韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 105-111.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 105-111.

분수 학습에서 정신모델 구성을 위한 유추의 역할

고 상 숙 (단국대학교)
김 규 상 (단국대학교 대학원)

본 연구자는 아동이 분수 개념을 이해하는 정신모델 속에서 인지과정이 어떻게 나타나며, 적용되는지, 그리고 이를 바탕으로 분수 학습에 표현되는 정신모델 구성을 위한 유추의 역할을 살펴보고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

Ⅰ. 서 론

수학교육의 중요한 목적 중의 하나는 학생이 그들 스스로 학습한 수학을 이해하는 것이다(Hiebert & Carpenter, 1992). 그러나 초등학교 아동에게 분수 학습은 오랫동안 어려운 영역이며, 현재에도 가장 어려운 단원에 속한다. 그 이유는, 아동이 이들 수와 그 연산에 대한 강력한 개념적 메카니즘을 계발하지 못한 상태에서 교사가 기호화와 계산 기술에 압력을 주기 때문이다. 아동들은 분수의 개념을 이해하고, 분수의 지식을 적용하여 문제를 해결하는데 많은 어려움을 겪고 있다. 그 원인은 분수 개념 자체가 여러 가지의 의미, 즉 부분/전체, 측정, 몫, 비, 연산자, 소수 등으로 해석될 뿐만 아니라, 아동이 이전에 학습한 자연수와는 다르게, 표기법이나 크기 비교, 연산 방법에서 훨씬 복잡하다는 데 있다. 그래서 학교 수업은 많은 시간을 근본적인 이해보다는 이들 사이에 일어나는 절차적 기능과 계산 방법에 중점을 두고 수업을 진행한다. 예를 들면, 아동들은 $3\div\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}$의 역수를 취하여 3과 2를 곱하여 6이라고 답을 구하면서도, 사과 3개를 $\frac{1}{2}$씩 나누면 6쪽이 된다는 구체적 의미와 연결짓지 못한다. Armstrong과 Bezuk(1995)는 아동의 분수 이해에 관한 연구들의 결론을 다음과 같이 말한다. 대부분의 아동은 (1) 충분한 이해보다는 기계적이고 절차적인 지식을 익히고 있으며, (2) 의미에 기초한 규칙보다는 구문적인 것에 초점을 두고 있으며, (3) 연산을 설명하기 위해 모델을 사용하는데 어려움을 느끼며, 실제적인 조작과 기호 알고리듬을 잘 연결하지 못하는 것 같다. 분수가 수학적으로 중요한 개념임에도 불구하고, 이와 같이 아동의 분수 학습 결과가 좋지 못한 이유는 무엇인가? 분수 개념 자체가 어렵고 복잡한 것은 사실이지만, 상황을 더욱 악화시키고 있는 것은 수업 방법이 적절하지 못하기 때문이다. Streefland(1991)는 교사가 분수 개념의 복잡성에 대한 인식이 부족하고 기계적인 수업 접근을 하고 있다고 지적한다. 분수 개념은 부분-전체, 몫, 비, 연산자, 측정의 의미를 가질 뿐만 아니라, 퍼센트, 소수 등과 밀접한 관련이 있다. 그러나 분수 수업은 교육과정 상

다른 내용과 거의 연계 없이 제시되고, 고차원 수준의 추상화나 알고리즘화에 지나치게 치중하고 있다. 그러므로 교수법은 실재와 동떨어져 있으며, 틀에 박힌 규칙의 적용에 초점을 두고 있다.

