韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 261-271.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 261-271.

# GSP4를 이용한 이차곡선과 Cycloid에 관한 지도 방안

김 부 윤 (부산대학교)
이 영 숙 (부산대학교)
김 현 구 (동래고등학교)

## I. 서 론

국내에 보급되어 있는 많은 수학교육용의 소프트웨어 중에서 GSP (The Geometer's Sketch Pad)는 수학교사가 가장 많이 사용하고 있는 프로그램 중의 하나라고 할 수 있다. 그러나 기존의 버전까지는 윈도우(Window)용 프로그램이라고 하기에는 많은 결함을 가지고 있었던 것도 사실이다. 예를 들면, 색상의 적용에 있어서 최대 20색이라는 한계를 가지고 있었으며, 파일 이름도 영어 8자 혹은 한글 4자(8bite) 범위 내에서 작성해야만 하는 애로점을 본질적으로 가지고 있었다. 이러한 많은 결함들을 보완하고 새로운 기능들이 추가된 GSP 4.0이 이번에 개발되었다. 새로운 기능 중에서 가장 특징적인 것은 애니메이션 실행시 도형의 속도조절이 가능하다는 점이다. 기존의 GSP에서는 애니메이션 실행시 랜덤하게 도형이 움직여 불가능했던 실연이 시간조절 기능이 추가됨으로서 가능하게 되었다. 본 연구는 GSP 4.0의 애니메이션 실행시 속도조절 기능을 활용하여 「움직이는 기하(Dynamic Geometry)」[1]로서의 교재개발이 목적이다. 이를 위하여 본고는 이차곡선의 예와 함께 도형의 자취와 삼각함수의 응용으로서 다룰 수 있는 사이클로이드(Cycloid)의 예를 다룬다.

## II. 본 론

### 1. 이차곡선

고등학교 수학과 교육과정의 이차곡선 부분은 그 정의에 충실하게 학습할 수 있는 기회가 부족하여 계산 위주의 결과만 유도하는데 익숙해 있지만, 이차곡선의 정의에 따른 이해와 응용부분에 어려움을 가지고 있는 학생들이 많이 있다.

최근 들어 현장의 교사들에 의한 구체적 조작물(타원당구대, 포물경 등)의 개발이 많은 관심을 끌고 있는데, 이러한 현상은 학습자들의 이해를 돕고 발전적인 응용이 가능하도록 도와줄 것이다. 물론 이차곡선의 경우는 다양한 방법으로 그 현상을 관찰할 수 있고, 주위의 많은 자연현상이나 일상생활

1) 동적기하(動的幾何)라고도 함.

속에서 발견할 수 있는 자료들도 충분하다. 이러한 것들을 컴퓨터 프로그램으로 구현해보는 것은 생동감 있게 그 정의 및 의미를 이해하는데 도움이 될 것으로 본다.

가. 이차곡선의 정의

고등학교 수학교과서에서는 네 종류의 이차곡선을 다음과 같이 정의한다.

- 원 : 평면 위의 한 정점( $(a, b)$ : 원의 중심)으로부터 일정한 거리( $r$ : 반지름)에 있는 점들의 모임

  $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

- 포물선 : 평면 위의 한 정점 ( $(a, b)$ : 초점)과 한 정직선(준선)에 이르는 거리가 같은 점들의 모임

  $y^2=4px,\ x^2=4py$

- 타원 : 평면 위의 두 정점( $F$, $F'$ : 초점)까지의 거리의 합이 일정한 점들의 모임

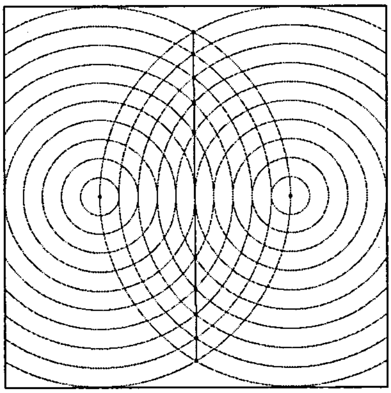
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- 쌍곡선 : 평면 위의 두 정점( $F$, $F'$ : 초점)까지의 거리의 차가 일정한 점들의 모임

