이 남는 듯한 더 확실한 효과음을 낸다는 것을 확인할 수 있다.

다음으로 지수함수의 역함수인 로그함수를 사용한 "도"와 사용하지 않은 "도"의 소리를 비교해 보자.

• 정의역을 [0, 2]로 하는 자연대수 $\log(x)$로 나눈 도의 소리를 들어보자.

$$\texttt{Play}\left[\frac{\texttt{Sin}\left[1000 \times 2^{\frac{0}{12}}\right]\texttt{\^{}}2}{\texttt{Log}[x]}, \{x, 0, 2\}\right];$$

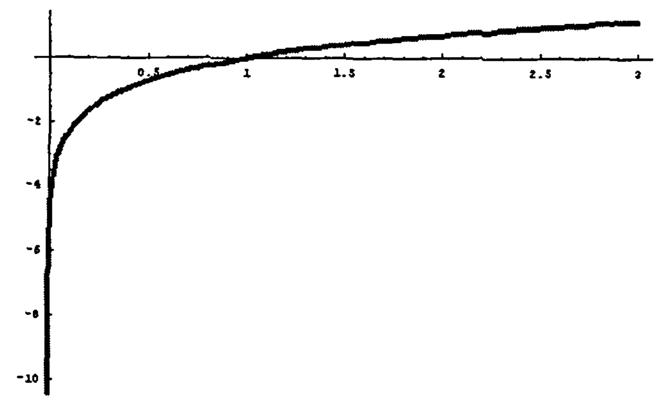
• 정의역을 [0, 2]로 하는 $|\log(x)|$로 나눈 도의 소리를 들어보자.

$$\mathrm{Play}\left[\frac{\mathrm{Sin}\left[1000\, x\, 2^{\frac{8}{12}}\right]\,\hat{}\,2}{\mathrm{Log}[x]},\ \{x,\ 0,\ 2\}\right];$$

정의역이 [0, 2]인 로그함수를 분모로 나누면 소리가 커졌다가 다시 작아짐을 알 수 있다. 즉 $x\,(0<x\leq 2)$가 변할 때 $\log(x)$는 함수값의 절대값이 작아졌다가 다시 커지는 함수임을 예측할 수 있다. 따라서 함수 $\log(x)$ $(0<x\leq 2)$로써 주어진 sine 함수를 나누면 소리가 커졌다가 다시 작아는 효과음을 만들 수 있다.

• $\log(x)$ $(0<x\leq 3)$의 그래프

Plot[Log[x],{x,0,3}, PlotStyle->{Hue[0.9], Thickness[0.009]}, ImageSize->500];



위에서 살펴본 지수함수와 로그함수의 그래프로부터 두 함수의 관계를 추측하도록 격려한다. 위의 두 함수는 밑이 e인 로그함수 $\log_e x$와 지수함수 e^x임을 이야기하고, 밑의 a가 변할 때의 지수함수 a^x와 로그함수 $\log_a x$의 관계를 예상해 볼 수 있도록 유도한다. 지금부터 밑이 a(임의의 실수)인 지수함수 a^x와 로그함수 $\log_a x$의 관계에 대해 알아보자.

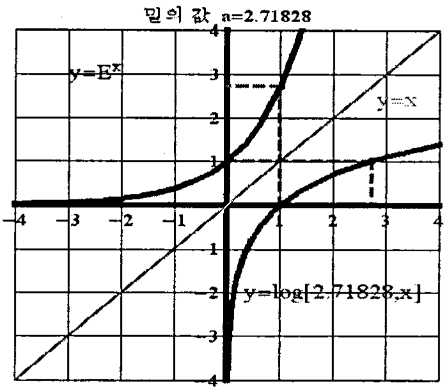
2) 지수함수와 로그함수 사이의 관계

$\log(x)$와 $\exp(x)$의 위치관계를 표현하는 프로그램를 이용하자(이것을 위한 메스메티카 프로그램이 부록의 프로그램[4]에 있다).

소리를 통하여 알아본 e^x와 $\log_e x$의 역함수 관계를 확인해 보자.

• k[e]를 얻기 위하여 프로그램[4]를 이용하자.

k[e]



정의역이 $0<x\leq 1$인 경우와 $1\leq x$인 경우 각각에 대하여 두 함수사이의 관계를 조사할 필요가 있을 것이다.

