韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 195-200.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 195-200.

피타고라스 정리의 다양한 증명 방법과 교육적 활용

홍 춘 희 (한국교원대학교 대학원)

본 논문은 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 통하여 피타고라스 정리를 다양한 측면에서 학습할 수 있는 방안을 모색하고자 하였다. 학습자 스스로 증명하는 즐거움을 느낄 수 있도록 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 체계적으로 제시하였고, 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 통해 수학적 아름다움을 알 수 있도록 피타고라스 정리의 증명을 활용한 테셀레이션을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

중학교 3학년 수학과 교육과정에서 학습하도록 되어 있는 피타고라스 정리는 중등학교 수학 교육에서 매우 중요한 정리로서, 고등학교 수학과 교육과정의 도형의 방정식, 삼각함수, 공간도형, 공간좌표, 벡터와 연결되는 유용한 정리이다.

수학사를 살펴보면, 많은 사람들이 피타고라스 정리를 다양하게 증명해왔고, 이러한 다양한 증명들을 모아서 Loomis(1968)는 「The Pythagorean Proposition」이란 책을 만들었다. 이 책에서 Loomis는 370여 가지의 다양한 피타고라스 정리의 증명을 대수적 증명, 기하학적 증명, 4원수 증명, 역학적 증명의 네 가지 범주로 나누어 제시하고 있다. 이러한 피타고라스의 다양한 증명은 학생들로 하여금 다양하고 새로운 시각으로 수학을 학습할 기회를 제공해 줄 것이다.

도형에 관한 여러 가지 성질을 활용하는 증명을 학습함으로써 수학적 사고력의 성장을 도울 수 있으며, 직관적으로 알기 쉽게만 지도하는 것보다 이미 학습한 여러 가지 도형의 성질을 이용하여 증명하는 것이 학습의 효율을 높일 수 있다(유종옥, 1983).

이에 본 연구에서는 먼저 문헌 고찰을 통해 피타고라스 정리의 다양한 증명들 사이의 관계를 도출하여 수학 교육적 활용에 대한 방안이나 가능성을 모색하고자 한다.

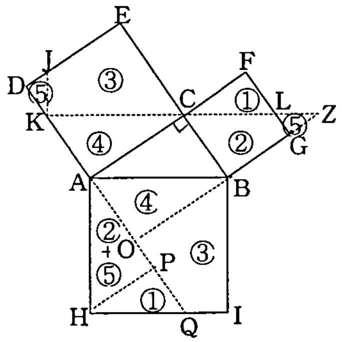
Ⅱ. 본 론

가. 증명들을 바탕으로 증명의 체계화 구성 - 보조선의 아이디어

피타고라스 정리는 대부분 직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 비교함으로 증명된다. 이러한 피타고라스 정리 증명은 다양하면서도 유사한 보조선을 사용함으로 수학적 사고력의 성장을 돕는데 효율적일 것이다. 다음은 도형 영역에서 증명을 학습하는 학습자로 하여금 증명의 단계를 밟아가면서 보조선의 아이디어를 학습하게 하고, 더 나아가 학습자 스스로 증명하는 즐거움을 경험케 하고자 시도되었다.

다음에 제시되는 증명들 중 증명 1, 증명 3, 증명 3-2, 증명 4-1은 Loomis(1968)의 「The Pythagorean Proposition」에 기하학적 증명 12, 17, 16, 25로 소개된 증명들이다. 이들 증명 방법을 확장하여 유사한 또 다른 증명을 제시하면서 결국 새로운 증명 5를 발견했고, 필요에 의해 재배열하였다.

증명 1.



<그림 1>

$\angle C = 90°$ 직각삼각형 ABC에서 각 변을 한 변으로 하는 정사각형 $ACED$, $BCFG$, $ABIH$를 그린다.

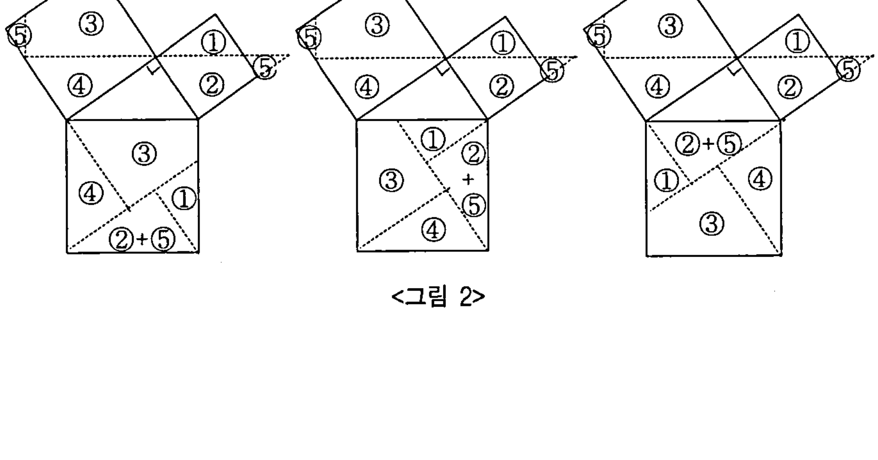
정사각형 $ACED$, $BCFG$에서 C를 지나고 $\overline{AB}$와 평행한 $\overline{KL}$을 그리고, $\overline{KL}$과 수직이 되도록 $\overline{KJ}$를 그린다. 정사각형 $ABIH$에서 $\overline{DA}$를 연장한 $\overline{AQ}$를 그리고, $\overline{AQ}$에 수직이 되도록 $\overline{BO}$와 $\overline{HP}$를 그린다. 그러면 각각의 ①, ③, ④는 서로 합동이 되므로 넓이가 서로 같다.