  $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$

나. 수면 위의 파문을 이용한 이차곡선의 관찰

이차곡선을 관찰하기 전에 중학교 교육과정에 나오는 선분의 수직이등분선을 관찰하여 보자. 수직이등분선의 성질 중에 「수직이등분선 상의 임의의 한 점에서 선분의 양끝 점에 이르는 거리가 같다」라는 것을 이용한다면, <그림 1>을 이해할 수 있다. 동시에 수면에 떨어진 물체에 의해 생기는 동심원들의 교점들은 물체가 떨어진 지점까지의 거리가 같은 점들이 된다. 이러한 수직이등분선의 성질을 이용한다면 동시에 수면 위에 세 개의 물체를 떨어뜨린다면 최초에 발생한 세 개의 파문이 만나는 지점은 물체가 떨어진 세 지점을 잇는 삼각형의 외심[2)]이 된다.



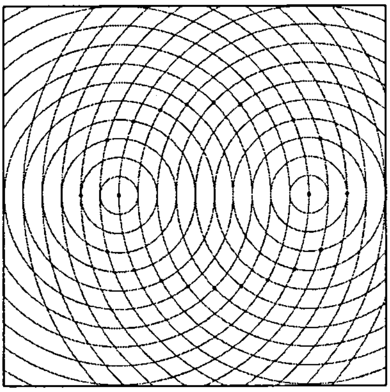
<그림 1> 수직이등분선

<그림 1>에서 만들어지는 동심원들을 잘 관찰하면, 다음과 같은 <그림 2>와 <그림 3>의 타원과 쌍곡선을 관찰할 수 있다.

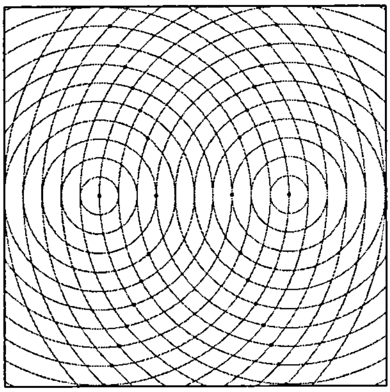
2) 삼각형의 외심은 각 변의 수직이등분선이 만나는 점이다. 이 점에서 각 꼭지점에 이르는 거리는 같다.

<그림 2>에 있는 점들을 관찰하여 보면 각 점에서 물체가 떨어진 지점(파문의 시작점)까지의 거리의 합이 일정하다는 것을 알 수 있다. 또한 <그림 3>에 보이는 점들은 물체가 떨어진 지점까지의 거리의 차가 일정하다는 것을 알 수 있다. 이러한 성질들은 학생들과 직접 실험이 가능하며, 이것을 GSP의 애니메이션 기능을 이용하여 구현해보면 더욱 실감나게 느낄 수 있을 것이다.

뿐만 아니라 각의 이등분선을 구현할 수 있다면 이차곡선 중에 포물선도 관찰할 수 있는 방법이 나오게 된다.



<그림 2> 타원

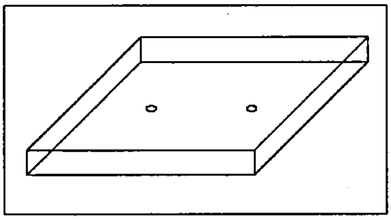


<그림 3> 쌍곡선

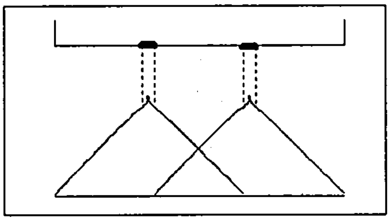
다. 모래를 이용한 이차곡선의 관찰

모래를 이용하여 이차곡선을 구현하는 것은 물을 이용하는 것과 유사하다. 물을 이용하는 경우는 관찰 대상이 짧은 시간 안에 일어나는 일이기 때문에 놓칠 수도 있지만, 모래를 이용한다면 원하는 결과가 나왔을 때 실험을 중지하고 관찰을 면밀히 할 수도 있으며 생각할 시간적 여유도 생기게 된다.

「수직이등분선」을 작도하는 방법을 <그림 4>와 <그림 5>에서 나타내었다.



