韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 141-146.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 141-146

중학교 1학년 직관기하영역에서의 증명요소분석

조 완 영 (충북대학교)
정 보 나 (충북오창중학교)

중학교 기하교육의 목적은 학생들의 수학적인 상황을 보는 기하학적인 직관과 논리적 추론능력의 향상이다. 그러나 이 두 가지 모두 만족스럽지 못한 실정이다. 본 고에서는 중학교 기하교육의 문제를 직관기하와 형식기하의 단절이라는 보고, 직관기하에서 증명의 학습요소를 미리 학습하여 직관기하와 형식기하를 연결하자는 대안을 제시한다. 이를 위해 7-나 교과서의 증명요소를 분석하고자 하였다. 관련문헌을 검토하여 7가지 증명의 학습요소를 선정한 후, 교과서를 분석하였다. 분석 결과, 기호화를 제외한 다른 증명의 학습요소는 매우 빈약한 것으로 나타났다. 직관기하 영역에 대한 교과서 구성이 개선될 필요가 있음을 알 수 있다.

I. 서 론

수학 특히 기하는 실용적인 이유에서 발생하여 경험적 지식이 누적되면서 이론적으로 체계화되어 왔다. 경험적 지식이 이론적 지식으로 체계화되는 과정에서 연역적이고 형식적인 논증이 중요한 역할을 한다. 기하의 경우, Euclid '원론'에서 실제적인 지식이 이론적인 지식으로 체계화되었으며, 유클리드 원론의 영향으로 기하의 발생적인 측면을 소홀히 하고 형식적이고 연역적인 증명을 강조하는 형식기하로 발전하는 계기가 되었다.

Euclid 기하는 기본 원리인 정의, 공준, 공리를 논리적 존재론적 기초로, 삼각형의 합동조건과 닮음조건을 이용하여 연역적이고 종합적인 방법으로 정리를 증명하는 논증기하로 전통적인 기하교육의 중심원리였다(우정호, 1998). 유클리드 기하의 영향으로 직관과 실험, 실측, 발견과 탐구, 발견의 논리인 분석이 소홀히 다루어져 왔다. 7차 수학과 교육과정에서도 6차 교육과정에 비해 형식적이고 연역적인 증명을 약화시키기는 했지만 유클리드 기하의 영향에서 크게 벗어나지는 못하였다. 기하교육과정을 살펴보면, 초등학교와 중학교 1학년에서 직관기하를, 중학교 2, 3학년에서 연역적인 논증기하인 형식기하를 주로 다룬다. 역사발생적 원리에 따른 교육과정 구성이라는 측면에서 보면 자연스러운 교육과정 배열로 보이나 직관기하와 형식기하의 연결이라는 관점에서 문제가 있다. 초등학교와 중학교 1학년에서의 직관기하는 중학교 2, 3학년에서 다루는 평면논증기하, 즉 형식기하를 학습하기 위한 기초단계이다. 그러나 직관기하에서는 형식기하의 요소를 소홀히 다루고 형식기하에서는 직관기하적인 요소인 발견과 탐구의 과정을 소홀히 다룬다. 직관기하와 형식기하의 단절은 논증기하를 중심으로 하는 형식기하를 어렵게 만들고 결과적으로 학생들은 증명을 기피하게 된다. 이러한 문제를 해결

하기 위해 유클리드 원론 중심의 기하교육에서 벗어나고자 했던 20세기 초의 수학교육 근대화운동이래 많은 연구자들이 노력해 왔으며, 직관기하와 형식기하의 관계 설정 문제가 주요쟁점이었다. 그러나 직관기하와 형식기하의 연결 문제는 여전히 해결되지 않고 있다.

신동선외(1998)는 기하교육의 문제를 궁극적으로 '의미부재'로 판단하고, 학생들에게 스스로 학습내용의 의미를 깨닫게 하기 위해서 학생들 스스로 발견하는 귀납적 활동과 연역적 증명과정이 통합되어야 한다고 주장한다. 이를 위해 실험실 활동, 즉 탐구활동을 강조하며, 탐구 활동이 가능한 환경조성이 시급하다고 주장한다. 학생들이 유의미한 기하학습을 위해서는 직관기하와 형식기하의 연결은 필수적이라고 할 수 있다.

본 논문은 직관기하와 형식기하를 연결시킬 수 있는 방법을 찾고자 시도하는 연구의 일환으로, 직관기하의 측면에서 형식기하적인 요소를 어느 정도 다루고 있는 지를 알아보기 위한 연구이다. 직관기하를 학습하는 7학년에서 형식기하에서 다루는 증명의 요소를 미리 학습함으로써, 학생들이 8학년에서 증명을 자연스럽게 인식하게 될 것이라는 것이 본 논문의 가정이다.

