

## 음수 개념의 이해 실태 분석에 관한 연구

조 속 례 (한국교원대학교)

본 연구에서는 중학교 과정에서 기본이 되는 개념이라 할 수 있는 음수 개념의 이해실태를 중학교 1학년 학생들을 대상으로 분석하고, 예비수학교사들이 음수 개념에 대해 어느 정도의 '교수학적 내용지식'을 갖고있는지 파악하여 분석하고자 하였다. 또 학생들이 겪는 음수개념 학습에서의 어려움을 해결하기 위한 방안을 제시하여 음수 개념 지도에 도움을 주고자 한다.

### I. 서론

중학교에서 수학을 지도하는 중요한 목적 중에 하나가 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 학습을 통하여 논리적이고 합리적인 사고를 기르고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활 문제 해결이나 다른 교과목의 학습에 활용할 수 있게 하기 위한 것이다. 또한 중학교 교육과정에서 수 개념과 수 연산은 수학을 함에 있어서 기본이 되는 개념이다. 학교수학에서 수는 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수 순서로 개념을 확장하여 도입하고, 이들의 연산을 다룬다. 이러한 수 개념을 정확하게 이해하고 성질을 파악하는 것은 수학 교과 학습에서 중요한 위치를 차지하고, 사칙 계산을 능숙하게 함으로써 다른 영역에서의 학습 활동에 도움이 된다는 것을 인식하도록 지도해야 한다. 자연수의 경우는 일상 생활에서의 양 또는 셈을 인식하여 그 연산도 구체적인 사물의 크기 개념과 관련지어 학습 하지만, 이어 도입되는 음수 개념과 연산은 직관적이고 자연스럽게 학습 할 수 없다. 역사적으로도 음수, 무리수, 허수는 직관적인 접근이 어려웠기 때문에 정당한 수로 받아들이는데 오랜 시간이 걸렸다. 이처럼 오랜 시간동안 음수를 박대했다는 사실은 그만큼 전문가인 수학자들에게도 음수의 개념이 이해하기 어려운 것임을 시사한다. 이것은 음수를 처음 학습하는 학생들에게서도 많은 혼란과 어려움이 나타날 것이라고 쉽게 짐작할 수 있게 한다. 그런데 이토록 혼란스러운 음수의 개념을 7차 교육과정에서 내용의 중복과 학습량의 경감을 이유로 음수의 도입을 초등학교과정에서 삭제하였고, 음수 지도를 위한 선수학습 없이 갑자기 음수를 지도하도록 하고 있다(최병철, 2002). 따라서 음수를 지도하는 교사의 역할이 더 커지게 되었다. 음수 개념을 어떻게 지도할 것인가라는 문제가 교사에게 직면하게 된 것이다. 지금까지 최병철(2002), 김명운(1998), 신유신(1995) 등에 의해 이루어진 연구는 음수 지도 방법에 있어서 직관적인 방법의 유용성과 한계를 살펴서 효과적인 지도 방법을 찾고자 하는 연구들이 대부분이었다. 그러나 실제로 학생들이 음수 개념에 대해 어떠한 이해를 갖고 있고, 어떤 장애를 갖고 있는지에 대한 구체적인 연구가 이루어지지 않았다. 또 교사와 예비교사들의 교수학적 내용지식에 대한 중요성은 많이 강조하고 있지만, 실제로 교사 또는 예비교사를 통해서 교수학적

내용지식의 형성 정도에 대한 연구가 없었다.

따라서 본 연구에서는 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 중학교 1학년 학생들을 대상으로 음수 개념의 이해 실태를 조사·분석한다.
2. 음수 개념에 대해 예비수학교사들은 어느 정도의 '교수학적 내용지식'을 갖고 있는지 조사·분석한다.

이와 같은 연구문제를 통해서 음수 개념에 대한 효과적인 학습지도 방법을 모색하기 위한 근거를 제시하고, 학생들이 어려움을 겪고 있는 것을 해결하기 위한 방안을 제시하여 음수 개념 학습에 도움을 주고자 한다.