또한, $\overline{KL}$의 연장선과 $\overline{BG}$의 연장선이 만나는 점을 Z라 하면 $\triangle AHP \equiv \triangle ZCB$는 합동이 된다(ASA합동).

이 때, $\triangle CKA \equiv \triangle ZCB$(ASA합동)이므로, $\overline{KA} = \overline{CB} = \overline{GB}$, $\overline{DA} = \overline{AC} = \overline{BZ}$이 되고, 따라서 $\overline{DK} = \overline{GZ}$이 된다. 또, $\angle KDJ = \angle ZGL = 90°$, $\angle JKD = \angle LZG$이므로 $\triangle KJD \equiv \triangle ZLG$ (ASA합동)이 되고, 직각삼각형 AHP는 ②+⑤와 같게 된다. 즉, 사각형 $LCBG$와 직각삼각형 KJD의 넓이의 합이 직각삼각형 AHP의 넓이와 같게 된다.

이에 정사각형 $ABIH$의 넓이는 두 정사각형 $ACED$, $BCFG$의 넓이의 합과 같으므로 피타고라스 정리 $AB^2 = BC^2 + AC^2$이 성립한다. □

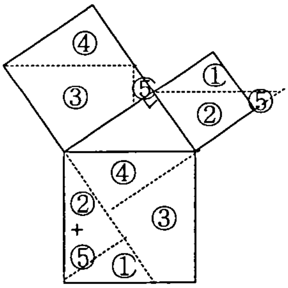
이 증명에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할 방법을 다양하게 생각할 수 있다. 다음에 제시하는 증명들은 증명 1에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형에 직각인 꼭지점을 지나며 빗변과 평행한 보조선을 그음으로 두 정사각형을 분할하는 방법은 같고, 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할만을 다양하게 생각한 증명들이다.



<그림 2>

이제 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 분할도 다양한 방법으로 생각해 보자. 다음은 증명 1에서의 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 빗변과 평행한 보조선으로 분할하는데 직각인 꼭지점 C를 지나야 한다는 것을 변형시킨 것이다.

증명 2.

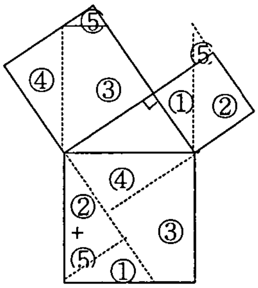


<그림 3>

이 증명은 증명 1에서의 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 좀 변형시킨 것이다. 여기서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 변형시켜도 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할은 같게 될 수 있다. 그러면 증명 1에서 생각했던 것처럼 증명 2에서도 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 다양하게 생각할 수 있다.

다음으로 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 빗변과 평행한 선분이 아닌 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 변의 연장선으로 분할해 보자.

증명 3.

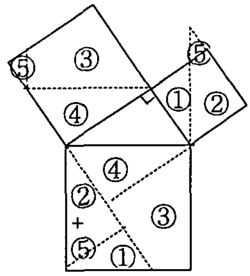


<그림 4>

이번에도 증명1에서 생각했던 것처럼 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 다양하게 생각할 수 있다.

이제 증명 1, 2, 3을 통해 다음과 같이 피타고라스 정리를 증명할 수 있다. 즉, 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 중 큰 정사각형은 빗변과 평행한 보조선으로 분할하고, 나머지 정사각형은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 변의 연장선으로 분할하는 것이다.

증명 4.

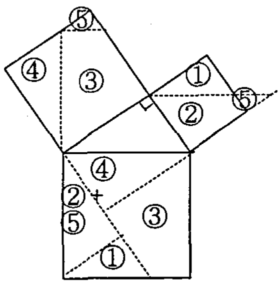


<그림 5>

여기서도 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 다양하게 생각할 수 있다.

증명1,2,3,4를 통해 증명 5를 생각할 수 있다. 증명 5는 증명 4에서의 분할에서 직각을 낀 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 분할에서 큰 정사각형과 작은 정사각형의 분할을 바꾼 것이다.

증명 5.



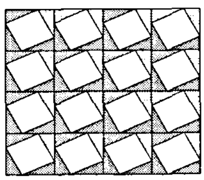
<그림 6>

여기서도 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 분할을 다양하게 생각할 수 있다.

