韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 147-152.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 147-152.

중학교 1, 2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력

조 완 영 (충북대학교)
양 재 식 (충북대학교 교육대학원)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

함수의 본질은 크게 두 가지 즉, '종속성'과 '대응관계'로 볼 수 있다. 학교수학에서 함수를 도입하는 방법은 함수의 본질을 무엇으로 보느냐에 따라 달라져 왔다. 우리나라에서는 '새 수학' 운동의 영향을 받은 3차 수학과 교육과정(이후 교육과정) 이후 6차 교육과정에 이르기까지 함수를 대응관계로 정의해 왔다. 두 집합 사이의 일가성을 갖는 임의의 대응관계로서의 함수개념을 화살표 벤다이어그램이나 함수기계로 설명하고 있다. 7차 교육과정에서는 대응을 강조한 6차 교육과정과는 달리 종속으로서의 함수의 본질을 강조하여 함수 개념을 변화하는 두 양 사이의 관계라는 관점에서 도입(7-가 단계)하고 있다.

함수 개념은 계층 구조가 복잡하고 관련된 하위 개념이 존재하기 때문에 이해하기가 쉽지 않다. 함수의 정의 방식을 바꾼다고 해서 모든 것이 해결되는 것은 아니다. 학생들이 함수를 역동적으로 생각하고 함수 개념의 본질을 이해할 수 있다는 가정을 실현하는 데는 여러 가지 어려움이 따른다. 무엇보다도 함수와 관련된 모든 개념들을 새로운 정의 방식에 따라 조정하기가 어려우며, 교과서의 제시 방법이나 교사의 수업 방법 또한 수정하기가 쉽지 않다. 따라서, 7차 교육과정에서의 함수 도입 방법에 따르더라도 학생들은 여전히 함수 개념을 어려워할 것이라고 예측할 수 있다. 변화하는 양 사이의 관계를 이해하는 데는 도움이 되지만 함수 개념을 구조화하고 대상화하는 데는 어려움이 따를 수 있다. 일상생활에서 접하는 여러 가지 종속적인 관계 특히, 정비례와 반비례 같은 규칙적인 변화로 표현될 수 있는 현상을 토대로 함수 개념을 도입함에 따라 학생들은 함수 개념을 구조화하고 형식화하는 데 어려움이 생길 수 있다. 더욱이 정의역과 공역, 치역의 개념이 바탕에 깔려있는 집합 개념을 무시함으로써 이러한 개념들을 애매하게 만들기도 한다. 이러한 부분은 함수 개념을 이해하는데 장애가 될 수 있다. 함수 개념은 문맥에 따라 역동적인 변화 현상 가운데의 종속 관계를 기술하고 해석하고 예언하기 위한 수단으로서의 변수 측면과 그 규칙성을 나타내는 식 표현과 그래프 표현 그리고 다양한 대응 관계적 측면을 포괄하는, 수학 내적 외적인 제 현상을 이해하고 조직할 수 있는 수단으로 작용할 때에만 그 진정한 개념적인 힘을 발휘할 수 있는 것이다. 따라서 집합 사이의 대응이란 관계적 측면을 무시하고 변수 사이의 종속 관계만을 너무 강조하거나 변수측면을 무시하고 관계적 측면만을 강조하는 것 모두 문제가 된다.

7차 교육과정을 따르는 학생들의 함수에 대한 개념 이미지는 6차 교육과정에서 나타난 학생들의

개념 이미지와 어떻게 다른지를 알아보는 것은 의미가 있다. 또한 함수의 정의 방식의 차이가 학생들의 함수에 대한 정의 능력에 영향을 끼치는 지도 조사해 볼 필요가 있다. 본 연구의 목적은 7차 교육과정에 따라 함수 개념을 학습한 중학교 1, 2학년 학생들의 함수에 대한 개념 이미지와 함수 정의 능력을 조사하는 데 있다. 이를 위해 먼저 함수의 그래프와 대수식, 문장 표현, 화살표 다이어그램으로 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 구분하는 문항을 통해 학생들의 함수 개념 이해 정도를 알아보고 이를 토대로 학생들의 함수 개념 이미지를 유추해 본다. 다음에는 함수의 정의를 학생들이 얼마나 잘 이해하고 있으며, 그 예를 어떤 형태로 제시하는가를 조사하였다.

2. 연구문제

본 연구는 앞의 연구 목적을 달성하기 위하여 7-가 단계 수학 교과서 함수 단원을 중심으로 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 중학교 1, 2학년 학생들은 함수에 대해 어떤 유형의 개념 이미지를 갖고 있는가?

(2) 중학교 1, 2학년 학생들은 함수의 뜻을 어느 정도 진술할 수 있는가?

3. 기대되는 효과

본 연구를 통하여 다음과 같은 효과를 예상할 수 있다.