## II. 본 론

본 연구의 대상은 연구자가 임의로 인천광역시에 소재한 B중학교와 경기도 파주시에 소재한 P여자중학교 1학년 중 각각 3개 학급씩 총 6학급(236명)과 예비수학교사 24명을 선정하여 조사 연구하였다. 본 연구에서 사용한 검사지는 표준화된 개념 검사지가 없으므로 전문가와 수학교사들의 자문을 얻어 연구자가 직접 구성하였다. 검사지는 중학교 1학년 학생들이 음수의 개념에 대해 어느 정도 이해하고 있는지 알아보기 위한 것과 예비 수학교사들이 음수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 얼마나 갖고 있는지 알아보기 위한 것으로 검사문항은 수학교육 전문가의 검토를 받아 타당도를 검증 받았다.

### 1. 연구내용

중학교 1학년 학생들의 음수 개념에 대한 이해 정도와 어떠한 장애를 갖고 있는지 검사한 결과 대부분의 학생들이 음수 연산과 수의 대소관계를 바르게 제시할 수 있으나, 덧셈과 뺄셈보다는 곱셈과 나눗셈과 관련된 연산에서 혼란을 느끼는 것으로 나타났다. 실제로 음수의 나눗셈 문제에 대하여 학생들은 마이너스 부호에 대한 혼란과 함께 유리수 나눗셈의 학습과정에서 나눗셈을 곱셈으로 바꾼 후 제수의 역수를 취하는 알고리즘까지 더해져서 혼란이 더 커진 것으로 보였다. 또한 수학적 모델들과 관련시켜 음수를 표현하는 것에서는 훨씬 많은 어려움을 느끼고 있는 것으로 나타났다. 예를 들어, 실생활의 예와 관련지어 음수의 곱셈식을 나타내도록 하는 문항에서 45.4%의 학생들만이 옳은 답을 제시했을 뿐이었다. 그리고 수직선 모델은 대부분의 교과서에서 제시하며, 많은 연구에서 음수 연산을 잘 표현한 수학적 모델로 인정하는 지도방법임에도 불구하고, 학생들이 수직선모델로 음수의 연산을 나타내는 활동에서 학생들이 장애를 느끼고 있는 것으로 나타났고, 특히 음수의 곱셈을 수직선 위에 나타내도록 하는 문항에서는 23.3%의 가장 낮은 정답률을 보였다. 그리고 음수의 곱셈에서 곱하는 음수의 개수가 많아질 때에 부호의 혼란이 훨씬 많이 나타났고, 일부는 곱셈을 덧셈으로 착각하여 계산을 하였다. 이것은 음수의 곱셈에 대한 이해가 부족하고, 게다가 절차적인 알고리즘도 정확하게 확립하지 못한 결과이다. 학생들의 음수 개념에 대한 이해 정도를 알아보는 조사에서 학생들

은 개념적 이해가 절차적 이해에 비하여 부족하고, 음수 곱셈이 좀 복잡해지면 실수도 잦아지고 혼란을 느끼는 것으로 나타났다.

이처럼 음수의 연산에 대한 정답률이 높음에도 불구하고, 수학적 모델을 통한 음수 연산의 문항에서 정답률이 낮은 것은 학생들이 음수 연산을 형식적인 알고리즘으로써 이해하여 답을 제시하는 반면 실생활과 관련시키는 것에 있어서는 좀 더 많은 사고를 요구하기 때문인 것으로 보인다. 즉 학생들은 음수와 음수의 연산에 대한 개념적인 이해 없이 절차적인 과정만을 알고, 그 결과 음수의 연산을 곧잘 계산하는 것으로 보인다. 게다가 형식적일 알고리즘마저도 정확하게 이해한 것이 아니어서 종종 실수를 하는 것으로 나타났다. 따라서 학생들에게 음수 개념을 지도할 때, 보다 직관적인 수학적 모델과 관련시켜 충분히 이해가 가능하도록 학습한 후 형식적인 알고리즘을 지도해야 할 것이다. 특히 곱셈과 나눗셈과 실제적인 실생활 예를 관련시켜 학습할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