따라서, 교실에서 나타나는 분수 학습의 문제점을 다음과 같이 요약할 수 있을 것이다. 첫째, 아동 스스로 지식을 구성하고 그 지식의 타당성을 인식하게 하기보다는 전통적인 절차를 일방적으로 제시한다. 둘째, 분수의 크기 비교나 연산을 다룰 때, 의미를 중시하지 않는다. 기호는 많은 정보가 축약된 경제적인 의사 전달 수단이지만, 기호에 앞서 의미를 충분히 이해할 때 기호는 비로소 효과적인 수단이 된다. 셋째, 아동의 경험에 기초한 지식이 거의 활용되지 않으며, 분수 개념과 연산이 실생활과 분리되어 있다. 넷째, 아동에게 다양한 활동과 학습 자료를 제공하지 않는다. 주로 기호를 가지고 학습하며, 교사와 학생, 학생과 학생간의 의사소통이 이루어지지 않는다. 수업에서 학생이 다양한 상황을 경험하고 상황간의 공통성을 이해함으로써 추상화에 도달할 수 있게 해야 한다. 다섯째, 분수의 양적인 이해에 대해 거의 고려하지 않는다. 수 개념의 바탕이 되는 것은 수에 대한 크기 감각이다. 일차적으로 분수에 대한 크기 개념이 없으면 크기 비교나 연산은 기계적으로 다루어 질 수밖에 없다. 양적인 개념의 발달 즉, 분수의 '크기'에 대한 인식은 분수를 의미 있게 이해하는 능력의 기초가 된다. 또한, 학교 수업은 주로 칠판과 설명으로 이루어지고 있으며, 몇 개의 예제를 제시한 후, 아동이 숙달될 때까지 반복해서 기능을 연습시킨다. 교사들은 아동을 평가할 때, 연산의 결과에 주목하고 그 결과가 맞으면 분수 개념을 잘 이해하고 있다고 생각한다. 그래서 아동들이 연산의 의미를 어떻게 알고 있는지 또는 기계적으로 알고리즘을 어떻게 적용하는지에 대해서 거의 고려하지 않는다. 결국 통분과 크기 비교, 연산 등의 기능적인 측면에 중점을 둠으로써 적합한 분수 개념을 이해할 수 있는 충분한 기회를 제공하지 못하고 있다. 이처럼 분수 학습은 많은 문제점을 지니고 있다. 따라서 교사는 현재의 수업 패러다임을 개선해야 하며, 아동들이 구체적 교구를 가지고 다양한 상황을 경험할 수 있도록 해야 한다. 그리고 아동들이 각각의 상황을 이해할 수 있도록 충분한 시간을 제공하여야 할 것이다.

따라서, 본 연구자는 분수학습에서 문제점을 조사해 보고, 아동이 분수 개념을 이해하는 정신모델 속에서 인지과정이 어떻게 나타나며, 적용되는지, 그리고 이를 바탕으로 분수 학습에서 필요한 정신모델 구성을 위해서 유추의 역할을 살펴보고자 하는 것이 본 연구의 목적이다.

II. 본 론

수학적 개념 이해에 필수적인 것은 그 개념의 구조를 충실히 반영하는 정신적 표상과 정신 모델을 갖는 것이다. 특별히 수학적 학습에서 정신 모델의 중요한 요소는 정신모델이 나타내는 관계이다. 그와 마찬가지로, 그들은 추상적인 생각을 다룰 수 있는 힘을 갖는다. 동등하게 표현할 수 있는 관계의 복합성은 추론에서 대단히 중요하다. 관계를 명백하게 나타낼 수 있다는 것은 아동에겐 종종 어렵다(Halford, 1993). 그러나 이 능력은 수학적 사고에 매우 중요하다.

아동이 수학적 개념을 다루는데 추론과정의 본질은 수학 교육자에게 주된 관심사였다. 유추 같은 추론과정은 현존하는 지식으로부터 새로운 아이디어를 구성하기 위한 기본적이며 아직도 강력한 매카니즘이다. 학습이란 이전에 취득한 지식을 바탕으로 세워지는 활발한 구성 과정이라는 것이다(Baroody & Ginsburg, 1990;Davis, Maher,& Noddings, 1990; Duit, 1991; von Glaserfeld,1990). 따라서, 유추적 추론이 어떻게 수학을 구성해 가는지, 어떻게 학생에게 도움이 되는지를 설명할 것이다.