(1) 학생들의 함수 개념에 대한 이해 정도를 파악함으로써 함수를 지도할 때, 참고가 될 수 있다.

(2) 종속관계를 통한 함수 개념 도입에 따른 개념 이미지를 분석함으로써 함수 개념의 도입에 대한 대안적인 방법을 모색할 수 있다.

Ⅱ. 본 론

1. 연구대상

본 연구의 대상은 연구자가 임의로 선정하여 충북 청주시에 소재하고 있는 Y 중학교, J 중학교에서 1, 2학년 각각 50명씩 총 200명 학생들을 대상으로 조사 연구하였다. 청주시의 Y 중학교와 J 중학교 대부분의 학생들 가정의 사회·경제적 지위는 중간 정도이며, 학력 수준은 중상위권이고, 학년별로 3개 학급에서 1학기말 수학교과 성적이 50% 이상인 학생들로 선정하였다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 함수에 대한 개념 검사지는 MAA(Mathematical Associaition of America)의 함수에 관한 개념 연구 조사 시리즈에 연구 보고서를 제출한 Schwingendorf, K., Hawks, J. & Beineke, J.(1992)가 개발한 문항을 여러 수학 교사들의 자문을 얻어 본 연구자가 우리 나라의 현행 중학교 교육과정에 맞게 변형하여 만든 것이다.

이것은 학생들이 함수의 뜻을 어느 정도 알고 있고, 함수의 정의에 대하여 어떤 개념 이미지를 가

지고 있는지 알기 위한 것으로 다음과 같은 문항으로 구성되어 있다.

(1) 8가지 그래프가 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 표시하고, 그렇게 생각하는 이유 쓰기

(2) 7가지 대수식이 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 표시하고, 그렇게 생각하는 이유 쓰기

(3) 5가지 문장으로 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 표시하고, 그렇게 생각하는 이유 쓰기

(4) 5가지 화살표 다이어그램이 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 표시하고, 이유 쓰기

(5) 함수의 뜻을 진술하고, 함수의 예를 들기

문항(1), (2), (3), (4)에서는 정답률과 오답률, 무응답률을 백분율로 계산하여 제시하였고, 각 문항에 대하여 학생들이 반응한 이유를 토대로 그들이 가지고 있는 개념 이미지를 제시하였다.

문항(5)에서 함수의 뜻을 진술하는 문항에 대한 분석은 학생들이 검사지에 기술한 내용을 보고 정의에 대한 반응을 다음과 같은 범주로 나누어 그 분포를 조사하였다.

① 종속관계를 통해 함수 정의(교과서의 정의) : '두 변수 x와 y에 대하여 x의 값이 하나 주어지면 이에 따라 y의 값이 하나씩만 정해질 때, y를 x의 함수라 한다.'를 나타내는 반응.

② 두 변수 사이의 대응 : 두 변수들 간의 대응을 나타내는 반응이나 일가성과 임의성의 의미가 들어 있는 반응

③ 공식이나 대수적 용어, 또는 방정식 : 비례, 반비례, 정의역, 치역 등의 용어만 나타내는 반응이나 $y=ax+b$, $y=ax$라는 대수식을 나타내는 반응

④ 연산이나 조작 : 어떤 수를 계산하여 어떤 다른 수를 나오게 하는 것.

⑤ 함수의 개념 거의 없음 : 무의미한 낱말들을 열거해 놓은 반응.

⑥ 무응답

문항(5)에서 함수의 예를 들도록한 문항에 대한 분석은 학생들이 함수의 예로 기술한 응답을 다음과 같은 범주로 나누어 그 분포를 조사하였다.

① 화살표 다이어그램 : 화살표 다이어그램을 그려 나타낸 반응

② 대수식 y=…, f(x)=… : 대부분의 학생들이 y=ax, y=ax+b의 형태 와 같은 대수식을 제시

③ 그래프(또는 그래프에 관해 언급)

④ 변화하는 상태를 나타낸 표 : x와 y사이의 관계를 나타낸 변화표

⑤ 말로 표현한 것 : 자판기, 편지와 우체통과 같은 예들을 제시

⑥ 무응답

본 연구에서는 함수의 뜻과 예를 먼저 쓰게 하면 그에 따라 그래프, 대수식, 문장, 화살표 다이어그램을 제시한 상황에서의 함수인지 아닌지의 이유를 일률적으로 진술하게 되는 것을 방지하기 위하여 그래프, 대수식, 문장, 화살표 다이어그램의 상황에서 학생들이 어떤 개념 이미지를 갖고 함수인지 아닌지를 판단하는지 알아보고, 나중에 함수의 뜻과 예를 쓰도록 문항 구성을 하였다.