<그림 4> 수직이등분선



<그림 5> 실험

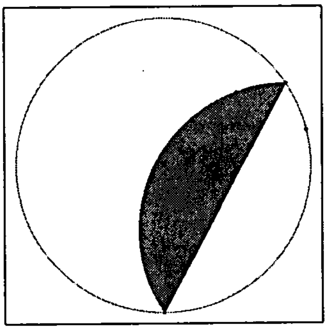
라. 종이 접기와 GSP 4.0을 이용한 이차곡선의 관찰

종이 접기를 이용하여 이차곡선을 구현한다는 것은 학생들에게 많은 흥미를 불어 일으킨다. 종이 접기를 이용한다는 것은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선을 이용한다는 것이다. 이러한 수학적 성

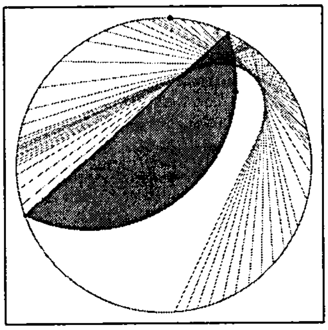
질을 이용한다면 GSP를 통한 구현도 가능하다. 즉, 수직이등분선의 성질인 「수직이등분선 위의 임의의 점에서 선분의 양 끝점까지의 거리는 같다」는 사실을 이용하여 움직이는 기하로서의 GSP의 기능을 활용한다면 종이 접기 활동을 영상화할 수 있으며, 수학적 대상의 정의 인식에 도움이 될 것이다.

▪ 타원

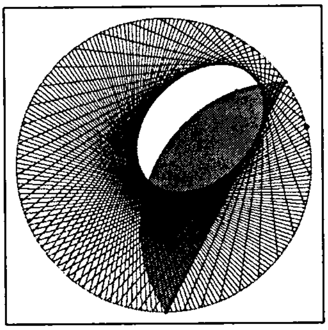
<그림 6>에서와 같이 원주 위의 한 점과 원의 중심이 아닌 원의 내부의 한 정점이 만나도록 접는다. 이 때 종이를 접음으로써 생기는 「접힌 선」이 두 점을 이은 선분의 수직이등분선이다. <그림 7>과 같이 원주 위의 다양한 점들을 <그림 6>과 같이 접었다 폈다 하는 것을 반복하면 많은 「접힌 선」이 생긴다. 원주 위의 많은 점(원주를 한바퀴)을 <그림 6>과 같이 반복하면 <그림 8>과 같은 타원이 만들어짐을 확인할 수 있다. <그림 9>에서는 그 원리를 나타내고 있는데 반지름의 길이는 항상 일정함으로 원의 중심과 원주 위의 점을 이은 선분이 「접힌 선」과 만나는 점에서는 원의 중심과 원의 내부의 한 점까지의 거리는 언제나 일정하게 된다. 즉 타원의 성질을 만족하는 점들이 된다.



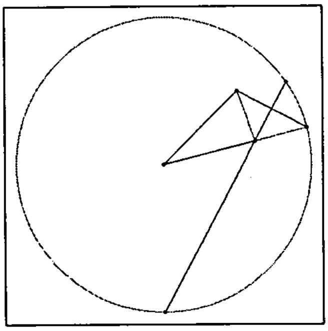
<그림 6]> 타원(1)



<그림 7> 타원(2)



<그림 8> 타원(3)

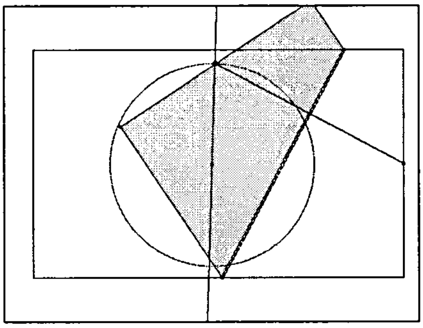


<그림 9> 타원(4)

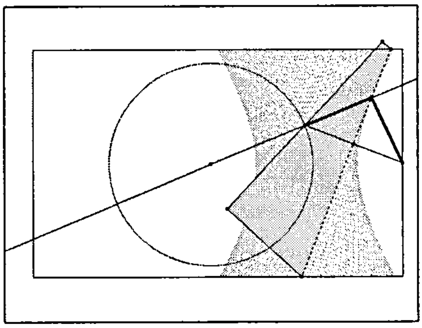
• 쌍곡선

쌍곡선은 타원의 경우와 조금 다른 방법으로 나타낼 수 있다. <그림 10>과 같이 원주 위의 임의의 점과 원의 외부에 있는 한 정점을 만나도록 접어줌으로써 나타나는 「접힌 선」을 관찰하여 보면 쌍곡선의 성질을 만족하는 점들이 나타난다. 쌍곡선도 「수직이등분선」의 성질을 이용하여 작도한 것으로서 타원과 무관하지 않다는 것을 알 수 있다.