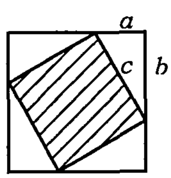
나. 피타고라스 정리의 증명을 실생활과 연계 - 테셀레이션

어떠한 학습이 실생활과 연계된다면 그 학습은 학습자로 하여금 흥미를 유발하여 학습의 효과를 높일 것이다. 특히, 테셀레이션은 수학적 아이디어와 함께 수학적 아름다움을 느끼게 하여 학습자로 하여금 흥미를 유발하는 자료로 효과적일 것이다.

테셀레이션 1.



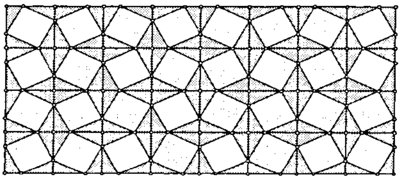
<그림 7>



<그림 8>

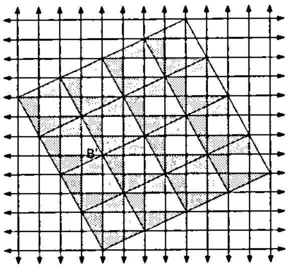
합동인 네 개의 직각삼각형을 이용하여 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 생각함으로 피타고라스의 정리를 증명하는 방법이 있다. 이 증명 방법의 그림을 평행이동 하여 연결시키면 위의 그림과 같이 평면을 채우게 된다.

위의 증명 방법의 그림을 평행, 대칭이동 하면 다음 그림을 생각할 수 있다. 다음 그림은 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 마름모가 반복되면서 평면을 채우게 된다.

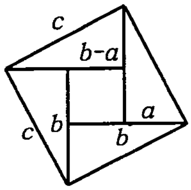


<그림 9>

테셀레이션 2.



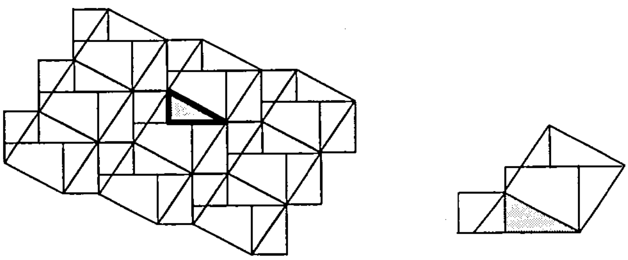
<그림 10>



<그림 11>

합동인 네 개의 직각삼각형을 빗변을 한 변으로 하는 정사각형 내부에 배열함으로 피타고라스의 정리를 증명하는 방법이 있다. 이 증명의 그림을 평행이동 하여 붙이면 위의 그림과 같은 모양을 생각할 수 있고, 이것은 평면을 채우게 된다.

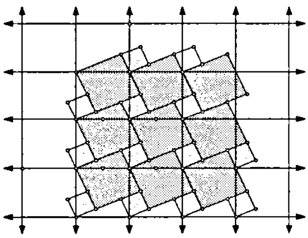
테셀레이션 3.



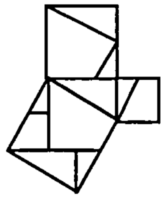
<그림 12>

직각삼각형에서 빗변을 제외한 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형과 그 두 변을 각각 가로, 세로로 하는 직각삼각형을 나란히 배열하고 그 위에 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 포개어 놓음으로 피타고라스 정리의 증명을 보여주면서 평면을 채우게 된다.

테셀레이션 4.



<그림 13>



<그림 14>

Ⅲ. 결 론

본 연구는 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 내재된 수학적 아이디어를 통한 교육적 활용을 모색하여 수학에 재능이 있는 학생들에게 교사들이 활용할 수 있도록 하는 것을 목적으로 하고 있다. 올해부터 중학교 3학년에 7차 교육과정이 적용된다. 7차 교육과정의 문제점의 하나로 교육과정의 학습을 뒷받침할 자료의 부족을 들고 있다. 이에 발 맞추어 중학교 3학년에서 학습되는 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에 대한 교육적 활용의 모색은 교사가 교수 학습 현장에서 효율적으로 지도하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다.

개발한 학습자료는 계속 보완되어야 할 것이며, 학습자료를 기초로 하여 학생들을 대상으로 학업성취나 태도 등의 효과를 검증하는 후속연구가 필요하다. 또한, 교육과정에 본 연구의 교육적 활용을 도입하기 위한 구체적이고 체계적인 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

김주봉 (2000). 도형의 분할과 지도 방안에 관한 연구. 청주교육대학교 과학교육연구소 논문집 **제 21집**, pp.1-18.

유종옥 (1983). 피타고라스 정리와 그 응용에 관한 지도. 조선대학교 석사학위논문.

Bogomolny, A. (1999). *Pythagorean theorem.* http://www.cut-the-knot.com/pythagoras/

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean proposition*, Washington: National Council of Teachers Mathematics.

Weisstein, E. W. (1999). *Pythagorean theorem* 1999-2002 Wolfram Research, http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html

Musser, G. L. & Burger, W. F. (1997). *Mathematics for elementary teachers: a contemporary approach 4th ed*, New York: Prentice-Hall, INC.