## 2. 연구내용

예비수학교사들이 음수 개념에 대한 교수학적 내용지식을 얼마나 갖고 있는지 알아보았다. ‘교수학적 내용지식’은 교과와 ‘내용지식’이 학습자의 이해를 위해 적절하게 변환되는 과정에 필요한 지식이다. 교과 내용을 가르치기 위한 단순한 내용지식 이상의 것으로 가르치기에 적절한 형태로써의 내용을 포함하는 특수한 지식을 말한다(박경민, 2001). 즉 학생들이 교과를 이해할 수 있도록 교과의 내용을 제시하고 조직하는 가장 유용한 아이디어의 표상형식을 포함한다. 교사가 어떤 교수학적 내용지식을 갖고 있는냐에 따라 교수방법은 다양하게 나타날 수 있다. 또한 Liping Ma(1999)에 의하면, 교사는 가르치고자 하는 주제에 대해서 철저히 이해하고 있어야 하며, 교사 자신이 여러 가지 풀이 방법, 접근 방법을 알고 그 밑바탕에 놓인 개념을 정확하게 알고 있어야 한다고 말한다. 그러나 조사 결과 대부분의 예비교사들이 음수의 실생활 예를 알고, 계산 알고리즘을 정확하게 수행하고 있었지만, 음수 연산의 수학적 모델을 다양하게 제시하지 못했고, 음수 연산 식의 문장제도 올바르게 제시하지 못했다. 즉 음수에 대한 철저한 이해가 부족하고, 기본이 되는 개념에 대한 이해의 폭이 낮음으로써 피상적인 지식만을 알고 있는 것으로 나타났다. 또한 학생들이 갖는  $(-2) \times (-3) = -6$  오개념을 적절하게 지도할 방법을 묻는 문항에 대해서 매우 절차지향적인 반응을 나타냈다. 실제로 이 학생의 오개념의 지도에서 귀납적 외삽법과 실생활에서의 모델을 사용하겠다는 예비교사는 24명 중 8명에 불과했고, 다른 8명은 부호 규칙의 알고리즘을 강조하고 있었는데, 이 중에는 음수 부호의 규칙을 공식처럼 외우도록 하겠다고 답하기도 하였다. 전체적으로 예비수학교사들이 음수 개념을 지도할 때 사용하는 수학적 모델, 그러한 모델의 표현방법, 음수 연산의 효과적인 설명방법, 그리고 음수 연산의 정확한 의미를 이해하지 못하고 있는 것으로 나타났다.

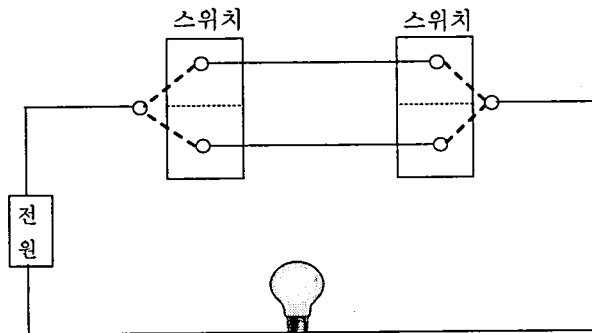
이와 같은 결과가 나온 것은 많은 예비수학교사들이 학생들이 혼란을 겪고, 오개념을 생성시키는 과정과 개념들을 전혀 접해보지 못했고, 학교수학에서 다루는 내용을 다양한 방법으로 탐구하고 이해해 볼 기회가 없었던 것으로 보인다. 또한 예비수학교사들이 학교수학에서 기본이 되는 개념을 너무 쉽고, 단순한 것으로 생각하는 경향이 있고, 그로 인해 기본적인 개념을 깊이 있게 이해해야 할

