韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 215-222.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 215-222.

대학수학에서, 다양한 좌표계의 소개

김 병 무 (충주대학교)

직교좌표의 중요성과 극좌표의 이용을 알리고, 포물선좌표의 정의와 타원좌표의 정의를 소개하고 또 타원좌표를 이용하여 그래프를 그려본다. 타원좌표를 이용한 그래프 그리기를 통해 수학에 대한 흥미와 즐거움을 학생들에게 느끼도록 한다. 다양한 좌표계를 이용한 그래프 그리기를 비교해보고 매개변수로 표현된 방정식의 그래프 그리기에 대해 여러 가지 좌표계에 대한 유용성을 알아본다. Mathematica를 이용하여 여러 가지 좌표계에서 관심있는 곡선의 방정식을 만들어보고 그래프를 그려보며 유용한 좌표계에 대해 알아본다.

I. 서론

어떤 의미에서 다양한 좌표계가 고대 이래로 우리와 같이 있었다. 고대 천문학자들에 의해 이용된 것처럼 천도(celestial sphere)의 위도와 경도는 구면좌표와 밀접한 관계가 있다. 데카르트의 발명을 제외하고 현대까지 좌표계의 이론에서 위대한 이정표는 없다. 새로운 좌표계가 특별한 문제를 해결하기 위해 나타났다. 극좌표는 스위스의 뛰어난 Bernoulli 수학자 집안의 Jakob Bernoulli(1654~1725)에 의해 소개되었다. 처음에 극좌표는 나선에 주로 적용되었으나 Jakob Bernoulli는 극좌표를 또 다른 상황에 이용했다. 18세기 말까지 새로운 좌표계가 도입되지 않았다. 해석학과 물리학이 충분히 정교하게 된 후 수학자들은 일반적인 좌표계의 체계적인 개념을 개발했다. 곡면의 곡률에 대한 Karl Friedrich Gauss (1777~1855)의 작품이 일반적인 관점의 개발에서 최고로 도움이 되었다. 가우스의 관점은 n-차원 미분기하를 창시한 Georg Fridrich Bernhard Riemann에 의해 일반화되었다. 이 학문 분야에서 n-차원 공간의 성질은 점이 n개의 좌표 x_1 , x_2 ,…, x_n의 식으로 연구되었다. Riemann의 기본적인 작업은 주로 수많은 기하학자에 의해 개발되었고, 후에 상대성 이론에 필요한 자연스런 수학적 언어로 발전되었다. 1859년에 공학자 G.Lave가 출판한 책은 Curvilinear좌표에 대한 자료를 포함한다(김병무외 1, 2001).

대학수학에서 학생들의 흥미를 불러일으켜 도움을 주는 자료의 개발(김병무, 2002)은 대학수학의 관련단원과 결합하여 보충하는 내용이거나 또 다른 세계를 보여줄 수 있는 내용이 도움을 줄 것이다(김병무, 1997).

대학수학에서 주로 다루는 이차원의 좌표계는 직교좌표계와 극좌표계이다. 여기서는 간단히 이들 좌표계의 중요성을 알아보고 포물선좌표와 타원좌표를 소개하고 타원좌표를 이용하여 곡선을 그려본다. 대학수학을 배우고 나면 수학책을 영원히 접하지 않을 수 있는 학생들에게 수학에 대해 작은 관

심과 흥미를 갖도록 하는데 도움을 주어 앞으로 전공이나 사회생활에서 문제해결 능력을 신장시키는데 기회를 풍부히 제공할 필요가 있다(우정호, 1993).

II. 본론

1. 직교좌표의 중요성

이차원의 좌표에 대해 제일 먼저 배우고 주로 다루는 것이 직교좌표이다. Rene Descarte(1596~1652)의 수학에 관한 책 기하학은 1637년 방법서설의 부록으로 출판되었다. 책의 주요 목적은 실수좌표계의 체계적인 이용이 어떻게 기하학 내용을 단순화시킬 수 있는가를 보여주는 것이다. 대수학의 기교를 기하학에 적용함으로서 상당히 많은 문제에 대해 간단한 해결방법을 소개했다. 기하학에 대수와 좌표를 결합한다는 생각은 단 한번에 데카르트에 의해 착상된 것은 아니다. 이미 그리스 기하학에서, 그리고 Pieree Fermat에 의해 이용되었다. 그러나 데카르트는 평면의 모든 점에 유일한 좌표를 정한 첫 번째 사람이었다. 그의 해석기하학의 기술은 확실히 수 세기동안 수학에 의미가 있게 하였다(안재구, 1993).