1. 유추의 정의

유추(analogy)는 복잡 미묘한 비교인데, 두드러진 차이가 있는 대상들간에 여러 유사한 관계들이 관여된 복잡한 비교이다. 유추는 한 영역(원천-source)에서 얻은 지식을 다른 영역(표적-target)에 적용하는 것이므로 창의적 아이디어의 중요한 출처로 자주 간주된다. 따라서, 이전에 경험했던 유사한 지식에 관계시키고 이를 기초하여 추론하는 것을 우리는 유추적 추론(analogical reasoning)이라 한다. 유추의 기본은 서로 상이한 영역 사이에 대응적인 관계를 찾고 만들어 내는 데 있다. "새로운 것을 이전의 지식에다 연결시킴으로써 친근한 것같이 보이게 하고, 친근한 것을 새로운 시각에서 봄으로써 낯선 것같이 보이게 하는 것-이것은 인간 지능의 기본적인 측면이며 이것은 바로 유추적 추론 능력에 달려 있다"라고 말하였다(Gick & Holyoak, 1983).

2. 분수개념의 복합성

분수학습의 어려움에 대한 주요한 원인을 두 가지로 말하자면, 먼저, 함께 표현되는 수의 관계를 생각할 필요와 둘째는 분수를 나타내는 여러 가지 의미의 존재를 말할 수 있다.

우선, 진분수 $\frac{2}{5}$를 생각해 볼 때, 이 표현은 한 쌍의 숫자 사이의 관계를 내포하고 있다. 수학학습에서 아동들이 분수를 해석하려면 두 개의 관련 없는 개념을 동시에 조화시켜야 한다. 즉, 분수의 의미는 서로 다른 관계의 분자와 분모를 고려함으로써 결정된다. 예를 들면, "5등분 중에서 2등분"(부분/전체). 비록 숫자 2와 5가 특별하게 지시하는 대상물(부분이나 성분)이 될지라도, 그들은 단독적인 의미를 가지는 것은 아니다, 즉, "2등분"이나 "5등분"은 우리에게 분수에 대한 개념을 줄 수 없다. 더군다나, 그 성분 중에 하나가 변할 때마다 분수의 값은 변한다. 예를 들면, $\frac{2}{5}$에서 분자는 변하지 않고 분모만을 바꿔보면, 다양한 분수의 양으로 나타낼 수 있다: 예를 들면, $\frac{2}{5} > \frac{2}{10}$ 지만, $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$이다. 이것은 실제로 복합성이 차원성에 의해 측정되는 일반적인 원리의 특별한 예인 것이다. 정수는 일차원적인 반면에, 분수는 이차원적이며, 그들의 복합성은 상당히 일치한다. 자연수의 숫자는 일차원적인 속성을 가지고 있고, 그들의 위치를 나타내기 때문에 그들 자신의 의미를 가지고 있다. 예를 들면, 수 257에서 숫자 2는 백의 자리값에 있기 때문에 2백으로 나타낸다. 이와 같이 많은 아동들은 분수를 단독숫자로써, 독립적으로 영향을 미치는 세분화된 실재로 분자와 분모를 갖는 수로 받아들인다. 결국, 분수에 대한 아동들의 이해는 기본적인 절차 개념보다는 기계적인 절차의 지식

을 의미한다.

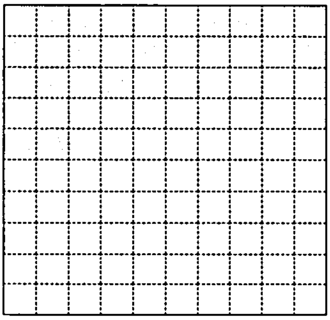
어려움의 두 번째 원인은 분수를 나타내는 다양한 의미에서 비롯된다. 이 의미는 부분/전체, 소수, 비, 몫, 연산자 와 측정으로 나타낼 수 있다(Kieren, 1976; 1980). 이런 다양한 의미는 아동들이 수를 해석하는데 새로운 견해를 더할 수 있다. 지금까지 아동들은 수를 "고정된 의미"로만 경험하였다. 즉, 수 257에서 숫자 2는 고정된 2백으로 생각하였다. 그러나 숫자 2는 자리값에 따라 여러 값으로 변할 수 있다(예, 527, 752). 그러나 분수에서는 성분 숫자의 의미는 고정될 수 가 없다. 예를 들어, 분수 $\frac{2}{5}$는 다음과 같은 의미를 가지고 있다: ① 5등분 중에서 2등분 (부분/전체), ② 2 나누기 5 (몫; 소수표현), ③ 수나 대상 또는 집합의 두 부분 (연산자), ④ 2 대 5 (비), ⑤ 0과 1사이의 수직선 안의 한 점 (측정).

