

## 공간 시각화 과정에서의 교구의 역할

전 평 국 (한국교원대학교)

정 부 용 (인천연성초교)

본 연구의 목적은 초등학교 5학년의 도형 영역에서 도형의 모양과 변환을 대상으로 공간 시각화하는 과정에서 나타나는 교구의 역할을 알아보고자 '공간 과제'를 수행하는 과정에서 학습 능력 수준에 따라 나타나는 교구 활용 의존도 및 교구의 역할을 비교·분석하고자 질적 연구를 수행하였다.

양적 측면에서 아동 C(학습능력 하: 33%), 아동 A(학습능력 상: 18%), 아동 B(학습능력 중: 15%) 순으로 나타났지만, 문제 해결 과정의 단계에서 나타나는 교구의 활용은 서로 간의 다른 특징을 보였다. 친근감을 느낄 수 있는 교구 사용을 통해 아동은 과제 해결을 위한 수학적 사고를 시작하였고, 새로운 방법 모색에 관심을 가졌으며, 유의한 시행착오를 제공하여 아동에게 자신의 사고에 대한 반성과 구체화를 촉진시켰다.

### I. 서론

#### A. 연구의 필요성 및 목적

일상적인 생활 공간에서 숨쉬며 체험하는 입학 이전의 어린 아동들은 도형에 대한 개념을 비형식적이며 직관에 의존하는 경향을 띠고 있다. Piaget에 의하면 직관적 사고 단계에 머무르는 4~7, 8세 시기의 아동들에 대해서 Shuard & Williams(1970)는 이 시기의 아동의 사고는 지각, 즉 보고, 듣고, 만지고, 움직이는 경험에서 오는 해석이 우세하다고 진술하였다(Del Grande, 1986).

NCTM(1989)에서는 자기 주위의 상황과 그 물체에 대한 직감(intuitive feeling)을 '공간 감각'이라고 하고, 공간 감각은 종종 '공간 지각 능력' 혹은 공간 시각화의 '공간 능력'으로 불리어지는 데, 정신적으로 회전시키거나 접거나 물체를 시각적으로 제시하도록 조작하는 몇몇 방법으로 움직임 혹은 공간적인 배치를 상상할 수 있는 것과 같은 공간적인 능력이라 하였다. 초등 기하에서 공간 시각화의 중요성이 언급되는 것은 사실적이고 구체적인 표현들의 대부분이 공간적인 성분들을 포함하고 있을 뿐만 아니라 감각 기관에 의존하여 해석되기 때문이다.

도형 영역에 '공간 감각'을 신설하고, 학습자의 '활동 중심' 학습을 강조한 제 7차 초등학교 수학과 교육과정에서 물리적 공간에 시·공간적 탐구 과정은 연역적 구조로의 기하 학습에 필연적으로 요구되는 과정으로서, 공간에 대한 좋은 감각을 기르기 위해서는 직관에 영향을 받는 지각의 오류를 수정하고, 아동의 공간적 경험과 공간적 사고를 자극하는 시각적인 구체물이나 반구체물들의 활용이 필요하다. 아동에게 제시된 추상적이고 일반화된 지식의 형태보다는 조작 가능한 교구와 함께 제공된 상황과 환경을 통해 흡수한 인상과 수학적 정보는 직접적인 지식의 획득보다는 구체적인 수학적

개념의 확립을 도와 이를 추상화시킴으로써 폭넓은 개념 발달의 기초를 제공할 수 있기 때문이다.

아동들에게 감각 운동적 놀이를 통한 창조 활동은 유희와도 같다. 교구를 통한 학습 안내는 놀이의 연장일 수도 있으며, 놀이는 아동들의 관심의 대상이다. 이러한 아동에게 능동적인 참여와 학습과의 의사 소통 기회가 제공되었을 때, 아동들은 많이 활동할수록 많이 배운다. 아동의 손과 눈에서 익숙해진 형태의 기억과 방향에 따른 변화, 그들간의 상호 관련성, 놀이 활동을 둘러싼 주변의 움직임과 상대방이 바라보는 관점의 차이 등은 공간적 사고를 돕고 새로운 시각 변화를 초래할 것이다.

