韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 249-254.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 249-254.

엑셀을 활용한 만델브로트집합과 줄리아 집합의 탐구

안 대 영 (한국교원대부설미호중학교)

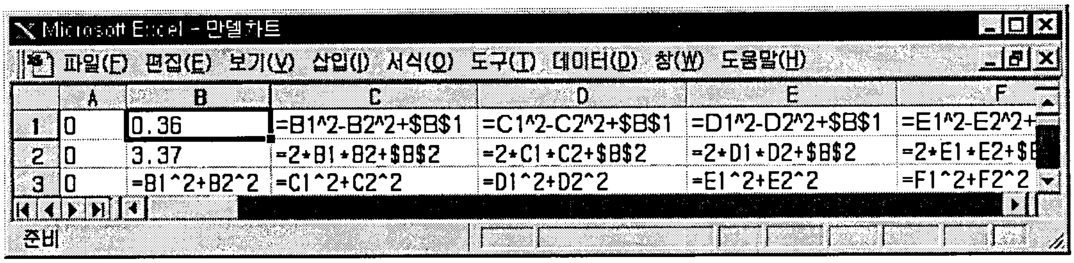
Ⅰ. 서 론

수학에서 가장 아름다운 그림은 만델브로트 집합일 것이다. 수학적 아름다운과 수학적인 사실을 찾아내는 것은 즐거운 일이다. 그러나 만델브로트 집합은 복소수의 수렴을 이용하여 그린다. 프로그래밍언어를 잘 사용할 수 있다면 만델브로트 집합을 이해하는 데 도움이 될 것이다. 여기서는 프로그래밍을 이용하지 않은 경우도 소개하고 있다. 엑셀을 이용하여 만델브로트 집합과 줄리아 집합을 탐구하고, 특히 만델브로트 집합의 주기를 관찰하는데 엑셀을 활용하는 방법을 제시한다.