직교좌표의 도입은 아무리 복잡한 방정식이 주어져도 대수적·해석적 성질을 기하학적으로 해석할 수 있다. 원에 관한 기하학적인 진리를 발견하거나 연구하기 위해 대수학을 쓰는 일을 직교좌표의 도입으로 새로운 방법의 연구를 시작하게 되었다. 즉 기하학의 해도가 없는 바다에서 뱃길 안내인을 만난 것이다. 그의 발견의 진수는 좌표의 방법을 이미 기하학적으로 정의된 곡선을 방정식으로 바꿔내는데 사용했을 뿐만 아니라 수리과학의 대상개념 전체에 영향을 끼쳤다(Howard Anton, 1980). 데카르트 이전의 모든 기하학을 능가한 위대한 발견이었다. 직교좌표에 대한 이용이 이차원, 삼차원뿐만 아니라 n차원 공간으로까지 확대되어 체계적인 해석기하학 이론의 전개에 도움을 줄뿐만 아니라 기하학에서 증명이 어려운 경우에 좌표를 도입하여 문제의 이해와 해결에 편리함을 얻고 있다.

2. 극좌표의 이용

옛날부터 학자들은 일정한 속도로 원운동하는 uniform circular motion을 연구해 왔다. 예를 들면 Plato는 별들과 위성들의 운동에 대해 언급했다. 현대에도 과학자들은 원자핵 둘레의 전자의 운동과 궤도를 도는 우주선의 circular path를 연구한다.

원운동의 연구를 용이하게 하기 위해 과학자들은 참고 좌표계로서 극좌표를 적용할 수 있다. 이 좌표계로 작업하는 것이 훨씬 익숙한 직교좌표를 보다 쉽다. 특히 일변수함수를 이용한 운동을 기술하는데, 한 예는 물체가 원호를 따라 움직이는 시간을 나타내는데 t의 이용이다(Merilyn Ryan, S.S.J 외 3, 1993).

벌이 식량공급원을 발견했을 때, 벌통의 동료들에게 발견을 알리기 위해 dancing이라고 하는 특별한 움직임을 보인다. 다른 벌들이 춤추는 벌을 모방하여 화밀(necta)과 꽃가루를 찾으러 밖으로 나간

다. 첫 번째 벌의 몸에서 화밀이나 꽃가루의 향기가 이용할 수 있는 식량의 종류인가 다른 벌들에게 말한다. 어디에서 찾을 수 있는지 그들은 어떻게 아는가?

연구와 실험은 춤 자체가 식량의 위치를 매우 효과적으로 의사소통하고 있다는 것을 과학자들에게 확신시켜왔다. 춤추는 벌은 그의 몸의 방향을 이용하여 태양과 꽃가루의 위치 사이의 수평각을 지시하고, 춤의 종류('circling' 또는 'wagging')와 흔드는 운동의 빠르기는 식량까지의 거리를 지시한다. 의사소통의 세세함이 여러 종류의 벌 사이에서 변화가 있지만, 거의 모든 벌통에서 식량까지의 방향과 거리를 제공한다. 고정된 점이나 극으로 벌을 생각하면 일종의 극좌표계로 벌이 의사소통하고 있음을 깨닫게 될 것이다.

직교방정식으로 나타내기 어려운 경우에 원뿔곡선을 극방정식으로 표현하면 편리하고 쉽게 문제를 해결하는 경우가 있다.