· 다음은 밑이 1보다 큰 경우의 a^x와 $\log_a x$의 관계를 보여준다($a=2$인 경우).
k[2]
· 다음은 밑이 1보다 큰 경우의 a^x와 $\log_a x$의 관계를 에니메이션으로 보여준다(밑이 1.1에서 4까지 변할 때).
Table[k[i], {i, 1.1, 4, 0.2}];
· 밑이 1보다 작은 경우의 a^x와 $\log_a x$의 관계를 보기 위하여 다음을 사용한다(밑이 $a=0.5$인 경우).
k[0.5]
· 다음은 밑이 1보다 작은 경우의 a^x와 $\log_a x$의 관계를 에니메이션으로 보여준다(밑이 0.1에서 0.9까지 변할 때).
Table[k[i], {i, 0.1, 0.9, 0.1}];
· 위의 경우들의 합성 : 밑이 0.1에서 3.1까지 변할 때 a^x와 $\log_a x$의 관계의 에니메이션을 다음 프로그램으로 볼 수 있다.
Table[k[i], {i, 0.1, 3.1, 0.2}];

3. 음악

이 절에서는 초월함수를 이용하여, 학생들이 가장 좋아하는 곡을 작곡해서 들어보게 함으로써, 수학에 대한 호기심과 실용성을 느끼게 한다. 송아지를 작곡해서 들어보자.

메스메티카를 사용하여 sine 함수를 가지고 음악을 작곡하였다(이 곡을 위한 메스메티카 프로그램이 부록 프로그램[5]에 있다).

요즈음 학생들은 잘 때도 공부할 때도 음악을 듣는 경우가 많은 것 같다. 그들이 좋아하는 음악이 수많은 좌표들로 이루어진 수학적 데이터라는 사실을 확인해 보게 함으로써 음악도 수학이라는 사실을 알게 한다. 클래식 음악과 비트 음악이 수학적, 통계적 의미에서 어떻게 다른 데이터로 구성되었기에 다른 음악을 만드는 지에 대해 의문을 가져보게 함으로써 우리의 실생활과 수학이 밀접하게 연결되어 있음을 알게 한다.

III. 결론 및 제안

본고에서는 함수 영역에서 학생들이 가장 배우기 어려워하는 삼각함수와 지수함수 및 로그함수를 학생들이 아주 좋아하는 소리와 음악을 통한 새로운 학습과 교수 환경을 만들려고 노력하였다. 비록 이 방법이 초월함수들의 시작에서부터 응용에 이르기까지 모든 영역을 다 포함하지는 않지만, 우리는 이 새로운 학습 환경은 수학의 추상성, 어려움 및 실용성에 대한 이해의 부족으로 인하여 수학에 흥미를 상실하였거나 수학을 공부할 동기를 가지지 못한 학생들에게 도움이 된다고 믿는다. 첫째 대부분의 학생이 소리와 음악을 좋아함으로 이것이 학생들의 흥미를 유발할 것으로 기대한다. 둘째로 학생들이 초월함수의 성질들을 듣고 보게 함으로서 이들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 학생들이 가장 좋아하는 음악을 초월함수를 사용하여 작곡해보게 함으로써 초월함수들의 실용성을 경험해 볼 수 있게 하였다. 이것은 초월함수에 대한 흥미를 지속시키는데 도움이 될 것으로 믿는다. 따라서 이러한 시도가 수학 전 분야에 대한 학생들의 흥미와 태도를 개선시키는데 도움이 되기를 바란다.

수학에 대한 학생들의 개선된 흥미와 태도를 지속시키기 위해서는 그들의 실용성에 대한 경험과 흥미유발이 단 한번에 그쳐서는 안된다. 따라서 개선된 흥미를 유지시키기 위한 노력을 계속하여야 한다. 음악이 청소년에게 가장 영향력이 큰 것들 중 하나가 분명하므로 수학 교수학습에서 소리와 음악을 활용하는 분야에 대한 추가적인 연구가 필요하다고 믿는다.