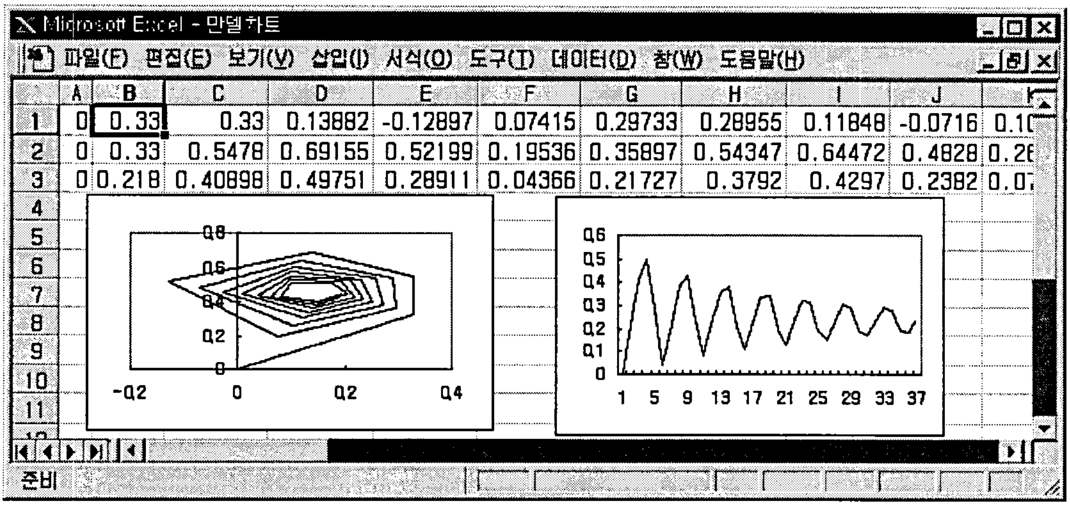
Ⅱ. 본 론

1. 만델브로트 집합에서 엑셀의 활용

복소수 c 를 변화시켜 $|z_n|$이 무한대가 되지 않는 c의 집합을 만델브로트집합이라고 한다. 즉 $M=\{c\,z_{n+1}=z_n^2+c,\ z=0, \lim|z_n|<\infty\}$이다. 이 집합을 그림으로 나타내기 c언어, 비주얼 베이직 등의 언어를 통해서는 결과의 그림을 확인할 수 있다. 만델브로트집합이 그려지는 중간 과정에 대한 탐구를 하기는 어렵다. 만델브로트집합을 복소 평면을 통해서 하나 하나, 그 자취를 찾아서 탐구하는 과정이 없이는 만델브로트집합을 이해하기는 어렵다. 학습자가 만델브로트집합을 복소 평면에서 직접탐구하고, 만델브로집합의 주기를 직접 살펴봄으로 써, 만델브로트 집합을 좀더 자세히 확인할 수 있다. 이러한 방법을 알기 위해서, 엑셀을 통해 만델브로트 집합을 구체적으로 느낄 수 있는 방법을 제시하고자 한다. c=0.33 + 0.33 i 는 다음과 같이 수렴임을 알 수 있다.



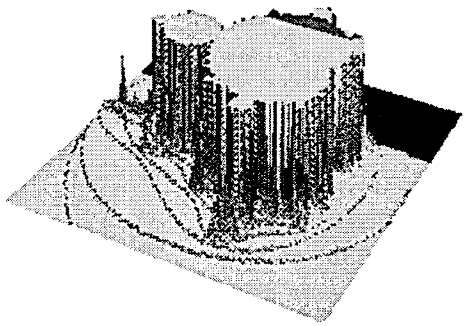
<그림 1> 만델브로트 집합의 계산



<그림 2> 만델브로트 집합 수렴에 대한 엑셀 차트

만델브로트 집합은 위의 그림에서 진한부분으로 나타난다. Mathematica 에서는 간단하게 프로그로래밍 할 수 있다. 다음은 메스메티카에서 그린 그림이다.

```
mandel[x_,y_,lim_]:=
    Block[{c,z,ct},
    c=x + y I;
    z=c;
    ct=0;
    While[(Abs[z]<2.0) && (ct<lim),
    ++ct;
    z=z*z + c;
    ];
    Return[ct];
    ]
    Plot3D[mandel[x,y,140],
    {x, -2.0, 1.0},{y, -1.5, 1.5},
    PlotPoints ->120, P
    lotRange    ->{0,50},
    Axes -> False, Boxed->False, Mesh->False]
```



<그림 3>Mathematica 에서의 그림

Mathematica에서 프로그래밍은 간단하지만, 구체적으로 그림이 어떻게 그려지는지는 이해하기 어렵다. 이런 어려움을 극복하기 위해 <그림 4> 와 같이 0으로 수렴하는 값과 발산하는 값을 제시하여 구체적으로 이해할 수 있도록 제시하였다.

만델차트

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		-1.6	+	-1.1	I	t0	0.9	+	1.1	I	반복	40	범위수
2		-1,6	-1,52	-1,4	-1,35	-1,27	-1,18	-1,10	-1,02	-0,93	-0,85	-0,77	-0,68
3	-1.1	38	38	38	38	38	38	37	37	37	37	37	37
4	-1.01667	38	38	38	38	37	37	37	37	37	37	36	36
5	-0.93333	38	38	38	37	37	37	37	37	36	36	36	35
6	-0.85	38	37	37	37	37	37	36	36	36	35	35	29
7	-0.76667	37	37	37	37	36	36	36	36	35	35	34	28
8	-0.68333	37	37	36	35	36	36	35	35	35	34	33	29
9	-0.6	37	36	35	33	34	34	34	34	34	33	4	0
10	-0.51667	36	36	35	27	32	32	28	32	32	31	0	0
11	-0.43333	36	35	34	32	23	21	0	4	28	29	0	0
12	-0.35	35	34	33	22	0	0	0	0	0	24	0	0
13	-0.26667	34	32	28	24	0	0	0	0	0	0	0	0
14	-0.18333	29	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	-0.1	33	31	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
16	-0.01667	35	32	32	28	0	0	0	0	0	21	0	0
17	0.066667	36	35	34	31	20	0	0	0	22	27	0	0
18	0.15	36	36	34	30	4	30	4	27	32	31	4	0
19	0.233333	36	36	35	29	34	34	33	34	33	33	28	0
20	0.316667	37	37	36	35	35	35	35	35	34	34	30	26
21	0.4	37	37	37	36	36	36	36	36	35	35	34	30
22	0.483333	37	37	37	37	37	36	36	36	36	35	34	28
23	0.566667	38	38	37	37	37	37	37	36	36	36	35	34

