韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 207-214.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 207-214.

대학수학에서 문제해결지도

정 치 봉 (순천향대학교)

수학교육에서 학생들이 학습을 통하여 습득하여할 중요한 주제는 수학 지식과 수학을 다루는 인지적 조작 기술일 것이다. 특히 수학지식과 지식의 활용은 문제해결을 통한 학습에서 의미 있게 학생에게 나타나며 이를 통하여 수학 학습 동기를 강화하고 수학의 가치를 느끼게 한다는 점에서 중요한 의의를 갖는다.
대학수준의 수학교육과정에서도 문제해결은 중요한 수학교육의 중심 수단으로서 목적으로서 선언되어 있지만 실제 수업에서 잘 다루고 있지 못하다. 문제해결 지도에 대한 접근 방식으로 1950년대의 문제해결 전략을 다룬 Polya, 1990년대의 메타인지적 접근을 강조한 Schoenfeld 및 최근의 여러 연구자들의 활발한 연구가 이어지고 있다. 본 논문에서 대학 수준의 문제해결 수업의 접근 방법을 소개함으로 문제해결 수업을 구현할 수 있는 지식을 제공한다. 특히 Schoenfeld의 문제해결 수업 모델은 수학 교육의 교실 수업으로의 구현 측면에서 갖는 다양한 함의를 제시한다.

서론: 대학수학 교육의 변화

대학에서 수학의 변화

대학에서 수학의 학문, 교육 그리고 연구에 대한 위상은 과거10년 사이에 큰 변화가 진행되어 오고 있다. 순수수학 풍의 핵심 수학에서 응용과 학제적 영역으로, 아카데미 풍에서 산업과 연구소 풍으로, 개인 스스로의 작업에서 협동적이고 학제적 작업으로, 공동 전문가 사이의 기술적인 의사소통에서 타학문 그리고 문화의 경계를 넘어서는 의사소통으로 전환이 진행되고 있다.

수학을 하는(do mathematics) 관점에서 학생들의 수학적 수행 (mathematical performance) 또는 수학을 하는 활동에 초점을 맞추어 대학수학 교육을 접근하는 새로운 수업 방식도 활발히 시도되어 지고 있다.

대학수준의 수학 활동에서 문제해결(problem solving), 의사소통(Communication), 아이디어 결합, 연결하기(connections), 표현하기(representation), 기술도구활용(using technological tools)등이 있다. 문제해결 활동에서 의사소통, 아이디어 연결하기, 표현하기, 기술도구 사용하기 등으로 과학으로서 수학의 연역적 그리고 귀납적 방법을 폭넓게 사용한다. 뿐만 아니라 문제해결 과정은 수학 지식 소양과 인지적 전략, 정서적 요소 등 인간의 복잡한 문제해결 노력을 포함하고 있다. 문제해결의 이러한 교수학적 어려움과 전문성을 포함하는 속성은 전형적인 전통적인 수학 수업에서는 진정한 의미의 문제해결을 잘 다루지 않게 된다. 따라서 문제해결을 지도하기 위한 수업 또는 강좌를 학생들이 접할 기회도 적다.

수학하기와 문제해결 학습

수학을 배우는 가장 좋은 방법은 수학을 하는 것이다. 수학 배우기를 요리를 배우는 일에 비유하여보자. 책을 읽어서 또는 요리 강의를 들어서 또는 만들어진 요리를 먹어보는 것으로 요리를 배울 수 없다. 요리는 전문요리사의 지도를 받으면서 직접 요리를 하여봄으로서 가장 잘 배우게된다. 요리를 지도 받는 수업은 실무 또는 실제 상황(in the context of practice)에서 학습하는 모델이 보다 효과적이다.

문제해결 수학 수업은 수학자의 지도 관리를 받으며 수학을 직접 접촉하여 수학을 다루고 수학적 결과를 생산하는 모델로 여겨지고 있다. 특히 장래에 수학을 가르치려는 학생들은 수학교사로서 수학을 다루는 지식과 수업 실무 소양과 기술을 대학수학 수업에서 배울 수 있어야 한다. 학생이 수학을 다루고 수학적 결과를 만들어내는 수업방식에 대한 연구와 시도는 최근에 활발히 이루어지고 있다.