타원과 쌍곡선을 여러 가지 방법으로 작도하여 보면 그 유사점과 차이점들이 많이 발견된다. 「타원당구대」 혹은 「쌍곡선 골프장」 등의 입사각과 반사각의 원리들도 관찰할 수 있으며 설명이 가능해진다. 초점의 위치, 즉 타원의 경우 원의 내부의 한 점, 쌍곡선의 경우 원의 외부의 한 점을 적당히 이동해 보면 다양한 형태의 이차곡선의 모양을 관찰할 수 있으며 초점의 위치 혹은 일정한 점들의 합이나 차의 값(원의 반지름)을 변형하면 역시 다양한 형태의 이차곡선의 모양을 관찰 할 수 있다.



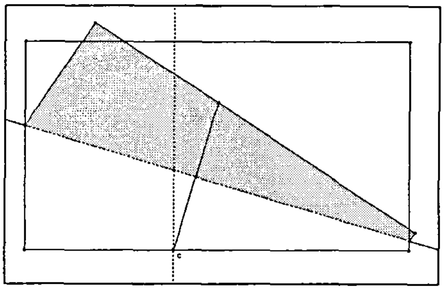
<그림 10> 쌍곡선(1)

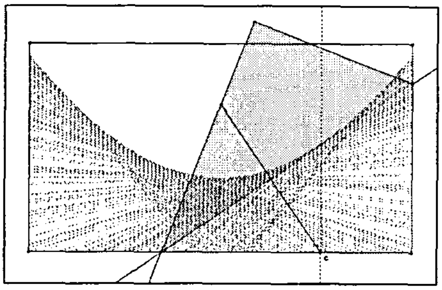


<그림 11> 쌍곡선(2)

• 포물선

포물선의 경우는 타원, 쌍곡선과는 달리 두 개의 초점이 아니라 하나의 초점과 하나의 정직선(준선)이 필요하다. <그림 12>와 같이 종이 위에 한 정점을 표시하고 또 한 정직선(준선)을 그려둔다. <그림 12>와 같이 정직선(준선) 위의 임의의 한 점과 미리 표시해 둔 한 정점이 만나도록 종이를 접는다. 이러한 작업을 정직선(준선) 위의 다양한 점에서 시도한다. 그러면 <그림 13>과 같은 포물선이 나타남을 관찰할 수 있다.


<그림 12> 포물선(1)


<그림 13> 포물선(2)

2. 사이클로이드(Cycloid)

우리나라 전통가옥의 기와지붕 모양은 서양의 전통건축물과는 달리 사이클로이드의 형태를 이루고 있다. 이것은 빗물을 빨리 흘러내리게 하여 기와에 머무는 시간을 줄이기 위함이다. 또한 놀이공원의 기구들 중에도 사이클로이드 곡선을 이용하여 최소비용으로 빠른 시간에 움직이는 기구들이 많이 있다. 이와 같이 等時곡선과 최단강하곡선의 특징을 가지고 있는 사이클로이드는 우리의 생활 주변에서 쉽게 찾아 볼 수 있는 수학적 대상이다. 또한 사이클로이드의 성질은 도형의 자취와 삼각함수의 응용 및 활용으로서 고등학교 수학과에서 다룰 수 있는 내용이므로 교재개발을 위한 적절한 소재라고 볼 수 있다. 그러나, 사이클로이드(Cycloid)의 경우 직접 교구를 제작하기에는 많은 어려움이 있고 한번 만들어진 구체적 제작물은 변형이나 응용이 어려운 점을 가지고 있다.

이러한 사이클로이드를 GSP와 Mathematica를 이용하여 기하적, 대수적을 구현한다면 다양한 형태의 사이클로이드를 관찰할 수 있다.

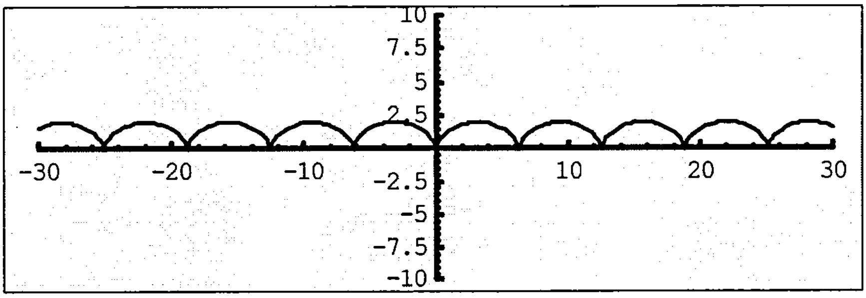
가. 사이클로이드(Cycloid)란?