참 고 문 헌

김향숙·김태완·김영미·최종술 (2003). 소리와 음악을 통한 초원함수의 지도, 수학교육학연구발표대회 논문집 2003하계, pp 611 - 637

Wolfram (2000). *Mathematica(4th ed.)*, Cambridge University Press.

http://mttc.inje.ac.kr

http://socas.inje.ac.kr/hskim

부록(본문에서 사용된 Mathematica 프로그램들)

[1] 프로그램[1]

```
SinPlot[ θ_]:= Module[{lns},
    lns={{Thickness[0.001],Line[{{ −π +1,1},{ −π +1,-1}}]},
        {Thickness[0.008],Line[{{ −π +1,0},{ −π +2,0}}]},
        {Thickness[0.008],Line[{{ −π +1,0},{ −π +1+Cos[ θ],Sin[ θ]}}]},
        {Thickness[0.008],Hue[0.4],Line[{{ −π +1+Cos[ θ],0},{ −π +1+Cos[ θ],Sin[ θ]}}]},
        {Dashing[{0.02,0.01}], {Thickness[0.001], Line[{{ −π +1+Cos[ θ], Sin[ θ]},
            { θ,Sin[ θ]}}]}},
        {Thickness[0.01],Hue[0.4],Line[{{ θ,Sin[ θ]},{ θ,0}}]}},
        {Thickness[0.005],Hue[0.7],Line[{{0,0},{ θ,0}}]}};
    cls={Thickness[0.001],Circle[{ −π +1,0},1],
      {Thickness[0.005],Hue[0.7],Circle[{ −π +1,0},1,{0, θ}]},
        Circle[{ −π +1,0},1.0,{0,Mod[ θ, 2π]}]}];
    Plot[Sin[t],{t, 0, θ}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],Thickness[0.01]},
        PlotLabel->FontForm["각이 "<>ToString[ θ 180/p]<>"° 일 때의 sin θ의 그림 ",
        {"Helvetica-Bold",16}], Background->GrayLevel[1],
        Epilog->{cls,lns}, DefaultFont->{"Times",14},
        Ticks->{{0, π/2,  π,  3π/2,  2π},{-1,0,1}},
        AspectRatio->Automatic,ImageSize->600,
        PlotRange->{{ −π,  2π}, {-1.1, 1.1}}];];
```

[2] 프로그램[2]

```
TanPlot[ θ_]:= Module[{lns},
    lns={{Thickness[0.001],Line[{{ −π +1, 1},{ −π +1, -1}}]},
        {Thickness[0.008],Line[{{ −π +1, 0},{ −π +1+1, Tan[q]}}],
        Line[{{ −π +1, 0}, { −π +1+Cos[ θ], Sin[ θ]}}]},
        {Thickness[0.008], Hue[0.4], Line[{{ −π +1+1, 0},{ −π +1+1, Tan[ θ]}}]},
        {Dashing[{0.02,0.01}],
            {Thickness[0.001], Line[{{ −π +1+1, Tan[ θ]}, { θ,Tan[ θ]}}]}},
            {Thickness[0.008], Hue[0.4], Line[{{ θ,Tan[ θ]},{ θ,0}}]}},
            {Thickness[0.005],Hue[0.7],Line[{{0,0},{ θ,0}}]}};
```

```
cls={Thickness[0.001],Circle[{ −π+1,0},1], Circle[{ −π+1,0},0.2,{0,Mod[ θ, 2θ]}],
    {Thickness[0.005],Hue[0.7],Circle[{ −π+1, 0},1,{0, θ}]}};
Plot[Tan[t],{t,0, θ}, PlotStyle->{RGBColor[1,0,0],Thickness[0.01]},
    PlotLabel->FontForm["각이 "<>ToString[ θ 180/ π]<>"° 일 때의 tan θ의 그림 ",
    {"Helvetica-Bold",16}],Background->GrayLevel[1],
    Epilog->{cls,lns},DefaultFont->{"Times",14},
    Ticks->{{0, π/4,  π/2,  3π/4,  π,  5π/4,  3π/2,  7π/4,  2π}, {-1,0,1}},
    AspectRatio->Automatic, ImageSize->450,
    PlotRange->{{ −π,  2π},{-3.8, 3.8}}];];
```