3. 분수개념에 유추를 이용한 정신모델

분수학습에서 사용되는 유추는 아동들이 새로운 개념과 절차를 쉽게 통합시킬 수 있고, 이와 관련된 상황에 적용시킬 수 있으며, 그들이 다룰 분수를 정확하고 융통성 있게 발전시킬 수 있다. 아동들의 초기 활동은 실세계 상황과 밀접한 대상들을 이용해서 분수학습을 시작한다. 즉, 어떤 대상을 똑같이 나눠본다거나 전체에 대한 부분을 색을 칠하거나, 바둑알을 이용하기 등등.

현행 교과서 [3학년 가]의 분수학습에서 아동들은 색종이를 이용한 등분할의 개념을 익힌다. 그래서 똑같이 나눠본다거나 반으로 접어보고 또다시 반으로 접는 활동을 한다. 그러면서 부분과 전체의 크기를 비교해 본다. 그 다음 같이 면적 모델을 이용하여 색칠한 부분을 숫자로 나타내게 하는데, 이 때부터 분수를 처음 접하게 된다.

첫째로, 면적 모델을 통한 분수개념에서 유추가 어떤 역할을 하는지를 살펴보면, 아동들이 면적 모델을 통해서 $\frac{10}{10}$에 대한 이해는 $\frac{100}{100}$으로 유추할 수 있다. 위 과정에서 색칠된 부분은 100개중에서 43개를 나타낸다. 다시 말하면, $\frac{43}{100}$이다. 우리는 $\frac{10}{100}$과 $\frac{1}{10}$이 동치라는 것을 유추할 수 있다. 즉, $\frac{43}{100}$은 $\frac{10}{100}$이 4개이므로 $\frac{40}{100}$이고, $\frac{1}{100}$이 3개이므로 $\frac{3}{100}$이 된다. 다시 말하면, 이 색칠된 부분은 $\frac{43}{100}$과 $\frac{4}{10}+\frac{3}{100}$으로 설명될 수 있다.



➡ 100분의 43 ➡ $\frac{43}{100}$

< 구체물 조작 > ➡ < 언어적 표현 > ➡ < 기호적 표현 >

둘째로, 동치분수에 관한 정신모델에서 살펴보면, 분모가 다른 분수계산에서 아동들은 종종 오류를 범한다. 예를 들어, $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}$와 같이 분모가 다른 분수계산을 마치 자연수 계산을 하는 것처럼 $5\frac{2}{7}$라고 나타낸다. 여기에서 중요한 이해는 분할 단위에서 크기와 등분하는 수의 보상관계이다. 아동들이 색종이를 접어보거나 잘라보는 초기 활동을 통해서, 분할의 수는 점점 더 커지고, 분수의 크기는 점점 더 작아진다는 사실을 유추할 수 있다. 이런 활동에서 아동들은 분모가 다른 분수를 비교할 때, 동치분수에 대한 적절한 욕구가 아동들에게 필요하다. 이것은 분모가 공통분모로 제공되지 않을 때 훨씬 더 어려운 것이다. 예를 들면, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$. 그래서 우리는 동치분수 개념을 색종이 접기 활동을 통하여 아동들에게 쉽게 접근할 수 있다. 아동들에게 친숙한 면적 모델의 구조와 연합된 언어를 가지고 새로운 동치개념을 아동들이 가지고 있는 지식에 삽입시킬 것이다. 이 과정에서, 아동들은 6등분한 면적에 두 부분을 색을 칠한다. 그러면 $\frac{2}{6}$가 된다. 그리고 다시 반을 접으면, 전체는 12가 되고 색칠한 부분은 4가 된다. 즉, $\frac{4}{12}$가 된다. 아동들은 전체 면적이 변함이 없기 때문에, $\frac{2}{6}$와 $\frac{4}{12}$가 동치임을 알 수 있을 것이다. 따라서 추가적인 동치분수는 더 많이 접을수록 만들 수 있을 것이다. 종이접기 활동을 통한 행위는 아래에서 보여지는 것처럼 형식적인 과정으로 쉽게 안내될 수 있다.