3. 결과 분석

< 문항 유형별 응답 백분율 >

문항 \ 응답	정답률(%)	오답률(%)	무응답률(%)
그래프	56.88	42.12	1.00
대수식	61.71	34.00	4.29
문장표현	49.80	38.20	12.00
화살표 다이어그램	72.20	27.80	0

그래프를 제시한 상황에서 함수인지 아닌지를 판단할 때, 학생들은 그래프의 모양을 매우 중시해서 정비례의 그래프와 일차함수의 그래프인 직선 모양에 집착하였다. '원점을 지나지 않아서, 직선이 아니라서, 점의 위치가 규칙적이지 않아서, y의 차수가 이차라서 함수가 아니다.'라는 반응을 많이 보였다. 그리고 'x의 값 한 개에 대하여 정해지는 y의 값이 한 개라서 함수이다.', 'x의 값 한 개에 대응하는 y의 값이 하나씩 있으므로 함수이다.'와 같이 7차 교육과정의 개념 정의에 영향을 받은 진술들이 있었다.

대수식을 제시한 상황에서는 대부분의 학생들이 정비례 식 $y=ax$나 일차함수 식 $y=ax+b$ 꼴의 형태를 함수로 생각하는 경향을 보였다. 일부 학생들은 '함수의 식은 반드시 x, y가 있어야 한다', '그래프를 그릴 수 있어서 함수이다.', '분모에 x($y=7/x$)가 있어서 함수가 아니다.'라고 하는 개념 이미지를 가지고 있는 학생들도 있었다.

문장을 제시한 상황에서는 대부분의 학생들은 대수식 형태로 고칠 수 있는지의 여부를 가지고 우선적으로 함수인지 아닌지를 판단하고, 그런 다음 정비례식 $y=ax$ 꼴의 형태나 일차함수의 식 $y=ax+b$꼴의 형태와 비교하여 판단하려는 경향을 보였다.

화살표 다이어그램을 제시한 상황에서 대체로 정답률이 높게 나타났다. 7차 교육과정에서는 함수의 정의를 도입할 때 모든 교과서가 정비례와 반비례를 이용하여 설명하고 있다는 것을 생각할 때 의외의 결과라고 볼 수 있다. 이는 학생들이 함수의 정의에 대한 화살표 다이어그램을 쉽게 생각하고 있다는 것을 의미한다.

본 연구에서 그래프, 대수식, 문장, 화살표 다이어그램으로 제시된 상황에서 함수인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 진술하게 함으로써 함수의 정의에 대한 개념 이미지를 조사하였는데, 정답률이 각각 56.88%, 61.71%, 49.8%, 72.2%였다. 정답률이 높다고 해서 학생들이 함수의 정의를 잘 이해하고 있다고 보기는 어렵지만 학생들이 화살표 다이어그램과 대수식을 제시한 상황에서 가장 정답률이 높게 나타났다. 그래프나 문장으로 표현된 상황에서 대수식($y=ax$, $y=ax+b$ 등)의 형태로 고칠 수 있는지의 여부를 가지고 우선적으로 함수인지 아닌지를 판단하려는 잘못된 개념 이미지를 가지고 있는 학생들이 상당수가 있다는 것이 그 진술을 통해 나타났다. 또한 어떤 상황보다 6차 교육과정에서 함수의 개념 도입 시 사용되었던 화살표 다이어그램을 가장 잘 받아들이고 있는 것으로 나타났다. 학생들이 진술한 내용들 대부분 6차 교육과정에서 이루어졌던 선행연구들의 반응과 유사하게 나

타났지만 7차 교육과정의 개념 정의에 영향을 받은 진술들이 상당수가 있었다.

<함수의 정의에 대한 각 범주별 반응 빈도 표>

학년 / 범주	1학년		2학년	
	빈도수	%	빈도수	%
종속관계를 통해 함수 정의	7	7	10	10
두 변수 사이의 대응	3	3	18	18
공식이나 대수식 용어, 또는 방정식	27	27	28	28
연산이나 조작	2	2	0	0
함수의 개념 거의 없음	19	19	20	20
무응답	42	42	24	24

함수의 뜻을 서술형으로 진술하도록 하는 문항에서는 위의 표에서 보듯이 1학년 7%(7명), 2학년 10%(10명)가 종속관계를 통해 함수 정의를 진술하였다. 그러나 이 학생들 모두 7차 교육과정에서의 함수의 정의 즉, 'x의 값이 하나 주어지면 그에 따라 y값이 하나씩 정해질 때 y를 x의 함수라고 한다'를 정확히 제시하지는 못하였지만, 7차 교육과정에서의 함수의 정의 방식의 영향을 받은 것으로 보이는 'x의 값 하나에 대한 y의 값이 하나씩 존재할 때 함수이다', 'x의 값이 주어지면 그에 대한 y의 값이 나타나면 함수이다.', 'x의 값에 따라 y의 값이 정해지면 함수이다.'로 진술하였다.