또, 극좌표를 3차원으로 확장한 원기둥좌표와 구면좌표는 3차원 직교좌표에서 해결하기 어려운 문제들 가운데 이중적분과 삼중적분의 적용과 응용을 하는데 많은 이점을 갖고 있다. 구체적인 예들은 미적분학 교재에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

3. 포물선좌표(Parabolic coordinate)의 소개

두 포물선족을 생각하자. () ; $\lambda>0$, $\mu>0$

… (1) $y^2=4\lambda(x+\lambda)$, $y^2=-4\mu(x-\mu)$

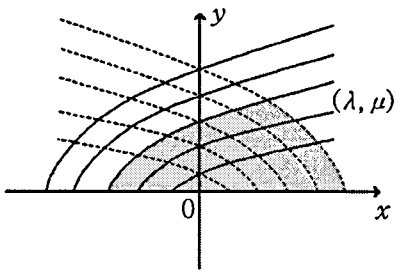
평면 위의 각 점은 한 포물선 족의 한 점을 정확히 지난다.

λ - 포물선족(위 반평면)은 실선으로 그려지고,

μ - 포물선족은 점선으로 그려졌다. <그림 1>

x축에 대칭적인 점들은 같은 두 포물선 위에 있을 것이다.

이것이 위에서 반평면으로 제한하는 이유이다.



<그림 1>

두 수 λ와 μ(포물선 좌표)는 위 반평면에 대한 좌표계를 형성한다.

$\lambda\mu$ - 평면의 제1사분면은 xy - 평면의 위의 반평면과 일대일 대응한다.

(그림 1)의 어두운 부분이 (그림 2)의 어두운 부분에 대응된다.

포물선 좌표(2, 3)의 직교좌표는 무엇인가 알아보자.

$\lambda=2$, $\mu=3$을 (1)에 대입하여 $y^2=4\cdot 2(x+2)$,

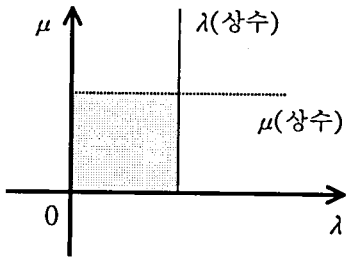
$y^2=-4\cdot 3(x-3)$

이들을 풀면 $8x+16=-12x+36$, $20x=20$, $x=1$

따라서, $y^2=8(1+2)$, $y^2=24$, $y=2\sqrt{6}$

포물선 좌표(2, 3) → 직교좌표(1, $2\sqrt{6}$)

λ - 타원족 : $\dfrac{x^2}{\lambda-b^2}+\dfrac{y^2}{\lambda-a^2}=1$ $(\lambda>a^2>b^2)$



<그림 2>

λ - 타원족 : $\frac{x^2}{\lambda-b^2}+\frac{y^2}{\lambda-a^2}=1$ $(\lambda>a^2>b^2)$

μ - 쌍곡선족 : $\frac{x^2}{\mu-b^2}-\frac{y^2}{a^2-\mu}=1$ $(b^2<\mu<a^2)$을 생각하면

이들 타원족과 쌍곡선족은 같은 초점 $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$을 갖는다.

이때 타원좌표 $(\lambda,\ \mu)$계는 xy - 평면의 1사분면을 만든다.

다음 예에서 $(\lambda,\ \mu)=(25,10)\rightarrow(x,y)=(\frac{4}{\sqrt{7}},\ \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$ 이고 초점 $(\sqrt{7},\ 0)$임을 확인할 수 있다.

$$\frac{x^2}{\lambda-9}+\frac{y^2}{\lambda-16}=1,\quad \frac{x^2}{\mu-9}+\frac{y^2}{16-\mu}=1$$

4. 타원좌표에서 곡선

극좌표에서 곡선 그리기는 매력적이다. 대칭성을 만족시키는 다양한 장미곡선, 심장형, 연주형, 나선형과 다른 매력적인 원선등이 있다. 수학적 예술로서 많은 아름다운 극곡선을 모으고 Mathematica를 이용하여 쉽게 이 과정을 그래프로 평면에 그려낼 수 있다. 구체적인 그래프 그리기는 (김병무, 2001)을 따르면 된다.

여기서는 극좌표보다 타원좌표를 이용하여 아름다운 곡선을 그려보려고 한다.

타원좌표는 학부과정에서 쉽게 접할 수 없으나 공학을 공부하는 학생은 접할 기회를 갖는다. 익숙하지 않은 좌표계에서 방정식의 그래프를 그리는 것이 즐겁다는 것을 알게 된다. 삼각함수의 값을 구하여 극곡선을 그릴 수 있다. 타원좌표에서 그리는 것도 sine과 cosine의 값을 포함한다. 게다가 sinh과 cosh의 값도 필요로 한다.