색칠한 부분에 2를 곱한다 $\leftrightarrow \underline{2 \quad \times 2}$
전체 면적에 2를 곱한다 $\leftrightarrow 6 \quad \times 2$

$\frac{2}{6}$에 1(즉, $\frac{2}{2}$)를 곱한다 할지라도, 원래 $\frac{2}{6}$을 계속 유지한다는 것은 아동들에게 대단히 중요한 것이다. 여기서 우리는 이러한 유추과정 속에서 아동들에게 "*약분*"의 개념을 도입할 필요가 있다. 예를

들어, $\frac{4}{12}$는 분자와 분모의 공통인수로 "*약분시켜*" 최소 단위분수로 나타낼 수 있는 것이다: 예를 들면, $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{4}$.

Ⅲ. 결 론

현행, 분수 학습의 교육과정을 살펴보면, 몇 번의 등분할 경험과 부분-전체 개념을 다루고 나서 곧바로 기호를 사용하여 분수를 표현하게 하고 있다. 그리고 부분-전체로서의 분수를 다룬 후, 수로서의 분수를 인지하기도 전에 바로 분수의 크기 비교와 연산으로 연결된다. 크기 비교와 연산에서는 많은 시간을 할애하여 형식화적인 기호 알고리즘을 자세히 다루고 이를 공식화하고 있지만, 실제적인 의미와 관련하여 분수의 양적인 개념이나 연산개념을 다루고 있지 않다.

본 연구는, 이런 문제에 대한 개선안으로서 수업시간에 유추적인 정신모델을 사용하여 가르친다면 아동은 그것이 왜 그렇게 되고, 또 어느 때 그것을 사용하는 지에 대한 통찰을 제공받을 수 있다. 따라서 계산 과정을 가르치기 전에 분수개념의 기초가 되는 의미들을 상기시켜 어떤 답의 크기에 대한 유추적인 생각과 아동이 분수의 개념을 이해하는데, 유추를 통한 정신모델과 과정에 적용시킬 수 있다는 것을 알 수 있었다. 그리고 이를 바탕으로 분수 학습에서 표현되는 정신모델 구성을 하는데 유추적인 정신모델을 적극 활용을 한다면 보다 효과적인 학습능률을 올릴 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (2002). 초등학교 수학 3-가, 서울: 대한교과서 주식회사.

————. 초등학교 수학 3-나, 서울: 대한교과서 주식회사.

————. 초등학교 수학 4-가, 서울: 대한교과서 주식회사.

————. 초등학교 수학 4-나, 서울: 대한교과서 주식회사.

Armstrong & Bezuk (1995). *Multiplication and of fraction*. 85-119, New York, NY.

Baroody, A.J. & Ginsburg, H.P. (1990). Children's learning: A cognitive view. In R.B. Davis, C.A.Maher, & N.Nodding(Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* pp.51-64, Reston,VA: NCTM.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws(Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.65-97, New York: Macmillan.

Gick, M.L., & Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.

Halford, G.S. & Wilson, W,H. (1993). Creatively and capacity for representation: Why are humans so creative? *Newsletter of the Society for the Study of Artificial Intelligence and Simulation of Behaviour.* Special Theme: AI and Creativity, 85, 32-41.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, cognitive, and Instructional Foundations of Rational Number. In R. Lesh(Ed), *Number and Measurement: Paper from a research workshop.* Columbus, OH:ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1980). Knowing Rational Numbers: Idea and Symbols. In M.M.Lindquist(Ed), *Selected Issues in Mathematics Education.* NCTM.

Post, T.R., Behr, M.J., & Lesh, R. (1982). Interpretation of Rational Number Concepts: *Mathematics for the Middle Grade 5-9,* 1982 Yearbook. NCTM.

Streefland, L. (1991). *Fraction in Realistic Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.