입자가 중력장내에서 정지상태에서 다른 점까지 이동하는 데 걸리는 시간이 최소가 되는 궤도를 최속강하선(brachistochrone)이라 한다. 이 최속강하선은 출발점을 지나는 사이클로이드이다. 원점을 지나는 사이클로이드의 변수 방정식은 $x = a(1 - \cos q)$, $y = a(1 - \sin q)$이다. 여기서 상수 $a$는 사이클로이드가 지정된 점을 지나가도록 정해진다.

나. Mathematica를 이용한 사이클로이드의 표현

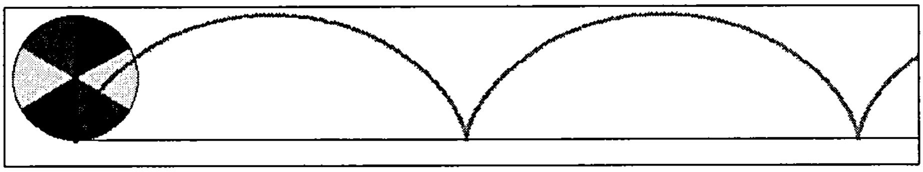
```
cyc[a_]:=Module[{}, a1 = a;
     ParametricPlot[{a(t - Sin[t]),  a(1 - Cos[t])}, {t, -30, 30},
     PlotRange->{{-30, 30}, {-10, 10}}, AspectRatio->Automatic,
     PlotStyle->{Thickness[0.01], Hue[0.1*a]}];]
```

• cyc[1]



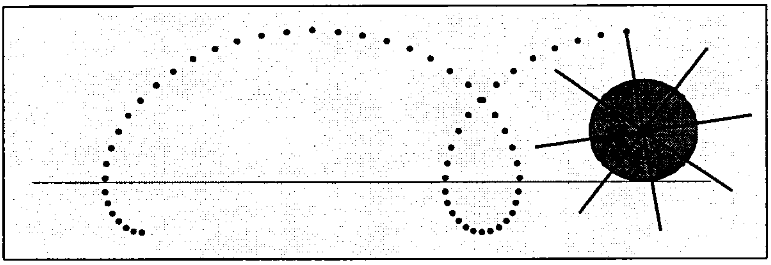

<그림 14>

### 다. GSP를 이용한 사이클로이드의 표현

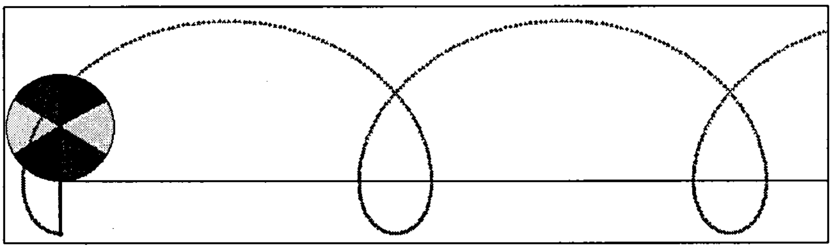


<그림 15>

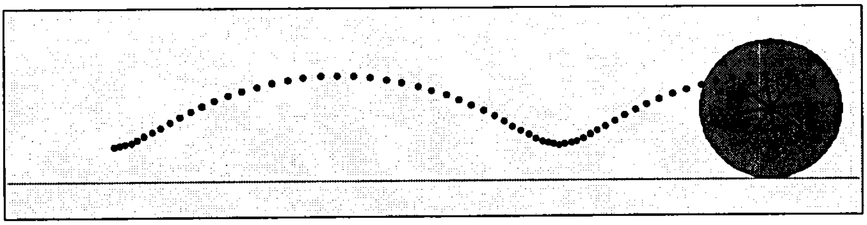
### 라. 사이클로이드의 변형



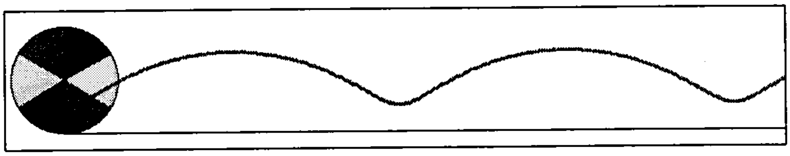
<그림 16>



<그림 17>



<그림 18>



<그림 19>

마. 內사이클로이드(하이포트로코이드, hypocycloid)