미적분학 교재에서 삼각함수와 같은 성질을 알아볼 수 있다. 특정한 값에 대한 삼각함수의 값은 잘 알 수 있으나 sinh과 cosh의 값은 그렇지 않다. 그러나 Mathematica가 도움을 줄 것이다.

1) 타원좌표

문제가 circular domain을 표현하거나 그림 그리기 편리한 대칭성을 갖고 있을 때 직교좌표를 극좌표로 고치는 것은 보편적인 일이다.

물리문제의 많은 경계조건은 타원의 둘레와 관계가 있고, 따라서 그것은 타원좌표로 고치는 것이 편리하다(Temple H. Fay, 2000). 이들 좌표는 다음과 같이 주어진다.

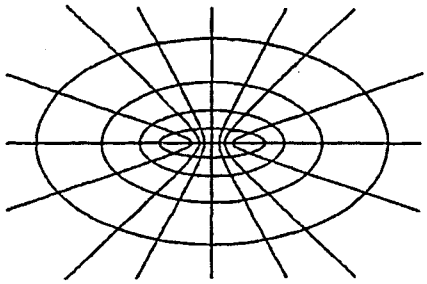
$x=c\cosh\xi\cos\eta,\ \ y=c\sinh\xi\sin\eta$

즉, 타원좌표 $(\xi,\ \eta)\rightarrow$ 직교좌표 $(x,\ y)$ 또는 타원좌표 $(\eta,\ \xi)\rightarrow$ 직교좌표 $(x,\ y)$

이 좌표계에서 ξ를 상수로 놓고 얻는 곡선은 타원이고, η를 상수로 놓음으로 초점 $(\pm c,\ 0)$을 공유하는 쌍곡선을 얻는다.

$\xi=\xi_0$라고 고정시키면 점 $(x,\ y)$의 자취는 $\dfrac{x^2}{c^2\cosh^2\xi_0}+\dfrac{y^2}{c^2\sinh^2\xi_0}=1$이고, $\eta=\eta_0$라고 고정시키면 점 $(x,\ y)$의 자취는 $\dfrac{x^2}{c^2\cosh^2\eta_0}-\dfrac{y^2}{c^2\sinh^2\eta_0}=1$이다.

변수 ξ는 극좌표에서 ρ와 같은 역할을 하고 η는 극좌표에서 θ와 같은 역할을 한다.



(그림 3)

각 타원-쌍곡선의 쌍 사이의 교점에서 각각의 곡선에 그은 접선은 서로 수직임을 쉽게 알 수 있다.

타원좌표평면은 (그림 3)와 같다.

x축과 y축이 어떻게 생성되는지 알아보는 것은 좋은 연습문제가 될 것이다.

예를 들면, $x=\cosh\xi\cos\eta$, $y=\sinh\xi\sin\eta$ 에서 $\eta=0$이고 ξ가 실수값을 갖는다면, $x\geq1$인 x축을 생성하고, $\eta=\pi$ 이고 ξ가 실수값을 갖는다면, $x\leq-1$인 x축을 생성한다.

$-1\leq x\leq1$인 x축을 얻기 위해 $\xi=0$로 놓고 η가 $0\leq\eta\leq\pi$의 값을 갖게 하면 된다. y축은 $\eta=\dfrac{\pi}{2}$로 놓고 ξ가 실수값을 가지면서 변하면 얻을 수 있다.

2) 그래프 그리기

타원좌표에서 그래프 그리기는 극좌표에서 그래프 그리기와 같다. 그것은 단지 매개변수 방정식의 문제이다. 극좌표에서 대부분의 경우에 극방정식 $\rho=f(\theta)$로 주어진 것에 대해 매개변수 방정식 $x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$가 변역 θ 위에서 곡선을 그리는데 이용된다. 타원좌표에서 그래프 그리기를 위해 $\xi=f(\eta)$ 꼴의 방정식이 매개변수 방정식

$x=c\cosh f(\eta)\cos\eta$, $y=c\sinh f(\eta)\sin\eta$ 로 이용된다. 똑같은 방법으로 $\eta=f(\xi)$ 꼴의 방정식으로 놓고 매개변수 방정식 $x=c\cosh\xi\cos f(\xi)$, $y=c\sinh\xi\cos f(\xi)$를 그린다.