만델차트 / 만델차트 (2) / Sheet2 / Sheet3

<그림 4> 엑셀시트에서 수렴하는 만델브로트 집합 탐구

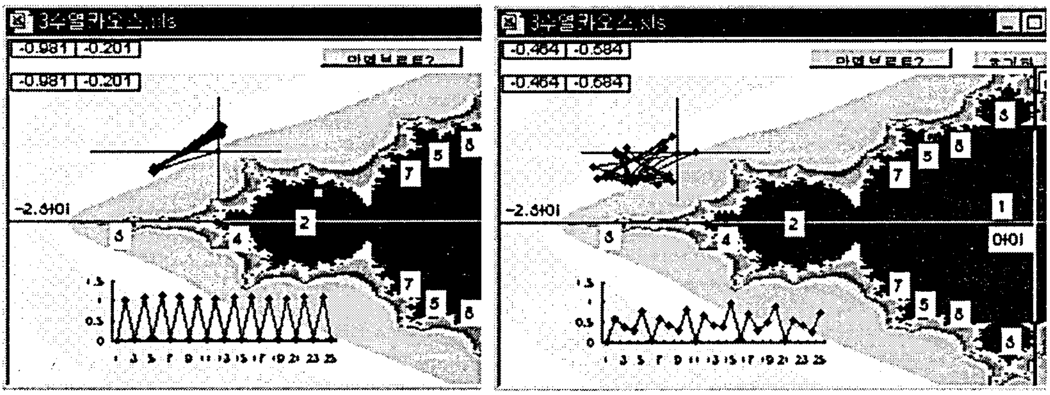
다음은 <그림 4>의 엑셀 시트에서 만델브로트 집합을 구하기 위한 엑셀프로그래밍이다.

```
Sub Button1_Click()
Dim i, j, n, n1, m As Integer
Dim a1, a2, b1, b2, c1, c2, x, y, x2, y2 As Double
n = Range("n1")
n1 = n + 4
ReDim a(n1) As Variant
ReDim b(n1) As Variant
a1 = Range("b1")
b1 = Range("d1")
a2 = Range("g1")
b2 = Range("i1")
m = Range("l1")
Range(Cells(2, 1), Cells(200, 203)).Delete
'다시 시작할 때 지운다.
c1 = (a2 - a1) / n '실수부 영역의 셀사이의 값차이
c2 = (b2 - b1) / n '허수부 영역의 셀사이의 값차이
Cells(2, 2).Value = a1
Cells(3, 1).Value = b1
```

```
For j = 3 To n
Cells(2, j).Value = a1 + c1 '실수부 값 차이 c1 이 항상 더해진다.
a1 = a1 + c1
Next j
For i = 4 To n
Cells(i, 1).Value = b1 + c1  '허수부 값 차이 c1 이 항상 더해진다.
b1 = b1 + c1
Next i
For j = 2 To n + 2 '가로축 2에서 부터 n+2 까지, 실수부
     Set a(j) = Range(Cells(2, 2), Cells(2, n + 2)).Cells(1, j)
Next j '개체일 경우 set 명령어를 사용한다.
For i = 3 To n + 3 '세로축 3에서 부터 n+3 까지, 실수부
     Set b(i) = Range(Cells(3, 1), Cells(n + 3, 1)).Cells(i, 1)
Next i '배열에 대입한다.
  x = 0 '초기화 시킨다.   y = 0 '초기화 시킨다.  x2 = 0 '초기화 시킨다.  y2 = 0 '초기화 시킨다.
For i = 3 To n
  For j = 2 To n
   x = 0    y = 0     x2 = 0     y2 = 0
   For k = 0 To m - 1
   x2 = x * x - y * y + a(j)
   y2 = 2 * x * y + b(i)
   x = x2
   y = y2
   t = x ^ 2 + y ^ 2
  If t > 10 Then 't가 4 보다 크면 발산한다.
     Exit For
   End If
  Next k
      If k = m Then
       t = 0
      ElseIf k > 20 Then
       t = 4
      ElseIf k < 30 Then
       t = m - k
      End If
      Cells(i, j).Value = t
Next j
Next i
End Sub
```

2. 만델브로트 집합에서 주기의 탐구

엑셀의 차트기능을 이용하면 만델브로트집합의 주기를 찾아볼 수 있다.