필요성을 인식하지 못한 것으로 보인다. 따라서 예비수학교사들이 학교수학에서 다루는 교과내용을 절차적이고 표면적인 부분만을 다룰 것이 아니라 특정 개념에 대한 구체적인 오개념과 교수전략을 학습할 기회가 주어져야 하고, 학교수학에서의 개념들의 배경이 되는 내용을 구체적으로 학습해야 할 필요가 있다. 또한 학교수학에서 기본이 되는 개념들이 결코 단순하고, 쉬운 개념이 아니고, 교사가 깊이 이해할 때에만 학생들에게 올바르게 지도될 수 있다라는 신념을 예비수학교사들에게 심어줄 필요가 있다. 이를 위해서는 예비교사 각자의 역량으로 교수학적 내용지식을 획득하도록 방관할 것이 아니라 예비교사 양성 프로그램에서 좀 더 체계적으로 습득되도록 지원해야 할 것이다. 교사 양성 교육에서 수학의 고등 분야의 지식과 학교수학에서 다루고 있는 기초수학 간의 관계를 이어줄 수 있도록 개선할 필요가 있다.

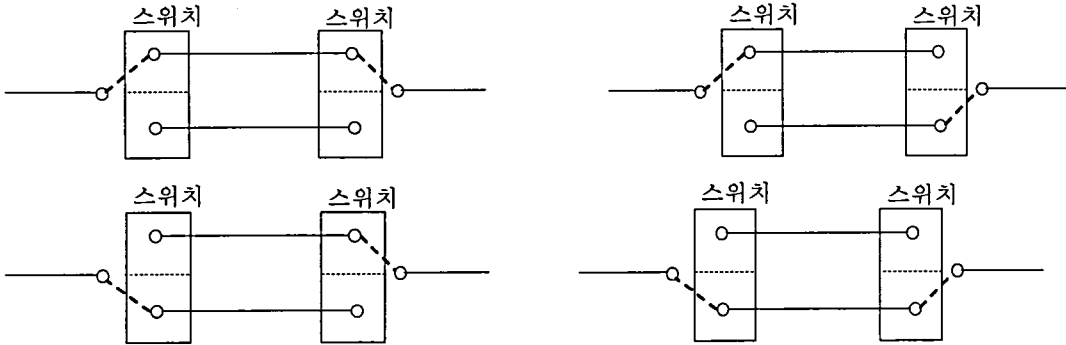
3. 스위치 모델을 통한 음수 곱셈의 부호 규칙 지도 방안

학생들이 개념적 이해를 충분히 하고, 계산할 때의 알고리즘까지도 정확하게 이해하고 수행할 수 있다면 더없이 좋겠지만, 위 조사의 결과에서 보듯이 개념적 이해와 절차적 이해에서 혼란을 느끼는 학생들이 꽤 많았다. 지금 제시하고자하는 스위치모델은 음수 연산에서 많은 혼란을 갖고 있는 학생들 중에서 절차적 이해가 부족한 학생들에게 자동화 된 음수 곱셈의 알고리즘의 획득, 즉 음수 곱셈 규칙의 절차적 이해를 돕기 위한 방안이다. 조사결과 학생들은 음수 곱셈의 알고리즘을 정확하게 이해하지 못해서 발생하는 실수가 잦은 것으로 나타났다. 곱셈공식을 외워서 계산을 하는 경우 그 기억이 조금이라도 회미해지면 계산에서 정확하지 않은 결과를 갖게 된다. 반면 스위치모델은 실생활에서 빈번하게 사용되고 있는 스위치와 전등의 불을 켜고 끄는 원리에서 직관적이고, 자연스럽게 음수 곱셈 규칙을 획득할 수 있고, 회상을 통해서 기억을 재생시킬 때에도 유리하므로 학생들이 저지를 수 있는 실수를 줄여줄 수 있을 것이다.