$\sinh\xi$ 와 $\cosh\xi$ 는 유계가 아니므로 흥미 있는 그래프를 얻기 위해 간단한 주기함수 $\xi=f(\eta)$를 생각한다. 우선 간단한 삼각함수로 시작해 보자. 그러나 놀랄 만한 꽤 흥미 있는 곡선을 Mathematica를 이용하여 얻게 된다(Stephen Wolfrom, 1996). (그래프는 지면상 생략한다)

c=2로 고정시키고, 그래프는 연주형을 $\xi=\cos\eta$로, 반원을 $\xi=\sin\eta$로 놓고 그리면 된다.

```
Clear [x, y, t, f]
x[t_] : = 2 Cosh[f[t]] Cos[t]
```

```
y[t_] : = 2 Sinh[f[t]] Sin[t]
f[t_] : = Cos[t]

lemiscate = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 π}, AspectRatio → Automatic]
        Clear[t, f]
        f[t_] : = Sin[t]
Semicirde = ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, 0, 2 π},
            AspectRatio→Automatic]
```

극좌표에서 그리는 방법은 (김병무,2001)을 참고한다.

나머지 그래프는 시행한 식만 보인다.

주기를 증가시키면 어떤 결과가 나타나는지 알아보자. Mathematica를 실행시키는 방법은 위와 같으므로 식만 제시한다.

$\xi = \cos 2\eta$, $\xi = \sin 2\eta$, $\xi = \cos 3\eta$, $\xi = \sin 5\eta$, $\xi = \cos 17\eta$, $\xi = \sin 21\eta$ 식을

$f(t) = \cos 2t$, $f(t) = \sin 2t$, $f(t) = \cos 3t$, $f(t) = \sin 5t$, $f(t) = \cos 17t$, $f(t) = \sin 21t$

함수로 바꾸어 대입하여 그리면 된다.

이번에는 주기를 감소시키면 어떤 결과를 얻을 수 있나 알아보자.

$\xi = \cos\frac{\eta}{2}$, $\xi = \cos\frac{\eta}{4}$, $\xi = \sin\frac{\eta}{2}$, $\xi = \sin\frac{\eta}{5}$, $\xi = \cos\frac{27}{26}\eta$, $\xi = \sin\frac{25}{27}\eta$

이 경우에도

$f(t) = \cos\frac{t}{2}$, $f(t) = \cos\frac{t}{4}$, $f(t) = \sin\frac{t}{2}$, $f(t) = \sin\frac{t}{5}$, $f(t) = \cos\frac{27}{26}t$, $f(t) = \sin\frac{25}{27}t$

로 바꾸어 대입하여 그린다.

극좌표에서 나선의 모양을 얻는 것과 유사한 방법으로 자연로그를 이용하여 멋있는 나선을 얻는다. $\xi = \ln(1+\eta)$ $(0 \le \eta \le 30\pi)$와 $\xi = \arctan 2\eta$ $(0 \le \eta \le 30\pi)$ 식을

$f(t) = \ln(1+t)$, $f(t) = \arctan 2t$로 놓으면 된다.

$1+\sin^2 75\eta$로 식을 나누어 특별한 모양을 얻을 수 있다.

$\xi = \frac{\cos\eta}{1+\sin^2 75\eta}$, $\xi = \frac{\sin\eta}{1+\sin^2 75\eta}$, $\xi = \frac{\cos 2\eta}{1+\sin^2 75\eta}$ 식의 그래프를 얻기 위하여

$f(t) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 75t}$, $f(t) = \frac{\sin t}{1+\sin^2 75t}$, $f(t) = \frac{\cos 2t}{1+\sin^2 75t}$ 함수를 대입하면 새로운 그래

프를 얻는다.

더 색다른 방정식을 갖고 특별한 곡선을 만들어 보자.