대학수준의 문제해결 지도는 이러한 수학수업 방식의 개선 노력의 중요한 부분으로 인식되고 있다. 대학수학 교육과정에서 수학지식 체계와 수학적 조작 기술을 구성하고 있다. 대학수준의 모든 수학 수업에는 수업의 수준 내용 주제에 따라 다르지만 문제해결적인 성격을 가지고 있다. 문제해결 수업의 전형적인 요소인 아이디어 발견술, 아이디어 발전 및 전개 전략, 메타인지에 의한 판단 기술 사용 수준과 질에 따라 구별이 될 뿐이다. 따라서 문제해결 지도는 수학교육과정 만큼이나 범위가 넓은 주제이며 논쟁 주제가 된다. 수학교육은 수학 물리학 등의 과학에 비하여 경험 과학의 성격을 갖을 뿐만 아니라 인지고학, 심리학, 사회학 등과 연계된 학제적 성격을 갖고 있다. 문제해결 지도와 관련된 교육적 논의도 경험과학 및 사회과학적 요소를 갖는다.

본론: Polya와 Schoenfeld의 문제해결

[G. Polya의 문제해결]

수학교육에서 문제해결 지도를 논의할 때 수학자 G.Polya의 저서 'How to solve it'을 흔히 언급한다. Polya가 효과적인 수학 지도를 수학적 소양, 수학적 기술, 문제 공격 계획 등 어렵지 않는, 일상 생활 문제해결에서 흔히 사용하는 전략처럼 여겨지는 발견술등을 수학문제 해결이라는 관점에서 다루었다. Polya는 수학문제를 다루는 기술서, 기술자의 매뉴얼에 비유될 책을 썼다고 보여진다. 1944년 초판 이후 몇 번의 개정판을 거쳐 현재에도 여전히 현대적 의미를 갖고 있어 많이 읽혀지고 있다. Polya는 초판서문에 다음과 같이 기술하였다.(Polya 1957)

> 수학은 2개의 모습을 갖고 있다. 한 측면은 논증에 의한 체계적인 엄밀한 연역과학이다. 수학의 또 다른 측면은 수학이 만들어지는 과정 안에서는 실험과학, 귀납 과학처럼 보인다. 지금까지 수학이 발생되고 있는 , 발생 상태에 있는(in statu nascendi), 그대로 학생, 교사 그리고 일반 사람에게 제시되지 못하였다.

Polya는 수학이 구성되고 있는 그 상태에서 수학을 지도하려고 하였다. Polya는 가르치는 교사와

배우는 학생이 함께 같은 현장에서 동시에 수학이 발견되고 만들어지는 일종의 수학을 체험하는 방식의 수학학습에 관한 기술적인 여러 요소들을 제시하였다고 본다. Polya는 문제해결 4단계를 다음과 같이 제안하였다.

첫 단계: 문제 이해하기(Understanding The Problem)

둘째 단계: 문제해결 계획 고안하기(Devising a Plan)

셋째 단계: 계획 수행하기(Carrying out Plan)

넷째 단계: 뒤돌아보기(looking back)

Polya는 수업에서 문제해결의 4 단계에 따라 교사와 학생이 적절한 발문, 응답, 권고을 통한 대화술을 사용하여 문제 풀이를 수행함으로서 학생들이 수학을 하는 체험을 하도록 한다. 이러한 문제해결 수업에서 교사의 대화술은 학생의 사고 활동을 자극하고 촉진하고 적절하게 이끌어줄 수 있는 교사의 전문성이 요구된다. Polya의 문제해결 수업이 효과적으로 이루어질 수 있기 위해서는 교사의 다양한 문제해결 수업 경험이 요구된다. 교사의 다양한 문제해결 수업 경험은 수업에서 예기치 못한 , 수업 집중을 방해 할 수 있는 상황을 신속하게 그리고 적절하게 대응할 수 있도록 한다.

Polya의 저서에서는 문제 만들기, 문제 비판하기등 새로운 문제를 찾고 만들어 내는 것에 대한 내용은 부족하다. 현대적인 관점에서 새로운 문제를 찾아 제안하는 것이 중요해지고 있다. 다양한 문제해결 방법은 수학을 하는 관점에서 수학을 보다 명확하게 이해하도록 하며 수학적 방법의 유연성 유용성을 수용하는 태도를 갖도록 도와준다.