이를 위해, 먼저 관련 문헌을 검토하여 증명의 구성요소를 분석하고, 직관기하 영역인 중학교 1학년 교과서에서 증명요소가 어느 정도 다루어지는지를 분석한다. 이러한 분석을 통해 직관기하와 형식적 증명의 연결방법, 직관기하의 내용구성 방향과 지도 방법에 대한 시사점을 찾고자 한다.

Ⅱ. 본 론

1. 직관기하에서 증명의 구성요소

직관기하가 어느정도 형식기하와 연결되어있는지를 조사하기 위해, 증명과 관련된 학습요소를 분석한 선행연구를 고찰하였다. 류성림(1998)은 증명과 관련되어 중요하게 다루어야 할 학습요소로 기호화, 증명, 그림의 의미, 문장화, 증명의 의의를 들고 있다. 여기서 기호화란 말로 기술된 문장을 수학적 기호를 사용한 문장으로 나타내는 것을 의미한다. 그림의 의미란 증명에서 사용되는 그림을 하나의 특정한 그림이 아닌 모든 도형의 일반적인 대표로 이해하는 것을 말한다. 문장화는 명제를 증명할 때 보통은 기호로 된 결론에 이르게 되면 증명을 끝내게 되는데, 증명의 내용을 확인하기 위해 기호로 된 결론을 다시 일반명제의 문장으로 바꾸어 쓰는 것을 의미한다. 증명의 의의란 도형의 성질을 실험 · 실측에 의한 경험적 방법으로서가 아니라 평행선의 성질이나 삼각형의 합동조건 및 닮음조건, 원의 성질 등을 이용하여 연역적 증명을 해야 하는 필요성이나 그 의미를 이해하는 것을 말한다. Galbraith(1981)는 증명의 구성요소로서 8가지를 도출하였다. 검토의 다양성 및 완전성, 외부적인 원리의 이용, 추론의 연결 관계, 반례에 의한 반증, 가정과 결론의 분리, 함의와 동치의 구분, 정의와 성질의 구분, 증명의 구조 등이다. Dreyfus와 Hadars(1987)는 6가지 구성요소를 제시하였다. 우선 정리는 예외가 없다는 것, 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, 증명의 일반성, 복잡한 도형의 해석 및 증명에의 이용, 가정과 결론의 분리, 옳은 명제의 역이 반드시 옳지 않다 등이다. 서동엽(1999)은 여

러 가지 연구들을 종합하여 증명의 구성요소로 20가지를 추출한 후, 이것을 추론의 구성과 관련된 요소 10가지와 증명의 의미와 관련된 요소 7가지로 재분류하고 있다. 정리하면 다음과 같다.

<추론의 구성과 관련된 요소>

· 추론규칙 : 분리논법, 연접논법, 긍정논법, 조건삼단논법, · 기호화, · 정의와 성질의 구분

· 적절한 그림의 이용, · 기본적인 원리의 이용, · 검토의 다양성 및 완전성, · 도형의 해석 및 증명에의 이용, · 문장화, · 반례를 이용한 반증의 방법, · 등식의 증명

<증명의 의미와 관련된 요소>

· 추론의 연결관계, · 함의, · 가정과 결론의 분리, · 함의와 동치의 구분, · 정리의 예외없음

· 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, · 증명의 일반성

증명의 새로운 대안인 정당화를 주장한 조완영(2000)은 경험적 정당화, 연역적 정당화, 권위적 정당화로 구분하고 있다.

본 고의 목적이 직관기하인 7-나 단계에서 증명의 구성요소를 분석하기 위한 것이므로, 연역적인 증명과 관련된 부분은 제외하고, 류성림의 기호화, 그림의 의미, 문장화를, 조완영의 경험적 정당화를, 서동엽의 추론의 구성요소 중 앞의 요소들과 중복되지 않은 검토의 다양성과 완전성, 도형의 해석 및 증명에의 이용, 반례를 이용한 반증의 방법을 선택한다. 증명의 구성요소의 분석틀로, 기호화, 그림의 의미, 문장화, 경험적 정당화, 검토의 다양성과 완전성, 도형의 해석 및 증명에의 이용, 반례를 이용한 반증의 방법 등 7가지를 사용한다.

2. 교과서 분석

제 7차 교육과정의 중학교 7-나 수학(강옥기외, 2000) 교과서가 채택되었다. 직관기하에 부합되는 탐구활동이 제시되어 직관기하의 학습에 적절한 것으로 판단되었기에 채택되었다. 교과서 분석은 우선 교과서 체제를 근거로 단원별로 분석하였다. 교과서 구성을 표로 제시하면 다음과 같다<표1>.