[3] 프로그램 [3]

```
Table[Plot[aSin[x],{x, −2π, 2π}, PlotStyle->{RGBColor[0,1,0], Thickness[0.01]},
    PlotLabel->FontForm["y=" <>ToString[a]<>"sin x  from  y="<>ToString[-a]<>
    " to  y="<> ToString[a]<>"", {"Helvetica-Bold",16}], Background->GrayLevel[1],
    DefaultFont->{"Times",14},
    Ticks->{{ −2π, −3π/2, −π, −π/2, 0,  π/2,  π,  3π/2,  2π},
      {-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}},
    GridLines->{{ −2π,  −π, 0,  π,  2π}, {-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}},
    AspectRatio->Automatic, ImageSize->430, PlotRange->{{ −2π,  2π}, {-5,5}}];,{a,1,5,1}];
```

[4] 프로그램 [4]

```
Clear[k, a1];
k[a1_] := Module[{},
lns = {{Thickness[0.007], Hue[0.1], Line[{{-4, -4}, {4, 4}}]},
{Thickness[0.01], Hue[0.3], Dashing[{0.02, 0.02}],
If[a1 > 1, Line[{{1, a1^1}, {1, 0}}], Line[{{-1, a1^-1}, {-1, 0}}]]},
{Thickness[0.01], Hue[0.3], Dashing[{0.02, 0.02}],
If[a1 > 1, Line[{{1, a1^1}, {0, a1^1}}], Line[{{-1, a1^-1}, {0, a1^-1}}]]},
{Thickness[0.01], Hue[0.33], Dashing[{0.02, 0.02}],
If[a1 > 1, Line[{{a1, 1}, {a1, 0}}], Line[{{a1^-1, -1}, {0, -1}}]]},
{Thickness[0.01], Hue[0.33], Dashing[{0.02, 0.02}],
If[a1 > 1, Line[{{a1, 1}, {0, 1}}], Line[{{a1^-1, -1}, {a1^-1, 0}}]]}};
pts = {{PointSize[0.02], Hue[0], Point[{0, 1}]},
```

```
{PointSize[0.02], Hue[0], Point[{1, 0}]},
{PointSize[0.02], Hue[0], If[a1 > 1, Point[{1, a1^1}], Point[{-1, a1^-1}]]},
{PointSize[0.02], Hue[0], If[a1 > 1, Point[{a1, 1}], Point[{a1^-1, -1}]]}};
Plot[{a1^x, Log[a1, x]}, {x, -4, 4},
AspectRatio → Automatic, GridLines → Automatic,
PlotStyle → {{Thickness[0.015], Hue[0.7]},
{Thickness[0.015], Hue[0.9]}},
AxesStyle → {Thickness[0.015]},
Epilog → {lns, pts},
PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}}, ImageSize → 450,
Prolog → {{Text[StyleForm[y= <> ToString[a1] <> ^x,
FontSize → 24, FontColor → Hue[.7]], {-2.5, 3}]},
{Text[StyleForm[y=log[ <> ToString[N[a1]] <> ,x],
FontSize → 24, FontColor → Hue[.9]], {2, -2}]},
{Text[StyleForm[y=x, FontSize → 24, FontColor → Hue[.1]], {3.2, 2.4}]}},
DefaultFont → {Times, 20},
PlotLabel → 밑의 값  a= <> ToString[N[a1]]];]
```

[5] 프로그램 [5]

$$\text{Play}\Big[\text{Which}\Big[0 < x < 0.5,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\, x\, 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{x\, 2^{\frac{3}{12}}}}\ \text{Sin}\left[1000\, x\, 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$0.5 < x < 0.75,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\ (x-0.5)\ 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{(x-0.5)\ 2^{\frac{3}{12}}}}\ \text{Sin}\left[1000\ (x-0.5)\ 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$0.75 < x < 1,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\ (x-0.75)\ 2^{\frac{5}{12}}\right]}{e^{(x-0.75)\ 2^{\frac{5}{12}}}}\ \text{Sin}\left[1000\ (x-0.75)\ 2^{\frac{5}{12}}\right],$$