$z=-1.022-0.179\,i$ 의 2주기 $z=-0.484-0.584\,i$ 의 5주기

<그림 5> 만델브로트 집합의 주기의 관찰

만델브로트 집합의 주기에 대해 알아보자. $P_c(z)=z^2+c$ 라고 하자 k주기의 경우 $p_c{}^k(0)=c$를 만족해야 한다. $P_c{}^k(0)=[P_c{}^{k-1}(0)]^2+c=c$ 이다. 따라서 모든 자연수에 대해

$P_c{}^{k-1}(0)=0$ 이다.

$k=1$ 2, 3, 4 일 때를 구하면

$c=0,\ c^2+c=0,\ (c^2+c)^2+c=0,\ ((c^2+c)^2)+c)^2+c=0$

따라서

$k=$ 1일 때, $c=0$

$k=$ 2일 때, $c=-1$

$k=3$일 때

```
evalf(solve({(c^2 +c)^2+c=0},{c}));
  {c = -1.754877667}, {c = -0.1225611669 - 0.7448617670 I},
        {c = -0.1225611669 + 0.7448617670 I}
```

$k=4$일 때

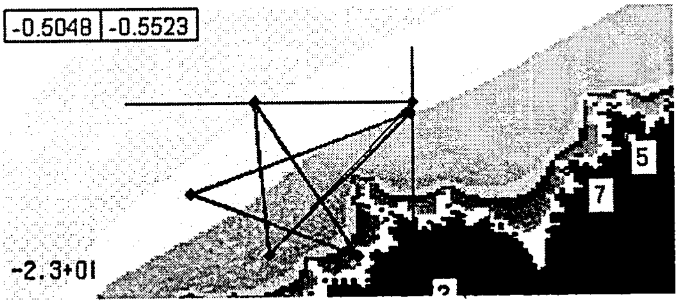
{-1.9408},{-1.3107},{-0.15652-1.0322 I},-0.15652+1.0322 I},{0.28227-0.53006 I},{0.28227+0.53006 I}}

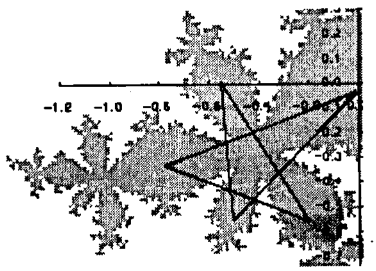
같은 bulb 안에는 같은 주기를 가짐을 확인할 수 있다.

3. 만델브로트집합과 줄리아 집합

줄리아 집합은 c 값을 고정시켰을 때, 발산되지 않는 z 값들의 모임이다. 만델브로트 집합에서 주기 q와 rotation number p/q 에 대해 알아보자.

다음은 5 주기의 $z = -0.5048 - 0.5629\,i$ 이다.





이에 해당하는 줄리아 집합을 살펴보자. 줄리아 집합도 5 주기를 가진다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8
2	0	-0.5048	-0.56688	-0.18347	-0.79498	0.00179	-0.5048	-0.56689	-0.18347	-0.79498
3	0	-0.5629	0.0054	-0.5691	-0.3541	0.0001	-0.5629	0.0054	-0.5691	-0.3541

아래의 그림은 줄리아 집합이다. 줄리아 집합은 5개의 점을 bulb를 한 개씩 건너 뛰면서 주기를 가진다. 따라서 rotation number는 2/5 가 된다.

이와 같이 해서 다음의 bulb를 2/5 bulb 라 부른다.

Ⅲ. 결 론

엑셀을 이용하여 만델브로트 집합을 탐구할 수 있도록 하였다. 엑셀의 차트 기능을 이용하여 z_n 의 수렴을 알기 쉽게 이해할 수 있게 하였다. 엑셀 시트를 이용하여 만델브로트 집합을 직관적으로 이해할 수 있게 하였다. 만델브로트 집합의 주기를 알 수 있도록 하였다. 줄리아 집합과 연계하여 rotation number를 설명하였다.

만델브로트 집합을 탐구하기 위하여 엑셀의 비주얼베이직 어프리케이션 언어를 사용하였다.

참 고 문 헌

Peitgen, H.O.; Jurgens, H.; Saupe, D;. Maletsky, E.; Perciante, T. & Yunker, L. (1992). *Frantals for the classroom : Part two*, New York: Springer- Verlag.