원의 안쪽에 또 다른 원을 굴렸을 때, 안쪽 원 위의 한 점이 만드는 자취를 內사이클로이드라 한다. 內사이클로이드의 매개변수 방정식은

$$\begin{cases} x = (b-r)\cos t + r\cos \dfrac{(b-r)}{r}\, t \\ y = (b-r)\sin t - r\sin \dfrac{(b-r)}{r}\, t \end{cases}$$

이다. 이러한 매개변수 방정식은

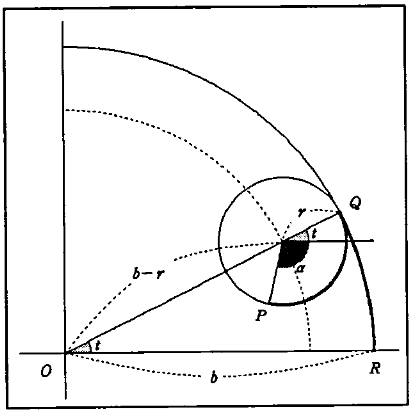
$\overset{\frown}{PQ}$ 의 길이와 $\overset{\frown}{QR}$ 의 길이가 같으므로

$tb = ar, \ \therefore\ a = \dfrac{tb}{r}$

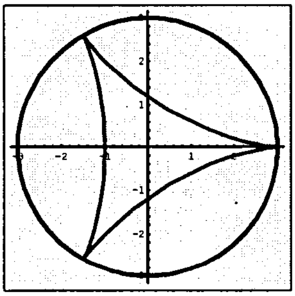
점 $P$의

$x$좌표는 $(b+r)\cos t - r\cos\left(\dfrac{b+r}{r}\right) t$이고

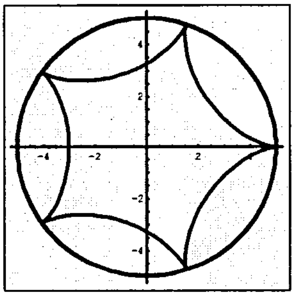
$y$좌표는 $(b+r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{b+r}{r}\right) t$이다.




<그림 20>

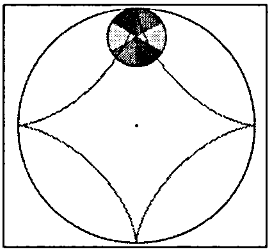


<그림 21>
Hypo사이클로이드(1)

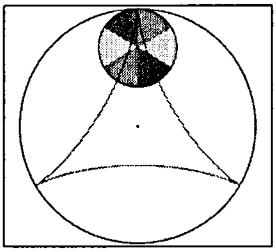


<그림 22>
Hypo사이클로이드(2)

- GSP 4.0으로 표현



<그림 23>



<그림 24>

바. 外사이클로이드(epicycloid, 에피트로코이드)

원의 바깥쪽에 또 다른 원을 굴렸을 때, 바깥 쪽 원 위의 한 점이 만드는 자취를 外사이클로이드라 한다. 外사이클로이드의 매개변수 방정식은

$$\begin{cases} x = (b+r)\cos t - r\cos\dfrac{(b+r)}{r}t \\ y = (b+r)\sin t - r\sin\dfrac{(b+r)}{r}t \end{cases},$$

이다. 이러한 매개변수 방정식은

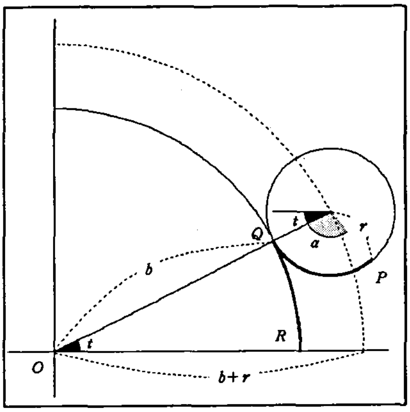
$\overset{\frown}{PQ}$ 의 길이와 $\overset{\frown}{QR}$ 의 길이가 같으므로