<표 1> 7-나 교과서의 직관기하의 단원구성

대단원	중단원	소단원
기본도형과 작도	기본도형	점, 선, 면, 각(I -1)
		평면에서의 위치관계(I -2)
		공간에서의 위치관계(I -3)
	작도와 합동	간단한 도형의 작도(I -4)
		삼각형의 작도와 결정조건(I -5)
		합동인 도형의 성질과 삼각형의 합동조건(I -6)
도형의 성질	평면도형	다각형(Ⅱ-1)
		원과 부채꼴(Ⅱ-2)
	입체도형	다면체(Ⅱ-3)
		회전체(Ⅱ-4)

중단원의 끝에는 "좀더 생각해 보자", "학습 활동으로 수리 능력 기르기", "연습 문제"가 제시되어

있다. 각 대단원의 끝에는 “단원 학습 내용 정리”, “단원 마무리 문제”가 제시되어 있다.

소단원별로 증명의 구성요소를 분석하여 정리하면 다음과 같다<표 2>.

<표 2> 소단원별 분석표

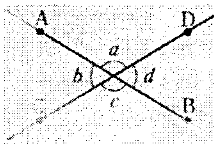
소단원 \ 분석	A	B	C	D	E	F	G
Ⅰ-1	◎	◎					
Ⅰ-2	◎	◎	☆	☆		☆	
Ⅰ-3	◎	◎					
Ⅰ-4	◎	◎	◇				
Ⅰ-5	◎	◎		☆			
Ⅰ-6	◇	◇		☆			
Ⅱ-1	◎	◎			☆		
Ⅱ-2	◇	◇		☆			
Ⅱ-3	☆	◎					
Ⅱ-4							

(A: 기호화, B: 그림의 의미, C: 문장화, D: 경험적 정당화, E: 검토의 다양성과 완전성, F: 도형의 해석 및 증명에의 이용, G: 반례를 이용한 반증의 방법, ◎: 절반이상, ◇: 20-50%비중, ☆: 20%이하의 비중)

본 고에서는 ☆표가 있는 Ⅰ-2와 Ⅱ-1을 예로 제시한다.

$\boxed{\text{Ⅰ-2}}$는 기본도형과 작도라는 대단원에서 기본도형이라는 중단원의 두 번째 소단원인 평면에서의 위치관계이다. 이 부분에서는 경험적 정당화로 볼 수 있다. 그 예는 아래와 같다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AB, CD가 한 점에서 만나 네 개의 각 ∠a, ∠b, ∠c, ∠d를 만들 때, 다음 활동을 하여보자.



(2) 다음 순서에 따라 ∠a와 ∠c의 크기를 비교하여라.

① ∠a+∠b의 크기를 설명하여라.

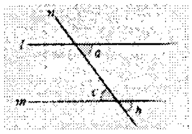
② ∠b+∠c의 크기를 설명하여라.

③①,②를 통하여 ∠a=∠c임을 설명하여라.

점과 직선 사이의 거리 부분에서도 직교, 수선의 발이라는 용어를 정의하고 그림과 함께, 기호로 표현하고 있다. 동위각과 엇각은 그림을 통해 정의되고 있다. 평행선과 동위각의 관계는 삼각자 2개를 이용한 탐구활동에 의해 설명하고 있지만, 평행선과 엇각의 관계는 동위각을 이용한 연역적 증명을 증명이라는 용어를 사용하지 않은 채 증명하고 있다.

오른쪽 그림에서 두 직선 l, m이 서로 평행하면 ∠a와 ∠b는 동위각이므로, ∠a=∠b이고, ∠b와 ∠c는 맞꼭지각이므로, ∠b=∠c이다.

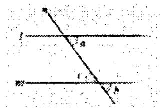
거꾸로 엇각은 ∠a와 ∠c의 크기가 같으면 두 직선은 서로 평행하다.



이러한 증명은 연역적 증명의 형태를 띠고 있지 않지만 두 직선 l, m이 평행하면 엇각의 크기가 같다는 사실을 증명한 것이다. 마지막부분에서는 문장화를 볼 수 있다. 교과서의 다음 부분에서는 정당화 문제가 발전문제로서 제시된다.

문제7 오른쪽 그림에서 엇각인 ∠a와 ∠b의 크기가 같으면 두 직선 l, m 이 서로 평행함을 설명하여라.

문제9. 오른쪽 그림에서 l//m이면, ∠a+∠b =180 °임을 설명하여라



Ⅱ-1 은 도형의 성질이라는 대단원에서 평면도형이라는 중단원의 첫 번째 소단원인 다각형이다. 본 단원에서 제시된 대각선의 수와 대각선의 총수를 구하는 활동은 검토의 다양성과 관련된다.