Polya의 저서에서 소개된 흥미있는 문제의 구체적으로 제시한 예로 다음과 같은 것이 있다.

1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 임을 보이라 또는 증명하여라.

이 문제는 수학적 귀납법을 엄밀하게 사용한 증명은 문제해결 수업의 중요한 관점이 아니다. 논증방식으로 그림, 도표 등 시각적 방식을 사용한 최소한 5가지 이상의 접근법을 찾아보는 것이 흥미를 일으킨다. 두 번째 관점은 좌측과 같이 수들의 합(수들이 규칙을 갖는 있는)을 곱 또는 멱승을 가진 식으로 표현 할 수 있는 방법들에 대한 관점이다. 문제 해결 후 문제를 비판하고 문제의 수학적 형식(form)의 아름다움을 느끼고 수용하도록 학생을 자극하여 주는 것이다.

2) 0에서 9까지의 숫자(digits)을 꼭 한번만 사용하여 만든 수들의 합이 100이 되는가?

이 문제는 문제해결의 4 단계를 단계마다 필요한 여러 가지 발견술 아이디어 고안, 아이디어 시험, 문제해결 후 문제 비판, 다른 문제 만들기 등 다양한 문제해결을 통한 수학하기를 흥미있게 학생들이 체험 할 수 있는 문제이다. 수들의 합이 제일 작은 경우는? 수들의 합이 제일 큰 경우는?

수들의 합이 100이 될 수없다면 100에 제일 가깝게 되는 경우는? 100에 제일 가까운 경우 몇 가지가 있는가? 수들을 합이 아니라 곱으로 했을 때 제일 큰 경우는? 이와 같이 다양한 새로운 문제들로 발전되고 만들어 질 수 있다.

Polya는 수학자를 다음과 같이 언급하였다.

수학자는 문제해결에 능숙한 사람이 되어야 한다. 그러나 능숙한 문제 해결자로서 충분하지 않다. 수학자는 의미 있는 수학 문제를 해결하여야 한다. (중략) 수학문제 해결 과정의 가장 중요한 부분은 해결을 마친 문제를 다시 돌아보는 일이다. (중략) 해결과정과 결과의 마지막 모양을 조목조목 살펴보면서 계속 주목해야 할 것들을 찾는다. 문제해결에서 어웠던 부분, 그리고 해결에 결정적으로 효과적이었던 아이디어를 깊이 음미한다. (중략) 해결을 마친 문제가 더 명확해지도록 시도한다. 문제해결에서 얻은 아이디어와 경험에 기초하여 해결할 수 있는 의미있는 새 문제를 만들어 본다. 해결한 문제를 최선을 다하여 완벽하게 소화시키는 노력은 수학 지식이 보다 잘 조직되도록 만들고 항상 사용될 수 있는 상태가 되도록 한다. **수학자는 문제를 풀고 문제를 택하고 풀이 결과를 숙고하고 새 문제를 고안하여야 한다. (중략) 문제해결에 성공하려면 성공에 이르는 바른 길 그리고 도달 가능한 길들을 시도하고 찾아야 한다. 즉 문제를 다른 관점에서 보는 것이다. 문제 변형이 필수적이다. (Variation of the problem is essential)**

[A.Schoenfeld의 문제해결]

Schoenfeld 는 수학과 수학교육에서 문제해결을 1980년대부터 대학에서 문제해결 강좌를 개설하여 직접 가르치면서 연구를 수행하여 오고있다. 수학, 인지과학 그리고 교육학의 바탕에서 대학수준의 문제해결 강좌를 개념화하고 설계하였다. 그는 문제해결이 수업으로 어떻게 구현되고 실천될 수 있는지를 실제 문제해결 강좌를 수행하면서 연구하였다.

Schoenfeld의 문제해결 수업의 개념은 수학교실 공동체를 만들어 가는 것이라고 보고 있다. 수학교실 공동체는 교사와 학생이 교실에 와서 수학 문제를 놓고 자연스럽게 수학을 하는 문화를 형성해 가는 개념이다. 수학 공동체 즉 수업에서 구성원은 문제해결자로서 수학적으로 생각하고 수학을 배우는 것이다. 교사는 수학 공동체를 시작하고 공동체의 수학 문화를 성장시키는 공동체가 수학 활동이 활발하고 풍성해지도록 지원하거나 가이드를 한다. 공동체에서 학생들은 수학자가 하는 일을 실습하면서 배우는 것이다. 따라서 교수는 학생들의 공동체에 능동적으로 참여하도록 유도하고 학생의 기대를 활성화 시켜서 수학 문화를 성장시켜 가는 것이다. 교수는 학생에게 수학적인 대화술, 활동방식을 소개하여준다.