$tb = ar, \ \therefore\ a = \dfrac{tb}{r}$

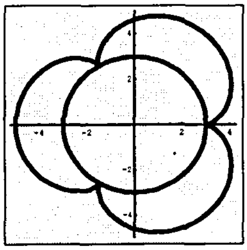
점 $P$의

$x$좌표는 $(b+r)\cos t - r\cos\left(\dfrac{b+r}{r}\right)t$이고

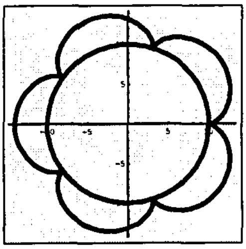
$y$좌표는 $(b+r)\sin t - r\sin\left(\dfrac{b+r}{r}\right)t$이다.




<그림 25>

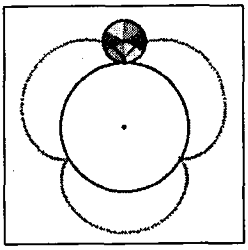


<그림 26>

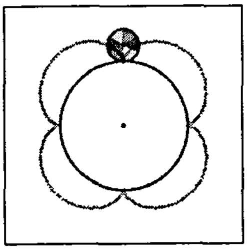


<그림 27>

▪ GSP 4.0으로 표현



<그림 28>



<그림 29>

## Ⅲ. 결 론

「변형」과 「변환」을 가능하게 함으로써 기하교육의 오랜 문제점들을 극복하려는 일련의 「움직이는 기하(Dynamic Geometry)」는 학교수학의 다른 영역에서도 많은 활용 가능성을 내포하고 있다. 특히, 애니메이션 속도조절 기능이 추가된 GSP 4.0은 수학적 정의에 따른 도형의 자취를 데몬스트레이션함으로써 계산 위주의 결과만 유도하는데 그치지 않고 탐구를 통한 개념 이해를 가능하게 한다고 볼 수 있다. 본고는 이러한 가정 아래 GSP 4.0을 이용한 이차곡선과 사이클로이드에 관한 지도 방안을 고안했다.

먼저 본고에서는 이차곡선을 관찰할 수 있는 많은 현상들을 GSP 4.0을 이용하여 다양하게 구현함으로써 수학교실에서도 실험을 할 수 있는 프로그램들을 제작해 보았다. 물과 모래를 이용하여 도형의 성질들을 관찰·발견하고, 관찰·발견된 사실들을 수학적 정의에 따라 시각적으로 표현 가능하게 한 것이다. 두 번째로, 사이클로이드(Cycloid)의 경우에도 GSP 4.0과 수학 프로그램의 대명사라 할 수 있는 Mathematica 4.0을 이용하여 대수적 의미와 기하적 의미를 동시에 학습자들이 다루어 보게 함으로써 수학적 대상에 대한 성질과 관계를 의식하도록 하고, 더욱 다양한 형태의 수학적 응용이 가능하도록 학습자의 이해를 돕고자 하였다. 그리고, 사이클로이드 뿐만 아니라 內사이클로이드(HypoCycloid)와 外사이클로이드(EpiCycloid)를 대수적·기하적으로 관찰하여 그 특징 및 성질을 학습자 스스로 발견할 수 있도록 하는 학습지도 방안을 구상하여 보았다.

본 연구에서와 같은 「움직이는 기하(Dynamic Geometry)」의 아이디어를 활용한 구체적인 수학적 탐구 장면의 제공은 수학적 정의에 대한 가치판단이 가능한 수학적 활동에의 참가를 가능하게 했다고 본다. 수학적 탐구를 의도한 학습지도 방안의 명확화, 교육과정 개발 등의 조직적 연구를 위하여 이와 같은 교재개발의 축척이 금후의 과제이다.

## 참 고 문 헌


김연식·김흥기 (1995). 고등학교 수학 II, (주)두산.

윤옥경 외 (1995). 고등학교 수학 II, (주)중앙교육진흥연구소.

조태근 외 (1995). 고등학교 수학 II, 금성교과서(주).

최상기 외 (2002). 고등학교 수학 II 교사용 지도서, (주)고려출판.

Key Curriculum Press. (2002). *The Geometer's Sketchpad version 4.*

Nakahara, T. & Koyama, M.(Ed.). (2000). *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (24th, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000).

Wolfram, S., 인제대학교 메스메티카기술교육센터 옮김. (2002). 메스메티카 4.0, 교우사.