다음의 회로도도 두 개의 스위치에서 회로가 연결될 때에만 전기가 통하여 전구에 불이 켜진다. 즉 꺾은 점선으로 나타낸 부분을 연결시켜서 전구에 불이 켜지게도 할 수 있고, 불이 꺼지게도 할 수 있다.



[활동1] 두 개의 스위치의 회로를 연결할 수 있는 방법의 종류를 세어보자. 어떤 경우가 생기겠는가?



[활동2] 활동1에서 구한 각각의 경우에 대해서 회로가 연결되는 경우 즉 전구에 불이 켜질 때의 회로와 회로가 연결되지 않는 경우 즉 불이 꺼질 때의 회로로 구분해보자.

[활동3] 위의 활동에서 스위치의 양끝에 +, -를 써서 나타내고, 불이 켜질 때를 +기호, 불이 꺼질 때를 - 기호로 나타내자.



이 때, 불이 켜질 때와 꺼질 때를 +, - 기호를 사용하여 나타내보자.

	스위치①	스위치②	전구의 불
불이 켜질 때	+	+	+
	-	-	+
불이 꺼질 때	+	-	-
	-	+	-

[활동4] 회로에서의 부호 규칙과 음수 곱셈의 부호 규칙과 비교해보자.

이 회로는 일반 주택에서 계단에 설치되어 있는 전등에 많이 사용되고 있는 회로이다. 실제로 1층에서 2층으로 올라가는 계단에 전등이 있고, 스위치가 1층과 2층에 각각 설치되어 있다고 하자. 이 때 1층과 2층에서 같은 방향으로 스위치가 눌러져 있으면 점등이 되고, 둘 중 하나라도 스위치가 반대로 눌러져 있으면 소등이 된다.

이 회로를 통해서 학생들은 직관적으로 부호의 규칙을 알 수 있고, 주변에서 쉽게 접하는 예가 수학적으로도 접근이 가능한 것을 학생들이 안다면 수학에 대한 흥미도 높아 질 것이다.

### III. 결 론

중학교 교육과정에서 기본이 되는 수 개념에서 음수는 학생들이 많은 혼란을 느끼면서도 절차적인 알고리즘의 학습으로 끝날 계산하는 것을 알 수 있었다. 음수 연산을 표현할 수 있는 실생활 예와 새로운 수학적 모델을 연구하고, 기존에 학생들이 알고 있는 예들을 좀 더 정교화하는 작업을 통해서 교수학습과정에 활용이 용이하도록 할 필요가 있고, 그것을 학생들에게 제공하여 음수 학습에서 느낄 수 있는 장애를 보완하고, 교수 학습과정에서도 교사에게 도움이 될 수 있도록 해야 할 것이다. 또한 예비수학교사들이 후에 현장에서 수학을 가르칠 것을 감안할 때 교사 양성 프로그램을 좀 더 체계적으로 구성하여 학교수학에서의 기본적인 개념을 지도 시에 직접적으로 도움이 될 수 있도록 노력해야 할 것이다.

### 참 고 문 헌

- 교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설(III), 서울: 대한교과서 주식회사.
- 김명운 (1998). 음의 횃수에 관한 개념 정의 및 학습화전략, 대한수학교육학회 논문집 8(2), pp.527-540.
- 박경민 (2001). 교수적 내용 지식에 대한 중등 과학 예비교사의 인식 조사. 서울대학교 대학원 석사 학위 논문.
- 신유신 (1995). 음수 지도 모델에 관한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- 최병철 (2002). 음수 지도의 교수학적 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- Ma, Liping (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 신현용, 송영조(공역)(2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 서울: 도서출판 승산.
- Kline, M. (1980). *Mathematics-The Loss of Certainty*, New York: Oxford University Press. 박세희 (역) (1984). 수학의 확실성. 민음사.
- Freudenthal (1973). *Mathematics As an Educational Task*, Dordrecht: D, Reidel Publishing Company, pp.170-286.