Schoenfeld는 문제해결 수업을 수학공동체 문화의 구현라는 관점에서 여러 연구를 수행하여 왔다.수학활동, 수학적 문제 해결 활동의 본질에 대한 조사와 연구 수행하였다.(Schoenfeld 1983,1991,1994) 그의 연구에서 1)수학적 문제 해결의 본질에 대한 연구에서 문제해결지도 모델을 제안하였고, 2)문제해결 수업 수행 기술를 제시하였고 3)문제해결 강좌 설계, 강좌 운영, 평가 그리고 개선 등을 다루었다.

Schoenfeld의 조사에 따르면 과거 수학 학습 경험에 의하여 형성된 학생들의 문제해결에 대한 인식은 1) 수 또는 기호로 표현하고 이를 다루는 절차를 사용하여 문제의 정답을 구하는 것 2)수학을 하는 것은 누구로부터 제시된 학습 자료 또는 과제를 공부하는 것 3)문제해결 실력 향상을 위하여 수학적 사실과 절차를 숙달시키는 것으로 인식하고 있었다. Schoenfeld가 자신의 문제해결 강좌를 수

강한 학생들을 조사하여 관심을 갖게된 결과는 학생들이 문제 상황이 조금만 바뀌어도 학생들이 열심히 학습한 수학적 사실과 절차를 적절히 적용할 줄 모르는 현상이었다.

학생들의 수학 학습이 적절히 문제 상황을 잘 다루지 못하는 문제점을 개선하기 위하여 Schoenfeld는 자신의 문제해결 강좌의 목표를 다음과 같이 설정하였다.

1)학생들에게 수학을 하는 기회를 제공

2)수학을 하는 수업 문화를 만들기

3)수업에서 학생은 문제를 해결을 수행

즉 문제해결 강좌에서 학생이 수학을 하는 체험을 하면서 다양한 수학 공동체 문화를 동시에 경험하는 것이다. Schoenfeld는 문제해결 강좌에서 1) 수학적 관점의 형성 2) 문제해결 과정 3)의사소통 4)권위와 지도(authority and leadership)를 관심있게 그리고 중요하게 다루었다.

1)수학적 관점 형성과 개발:

수학하기(doing mathematics)란 수학의 기본 지식과 도구(사실,절차,개념)를 갖추고 문제를 해결할 때 이들 지식과 도구를 잘 사용하는 것만으로 충분하지 않다고 Schoenfeld는 보고 있다. 수학하기는 Polya도 지적했듯이 다양한 문제 상황에서 다양하고 폭넓은 수학적 관점에서 문제해결을 통찰하여 보는 적절한 능력이 요구된다. 문제해결을 보는 다양한 관점 또는 시각이 있다는 것을 깨닫는 학생의 경험은 수학의 문제해결에 유용한 다양한 관점을 형성하게 할 것이다. 수학 기본 도구 사용만으로 부족한 문제해결 수행 활동으로 기호화하기, 추상화하기, 모형화하기, 예상 가설 증명 또는 반증하기, 문제와 해답을 구성하는 전체 파악하기, 새로운 지식 조직하기 등이다. 수학적 관점 형성에 좋은 문제란 문제 해결 후에 새로운 문제로 발전, 새 문제 파생, 일반화, 실세계 문제로 발전, 수학의 서로 다른 영역을 결합해주기, 수학적 구조 구성 등 수학하기가 계속 이어질 수 있는 것을 의미한다. 좋은 문제는 수학하기에 탄력을 주는 발판이다. 좋은 문제는 문제해결 수업 문화 형성의 성공과 활기참의 핵심 요소이다.

2)문제해결과정:

문제해결 진행 단계마다 정당화하는 근거 제시를 하여야 한다. 논리적 타당성, 사실 증거 제시, 해석, 문제 변형 등 문제해결을 진행시키는 아이디어와 틀에 대한 설명 제시가 중요하다. 문제해결을 실제로 공략할 수 있는 아이디어는 문제의 해답보다 가치가 있다. 아이디어가 명확하고 문제해결에 강력한 개념 또는 계산 조작 도구가 될 수 있으며 다른 문제에 응용될 수 있는 적응 유연성을 갖을수록 좋은 평가를 갖는다.