$$1 < x < 2,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\ (x-1)\ 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{(x-1)\ 2^{\frac{3}{12}}}}\ \text{Sin}\left[1000\ (x-1)\ 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$2 < x < 2.5,\ \frac{\text{Sin}\left[1000\ (x-2)\ 2^{\frac{0}{12}}\right]}{e^{(x-2)\ 2^{\frac{0}{12}}}}\ \text{Sin}\left[1000\ (x-2)\ 2^{\frac{0}{12}}\right],$$

$$2.5 < x < 2.75,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-2.5)\ 2^{\frac{0}{12}}\right]}{e^{(x-2.5)\ 2^{\frac{0}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-2.5)\ 2^{\frac{0}{12}}\right],$$

$$2.75 < x < 3,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-2.75)\ 2^{\frac{1}{12}}\right]}{e^{(x-2.75)\ 2^{\frac{1}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-2.75)\ 2^{\frac{1}{12}}\right],$$

$$3 < x < 4,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-3)\ 2^{\frac{0}{12}}\right]}{e^{(x-3)\ 2^{\frac{0}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-3)\ 2^{\frac{0}{12}}\right],$$

$$4 < x < 4.75,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-4)\ 2^{\frac{-2}{12}}\right]}{e^{(x-4)\ 2^{\frac{-2}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-4)\ 2^{\frac{-2}{12}}\right],$$

$$4.75 < x < 5,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-4.75)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]}{e^{(x-4.75)\ 2^{\frac{-4}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-4.75)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right],$$

$$5 < x < 5.5,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-5)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right]}{e^{(x-5)\ 2^{\frac{-7}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-5)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right],$$

$$5.5 < x < 6,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-5.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]}{e^{(x-5.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-5.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right],$$

$$6 < x < 8,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-6)\ 2^{\frac{-9}{12}}\right]}{e^{(x-6)\ 2^{\frac{-9}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-6)\ 2^{\frac{-9}{12}}\right],$$

$$8 < x < 8.5,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-8)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right]}{e^{(x-8)\ 2^{\frac{-7}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-8)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right],$$

$$8.5 < x < 9,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-8.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]}{e^{(x-8.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-8.5)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right],$$

$$9 < x < 9.5,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-9)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right]}{e^{(x-9)\ 2^{\frac{-7}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-9)\ 2^{\frac{-7}{12}}\right],$$

$$9.5 < x < 10,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-9.5)\ 2^{\frac{-9}{12}}\right]}{e^{(x-9.5)\ 2^{\frac{-9}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-9.5)\ 2^{\frac{-9}{12}}\right],$$

$$10 < x < 10.5,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-10)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]}{e^{(x-10)\ 2^{\frac{-4}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-10)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right],$$

$$10.5 < x < 11,\ \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-10.5)\ 2^{\frac{0}{12}}\right]}{e^{(x-10.5)\ 2^{\frac{0}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-10.5)\ 2^{\frac{0}{12}}\right],$$

$$11 < x < 12, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-11)\ 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{(x-11)\ 2^{\frac{3}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-11)\ 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$12 < x < 12.5, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12)\ 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{(x-12)\ 2^{\frac{3}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12)\ 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$12.5 < x < 12.75, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12.5)\ 2^{\frac{5}{12}}\right]}{e^{(x-12.5)\ 2^{\frac{5}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12.5)\ 2^{\frac{5}{12}}\right],$$

$$12.75 < x < 13, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12.75)\ 2^{\frac{3}{12}}\right]}{e^{(x-12.75)\ 2^{\frac{3}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-12.75)\ 2^{\frac{3}{12}}\right],$$

$$13 < x < 13.5, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-13)\ 2^{\frac{0}{12}}\right]}{e^{(x-13)\ 2^{\frac{0}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-13)\ 2^{\frac{0}{12}}\right],$$

$$13.5 < x < 14, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-13.5)\ 2^{\frac{-2}{12}}\right]}{e^{(x-13.5)\ 2^{\frac{-2}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-13.5)\ 2^{\frac{-2}{12}}\right],$$

$$14 < x < 16, \; \frac{\mathrm{Sin}\left[1000\ (x-14)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]}{e^{(x-14)\ 2^{\frac{-4}{12}}}}\ \mathrm{Sin}\left[1000\ (x-14)\ 2^{\frac{-4}{12}}\right]\Big],\ \{x, 0, 16\}];$$