$\xi = \cos(1 - \sin\frac{18}{7}\eta)$,

선물을 포장한 리본 모양의 $\xi = \cos(1 + 17\eta - \sin\frac{9}{8}\eta)$

비틀어진 고무밴드 $\xi = \sin^2\eta - \cos^2 5\eta$

여러개의 고무풍선을 겹쳐놓은 모양의 $\xi = 1 - \sin^2\frac{3\eta}{5}$

여러개의 계란모양을 겹쳐놓은 $\xi = 1 - \sin^2\frac{3\eta}{10}$

$f(t) = \cos(1 - \sin\frac{18}{7}t)$, $f(t) = \cos(1 + 17t - \sin\frac{9}{8}t)$, $f(t) = \sin^2 t - \cos^2 5t$,

$f(t) = 1 - \sin^2\frac{3}{5}t$, $f(t) = 1 - \sin^2\frac{3}{10}t$로 놓으면 특별한 곡선을 그릴 수 있다.

Ⅲ. 결 론

공기의 중요성을 잊고 지내듯이, 직교좌표의 중요성을 느끼지 않는 경우가 많다. 직교좌표에서 해결하기 힘든 문제나 그래프 표현이 어려운 경우 극좌표에서 훨씬 쉽게 접근할 수 있는 경우도 있다. 이들을 한번 정리하여보고, 보다 나은 표현을 위해 또 문제해결을 위해 지금까지 배우지 않은 새로운 좌표계를 만들어 볼 생각을 할 기회를 제공 하는 것도 대학수학을 배우는 학생들에게 많은 도움을 줄 것이다.

타원좌표가 극좌표보다 좀 더 복잡하다. 학생들은 익숙하지 않은 좌표계에서 그들이 만든 방정식의 그래프를 그려보며 즐거움을 찾을 수 있다. 더 발전적인 학생들은 새로운 좌표계의 기하에 의존하여 곡선을 예측하고 설명할 수도 있다. 여기서 제시된 그래프를 매개변수방정식을 정의하고 확인해보고 더 멋진 생활주변의 모양을 표현 할 수 있는 식을 찾아내는 것은 또 다른 즐거움이 될 것이다.

과제로 다양한 좌표계에 대해 조사하고 관계를 알아보며 그들만의 유용성과 구체적인 적용사례를 찾아보고 정보를 교환하면 수학에 대한 흥미와 관심을 불러일으키는데 많은 도움을 받을 것이다.

Mathematica(Martha L. Abell외 1, 1997)의 도움으로 그래프를 그리는 것은 기계적인 일이다. 더 중요한 것은 새로운 식을 만들어 내는 생각이다. 다양한 좌표계 사이의 관계도 알아보고, 필요에 의해 새로운 좌표계를 만들어 활용할 수 있는 기름진 수학적 토양을 만들어 주는 것이 교수의 주요 역할이 된다.

참 고 문 헌

김병무(1997), 흥미 및 동기유발을 위한 대학수학 수업자료와 평가, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(2)**, pp127-133.

김병무(2001), 미분적분을 위한 Mathematic연습, 서울 : 교우사.

김병무 · 윤주한(2001), 대학수학을 위한 수학사 배경, 충북대학교 과학교육연구소 과학교육연구논총, **17**, pp21-29.

김병무(2002), 대학수학에서 비유크리도 기하의 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E, 수학교육논문집, **13**, pp693 -700.

김병무(2002), 대학수학에서 급수의 합에 대한 다양한 접근, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, pp91-100.

안재구 옮김(1993), 수학을 만든 사람들(상), 서울 : 미래사.

우정호 역(1993), 어떻게 문제를 풀 것인가?(수학적 사고방법), 서울 : (주) 천재교육.

Howard Anton(1980), *Calculus*, JohnWiley and Sons.

Matha L. Abell and James P. Braselton(1997), *Mathematica by Example* Second Edition, Academic Press.

Merilyn Ryan, S.S.J,Marvin E.Doubet, Mona Fabricant and Theren D.Rockhill(1993). *Advanced Mathematics, A Precalculus Approach*, Prentice Hall.

Stephen Wolfram(1996), *Mathematica*, Third Edition Mathematica Version 3.0, Cambridge University Press, 1996.

Temple H. Fay(2000), *An Introduction to Curves in Elliptic Coordinates*, Mathematics and Computer Education 34 No.2, Spr. pp169-176.