3)의사소통:

수학교육에서 최근의 중요한 주제는 수학 학습 상황에서 학습자 사이의 원활한 의사소통이 강조되고 있다. 수학공동체 문화의 기본 수단은 원활한 의사소통이다. 수학공동체 문화의 다양성과 풍부함은 의사소통 수준에 달려있다. Schoenfeld는 교실 수업에서 이루어지는 수학활동은 사교적인 분위기 속에서 이루어진다고 보고 있다. 수학공동체를 주도하는 학습자의 사회적 성격에 대한 이해 수준

과 의사소통 프로토콜 수준이 문제해결 강좌의 수준을 결정지을 수 있는 요인이다. 수업 환경은 다양한 수준의 다양한 방식의 언어적, 시각적, 미디어적인 의사소통을 원활히 할 수 있도록 지원하여 주어야 한다. 수학적 결과를 생산할 수 있도록 의사소통을 이끌어 줄 수 있어야 한다. 수학적 의사소통의 예로서 시험적인 아이디어 설명하기, 제안하기, 권고하기, 직관하기, 발문하기, 통찰하기, 수학적 논증하기, 발표하기, 수학적으로 엄밀히 하기, 절차 세련되게 하기, 논증 상세히 빈틈없이 하기, 설명 완성하기 등을 들 수 있다. 다른 학습자와 서로 응답하는 의사소통 예는 생산적인 질문, 평가 그리고 비판하기를 통하여 상대방을 격려하고 아이디어 발전에 도움을 준다. 교수는 문제해결 수업에서 의사소통이 원활하게 이루어지도록 강력할 역할을 할 수 있어야 한다.

4) 수학적 반성 습관:

문제를 해결하고 수학적으로 사고하는 학습에서 항상 수학 활동에 대한 반성을 포함하여야한다. 발문은 반성 능력 계발에 중요한 역할을 한다. Schoenfeld는 학생에게 일상적으로 반성능력 계발을 자극하는 질문을 하고 있다. 능숙하게 수학문제를 푼다는 것은 수학적 논증에 비판적인 태도의 발전을 포함한다는 것을 Schoenfeld는 그의 연구에서 보여 주었다. 문제해결자의 반성 능력을 자극하는 질문으로 Schoenfeld는 다음과 같다.(Schoenfeld1994) “Is this airtight "(이것은 빈틈없이 완벽한가?)

“Does it convince me?"(이것이 정말 확실한가?) "Am I done with this problem?" (문제가 해결되었는가?) “How could this have been done in another way?"(다른 방법으로 할 수 있을까?)

문제해결 진행 조정은 정보를 잠재적으로 임의로 사용하는 개인적 방식에 관련된 행동 범주에 속한다고 Schoenfeld는 말하고 있다. 문제해결자가 문제 상황에서 무엇을 할 것인가에 대한 결정에 관심을 가졌다. 그러한 중요한 결정으로 계획 세우기, 목표 또는 부분 목표 선택하기, 문제해결를 주시하기, 해결과정 평가하기, 계획 개선하기, 계획 버리기 등을 제시하고 있다. Schoenfeld는 문제해결을 성공적으로 수행하기 위하여 진행을 조정하는 좋은 판단 또는 결정 행위를 기르기 위한 질문을 학생들에게 다음과 같이 하고있다.(Schoenfeld1985,1988) “What are you doing"(무엇을 하고 있는가?) "Why are you doing it"(왜 그것을 하나?) “How does it help you"(어떻게 그것이 도움이 되지?) Schoenfeld는 수학 하는 행위에 대한 이러한 반성은 서서히 내면화되어 학생이 수학을 하는 습관으로 완전하게 포함된다고 말한다.

Schoenfeld가 문제해결 강좌에서 다루었던 문제 예들은 다음과 같다.

1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$ =?

$\frac{1}{2!}+\frac{2}{31}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$ =?

2) $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$, ... ?