그러나 n각형의 경우를 추가하여 일반화를 시도하는 탐구활동이 제시되었다면, 일반화가 비약 없이 자연스럽게 이루어질 수 있을 것이다. 교과서에서는 탐구활동없이 대각선의 총수를 구하는 공식이 제시되고 있다.

문제3 다음 표의 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

다각형	한 꼭지점에서 그은 대각선의 수	대각선의 총수
삼각형	0	3×0÷2=0
사각형	1	4×1÷2=2
오각형	2	5×2÷2=5
육각형	□	6×□÷2=□
칠각형	□	□×□÷2=□
팔각형	□	□×□÷2=□

일반적으로, n각형의 n개의 각 꼭지점에서 대각선을 그으면 (n-3)개씩 그어진다.

이때, 각 대각선은 2번씩 그어지므로 n각형의 대각선의 총수는 다음과 같다.

(n각형의 대각선의 총수)= $\frac{1}{2}n(n-3)$

꼭지점의 총수

한 꼭지점에서 그을 수 있는 대각선의 총수

분석결과를 종합하면, 대부분의 단원이 주로 탐구활동에서 시작하여 용어를 정의하고, 그림과 함께 기호화하는 것을 주 내용으로 하고 있었다. 이는 직관기하영역이기 때문에 당연한 활동으로 여겨진다. 그러나 한 단원에 많은 용어가 정의되고 기호화되고 있어서, 학생들이 과연 이 용어와 기호를 모두 이해가능한지에 대한 의문이 들었다. 따라서 초등학교와 연계하여 기호화의 도입을 조절할 필요가 있을 것으로 생각된다. 7가지 증명의 요소 중에서 문장화, 검토의 다양성과 완전성이 약간의 비중을 차지하였고, 도형의 해석 및 증명에의 이용, 반례를 이용한 반증의 방법은 해당되는 부분이 없었다. 직관기하와 형식기하를 연결하는 데 중요한 역할을 하는 경험적 정당화는 적은 비중을 차지했으며, 모두 발전문제로 제시되고 있었다. 형식적 증명과의 단절을 막기 위해서는 적은 비중으로 다루고 있는 경험적 정당화를 좀 더 많은 비중으로 다루어야 한다. 또한 학생들이 증명의 구성 요소인 도형의 해석 및 증명에의 이용, 반례를 이용한 반증 방법을 학습할 수 있도록 다양한 상황을 제시하는 것이 필요하다.

Ⅲ. 결 론

본 고에서는 기하교육의 문제를 직관기하와 형식기하의 단절이라는 관점에서 이 갭을 해소하기 위한 방안으로 직관기하에서 형식기하의 연역적인 증명요소를 미리 학습시키자는 주장을 하였다. 이

를 위해서는 교과서의 구성과 교사의 수업지도가 중요하다. 직관기하에서 증명의 요소가 얼마나 학습되고 있는 지를 분석하기 위해, 7-나 교과서의 직관기하영역을 분석의 대상으로 하였다. 분석결과, 직관기하에서 기호화를 제외한 증명의 구성요소가 빈약하게 다루어짐을 알 수 있었다. 따라서 직관기하와 형식기하의 단절을 해소하기 위해서는 직관기하 영역에 대한 교과서의 구성이 개선될 필요가 있다. 직관기하의 탐구활동과 기호화 활동에 충실하면서 증명의 구성요소를 미리 학습하게 하는 활동들이 많이 포함되어야 할 것이다. 경험적 정당화와 문장화, 반례에 의한 반증방법, 도형의 해석 등이 학습될 수 있는 다양한 상황을 제시할 필요가 있다.

많은 수학교육 연구들은 교사의 역할이 가장 중요하다고 강조한다. 본 고에서는 교과서의 직관기하 영역을 분석하였지만, 실제 수업을 하는 교사가 교과서를 재구성해서 사용하는 경우도 있다. 따라서 교과서의 분석만으로 기하수업을 추론하는 데는 한계가 있다. 그러므로 실제 기하수업에 대한 분석이 또한 필요하다. 현장교사는 중학교 기하교육의 문제를 어떻게 생각하는 지, 직관기하를 어떻게 가르치고 있고, 형식기하와 어떻게 연결시키는지, 교과서를 어떻게 활용하는 지에 대한 분석을 통해 직관기하와 형식기하의 단절 상태를 파악하고, 문제점과 개선방안에 대한 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2001). 중학교 수학 7-나, 서울: 두산.

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색, 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로-, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

조완영 (2000). 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구, 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

Dreyfus, T. & Hadars, N. (1987). Eucild may stay- and even be taught. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte(Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12- NCTM 1987 Yearbook*, Reston: NCTM, pp. 47-58.

Galbraith, P.L. (1981). *Aspects of proving: A Clinical investigation of process. Educational studies in Mathematics*, 12. pp. 1-27.