2학년은 46%의 학생들이 공식이나 대수식 용어, 대응으로 함수 정의를 이해하고 있는 것으로 나타났다. 또한 1학년도 공식이나 대수식 용어 등으로 함수 정의를 이해하고 있는 것이 27%(27명)로 2학년과 마찬가지로 가장 많았다. 함수의 개념이 거의 없거나 응답하지 않은 학생은 1학년은 61%(61명), 2학년은 44%(44명)로 여전히 함수의 개념 정의를 제대로 진술하지 못하는 학생이 많았다.

< 함수의 예에 대한 각 범주별 반응 빈도 표>

학년 / 범주	1학년		2학년	
	빈도수	%	빈도수	%
화살표 다이어그램	1	1	4	4
대수식 $y=\cdots$, $f(x)=\cdots$	37	37	52	52
그래프	6	6	10	10
변화하는 상태를 나타내는 표	5	5	4	4
말로 표현한 것	10	10	6	6
무응답	41	41	24	24

위의 표는 학생들이 제시한 함수의 예를 통해서 그들이 가지고 있는 개념 이미지를 범주별로 제시한 것이다. 1, 2학년 모두 $y=\cdots$, $f(x)=\cdots$의 대수식을 제시한 학생이 1학년은 37%(37명), 2학년은 52%(52명)로 전체의 44.5%가 되어 가장 많았다. 이것은 앞에서 제시한 그래프, 대수식, 문장, 화살표 다이어그램을 제시한 문항에서 학생들이 대수식에 집착하는 경향을 보인 것과 일치한다. 화살표 다이어그램을 제시한 학생은 2.5%, 그래프를 제시한 학생은 8%, 말로 표현

한 것은 8%, 함수의 예를 제시하지 못한 학생들(무응답)은 1학년이 41%(41명), 2학년이 24%로 1, 2학년 전체의 32.5%였다. 그러나 일부 학생들이 자판기나 편지와 우체통 같이 비례관계를 연상시키는 언어로 표현한 것은 함수의 개념을 종속관계로 보려는 학생들이 늘어가고 있다는 점에서 시사하는 바가 크다.

Ⅲ. 결 론

중학교 1, 2학년 대부분의 학생들은 함수인지 아닌지를 판단할 때, 함수의 정의보다는 함수에 대한 변질된 개념 이미지를 이용했다. 또한 많은 학생들이 함수의 개념 정의를 진술할 때 변질된 개념 이미지를 갖고 진술하거나, 함수의 개념이 거의 없거나 응답하지 않은 것으로 보아 여전히 함수의 개념 정의를 제대로 진술하지 못했다. 즉 함수 정의 능력과 관련해서 많은 학생들이 함수의 정의를 거의 이해하지 못한 상태이며, 제대로 진술하지 못하였다.

본 연구의 과정에서 나타난 함수의 개념 정의에 대한 학생들의 변질된 개념 이미지를 올바르게 고쳐 함수의 정의를 제대로 진술할 수 있도록 하기 위해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 변수의 개념이 확실하지 않은 상황에서 함수의 본질을 '종속'으로 파악하기란 쉽지 않다. 따라서 '생활장면에서 변화하는 두 양'을 고려한 많은 예를 개발하여 변수를 '변하는 대상'으로 볼 수 있도록 하는 변수에 대한 개념 학습을 충분히 해줄 필요가 있다.

둘째, 7차 교육과정에서는 정비례 · 반비례를 통해 함수의 개념 도입이 이루어지므로 학생들이 함수인지 아닌지를 판단할 때, 일부 학생들이 정비례 · 반비례의 식으로 판단하려는 경향을 보여준다. 따라서 함수의 개념을 지도할 때, 정비례 · 반비례뿐 아니라 그래프, 문장, 화살표 다이어그램에서 나타나는 다양한 예를 제공할 필요가 있다.

셋째, 7차 교육과정에서는 7-가(중학교 1학년) 단계에서 종속관계를 통해 함수의 뜻을 정의 하지만 10-나(고등학교 1학년) 단계에서는 대응관계로 정의한다. 중학교 학생들이 함수의 정의를 제대로 이해하지 못하는 상황에서 고등학교에서 갑자기 정의 방식이 바뀐다면 개념 정의에 큰 어려움이 생길 것으로 예상된다. 따라서 함수의 의미가 종속관계에서 대응관계로 자연스럽게 연결될 수 있도록 하는 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Schwingendorf, K.; Hawks, J. & Beineke, J. (1992). Horizontal and vertical growth of students' conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel(Eds.), *The concept of function : Aspects of epistemology and pedagogy* pp.133-150, MAA Notes and Report Series. U.S.A. : Mathematical Association of America.