결론:

G.Polya의 "How to solve it"에 기술된 문제해결 수업 대화술 , 문제해결 발견술, 문제해결 전략, 문제해결 단계등은 여전히 의미있고 유효하다. Schoenfeld는 수학문제 해결의 Polya의 기본 아이디어에 수학을 하는 학습자의 모임으로서 수업이라는 공동체 문화를 만들어가는 과정으로서 대학에서 문제해결 강좌를 구현하려는 노력과 연구를 수행하였다. 대학에서 수학을 전공하는 수학과의 수업은 Polya와 Schoenfeld의 문제해결 수업 방법을 도입하여 시도해 볼 가치가 있다. 수학전공자는 학교수학 교육산업에 진출하여 수학을 가르치는 위치에 서게된다. 수학을 하는 것 ,수학 활동이 의미있는 것, 수학 활동에서도 즐거움 있다는 것 등은 문제해결 활동에서 얻을 수 있다. 문제해결 학습은 내용중심의 교육과정을 완성하는 짝이다. 결코 간과되어서는 안되는 수학 교육과정의 부분이다. 문제해결 수업 방식은 학생의 의사소통을 이끌어 내고 의사소통 능력을 발전시켜 준다. 문제해결 수업이 다른 어떤 수업방식보다 활발히 학생들의 의사소통을 원활히 사용하도록 유도하고 있다.

문제해결 수학 수업은 많은 장점에도 불구하고 수학 교실 공동체를 그리고 수학 문화를 형성해가야 한다는 점에서 지도하는 교사의 전문 능력과 경험을 요구한다. 수업 운영의 전문성과 함께 문제해결의 다양한 아이디어 제공자로서 문제해결 방향을 안내하는 안내자로서 수학의 본질을 통찰하고 있는 수학 소양을 갖출 것이 요구된다. 뿐만 아니라 문제해결은 경우에 따라서 문제 상황이 수학밖에 있을 경우 상황을 이해할 수 있는 상식과 전문지식이 요구된다. 프로젝트형의 과제 문제를 비교적 긴 기간을 통하여 지도하는 경우는 특별한 지도 능력을 필요로 한다.

수학 수업에서 좋은 문제를 소개하는 것 자체로도 의미 있는 생산적인 수업이 될 수 있다고 본다. 문제해결과 관련된 수학교육의 관점은 매우 다양하다. 특히 문제해결 지도는 학생들에게 직접적인 수학적 능력 계발에 영향을 주고 있다.

참 고 문 헌

IMACC (2002) Crossroads in Mathematics, http://www.imacc.org/standards

Lester, F.K .Jr & Garofalo,J. (eds) (1982): Mathematical Problem Solving: Issues in Research, Franklin Istitute Press, Philadelpia, Penn. U.S.A.

Ploya, G. (1957):*How To Solve It.* Princeton Univ. Press,Princeton,New Jersey,U.S.A

Polya, G (1981): Mathematical Discovery, New York, Wiley

Schoenfeld, A.H. Kaput,J, & Dubinsky,E (Eds) (1998): *Research In Collegiate Mathematics Education.III.*,AMS Providence,Rhoad Island, U.S.A.

Schoenfeld, A.H (1982):, Measures of problem solving performance and of problem solving instruction, J. for *Research in Mathematical Education* **13(1)**, pp.31-49.

Schoenfeld, A.H (1983) *Problem solving in the mathematics curriculum: A Report,* *Recommendations and an annotated bibliography*, Washinton,DC: MAA

Schoenfeld, A.H (1989) Teaching mathematical thinking and problem solving. In Lauren B. Resnick and Leopold E. Klopfer(Eds.) *Toward the thinking curriculum: current cognitive research* pp.83-103, Alexandria,VA., ASCD

Schoenfeld, A.H (1991): On mathematics as sense-making : An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics . In James Voss, David perkins and Judith Segal(Eds.) *Informal Reasoning and Education* pp.311-343, Hillsdale, NJ.

Schoenfeld, A.H (1992) : Learning to think mathematically: problem solving , metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws(Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.334-370, New York. Macmillan.

Schoenfeld,A.H(1994): Reflection on doing and teaching mathematics. In Schoenfeld, A.H (Ed.), *mathematical thinking and problem solving* pp.53-70. Hillsdale,NJ.

Wu,H. (1997) *On the Education of Mathematics Teachers*, http://math.berkeley.edu/~Wu/