교구 조작은 문제에 대한 보다 적극적인 도전감을 불러일으키고, 또한 학습 능력 수준에 따라 동일한 교구라 할지라도 문제를 해결하는 과정에서 조건을 찾고 그들 간의 관계를 찾아 문제를 해결한 후, 반성을 하는 과정에서 교구의 의미는 다르게 해석되어 질 수 있다. 교구 조작은 아동이 원하면 언제든지 새로운 공간을 구성해 나갈 수 있는 통로와도 같으며 무엇보다도 자신을 둘러싼 공간의 주인은 바로 '자신'임을 인식한다는 것이다.

## B. 연구 문제

본 연구는 초등학교 5학년의 도형 영역에서 도형의 모양과 변환을 대상으로 공간 시각화하는 과정에서 교구의 역할을 알아보기 위한 연구 문제는 다음과 같다.

1. 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도는 어떻게 나타나는가?
2. 문제 해결 과정에서 학습 능력 수준에 따른 교구의 활용은 어떻게 나타나는가?

## C. 용어의 정의

### 1. 공간 시각화(spatial visualization)

공간 감각은 공간 지각 능력, 혹은 공간 시각화의 '공간 능력(spatial ability)'으로 불리어지는 데, 본 연구에서는 교구의 움직임 경로가 조작을 통해 축적된 경험을 문제 해결에서 정신적인 활동으로 전이시키는 과정이 관심의 대상이므로, 앞에서 제시된 공간 능력을 '공간 시각화'로 정의하며, 공간 시각화가 이루어지기 위해 선행되는 시각적인 대상물들 간의 관계 지각 및 보유 능력은 교구 활용의 범주에서 제외되므로 '공간 과제' 활동에서는 정신적인 조작 및 변형하는 능력만을 다루고자 한다.

### 2. 학습 능력 수준

본 연구에서 학습 능력 수준은 5학년을 대상으로 하여 한 학기 동안에 실시한 수학 성적을 기준으로 상(100~90점)·중(79~70점)·하(59~50점)로 구분한다.

### 3. 교구

교구는 공간 시각화 활동을 구체적으로 돕기 위한 시각적 매개물이자 공간 과제를 돕는 안내자로서 과제 해결 전반에 걸쳐 활용된다. 특히 점, 선, 면의 위치를 대신하는 표시 기능(스티커, 기호 붙이기)과 격자 무늬와 같은 보조 기능의 시각적 자료들은 평면과 입체 공간에서의 위치 및 움직임 경로를 나타내는 것으로서 직관적·시각적인 이해에 도움을 주기 위한 조작적 자료이다.

### 4. 교구 활용 의존도

교구 활용 의존도란, ‘공간 과제’의 문제를 해결하는 데 걸린 총 시간과 이에 따른 교구 총 사용 시간 및 문제 해결 과정 단계 별로 소요된 시간과 그에 따른 교구 사용 시간을 의미한다.

### 5. 문제 해결 과정

‘공간 과제’ 활동에서의 문제 해결 과정은 ‘문제 이해(문항 1)’, ‘문제 해결(문항 2)’, ‘반성 및 적용(문항 3)’의 3단계로 구성되어 있으며, 이 단계간에는 교구의 특징 및 성질이 서로간의 연관성을 가지고 문제의 난이도가 높아짐에 따라 교구의 의미 탐색, 적용력, 그리고 학습 능력 수준에 따른 교구의 의존도를 파악할 수 있도록 구성하였다.

### D. 연구의 제한점

1. 본 연구의 공간 시각화에서는 5학년을 대상으로 도형의 모양과 변환만을 공간 시각화의 측면으로 축소하여 다루었기 때문에 본 연구에서의 내용이 공간 시각화의 모든 활동을 포함하지 않는다.
2. 본 연구의 연구 결과는 특정 지역의 특정 아동을 대상으로 ‘공간 과제’ 활동 수행 시, 개개인 교구를 활용하여 답하는 개인 활동, 아동간의 의사 소통, 교구의 효율적인 활용을 위한 수업 시간 운영을 통해 얻어진 결과로 제한적이다.
3. 본 연구의 공간 활동 과제에 제시된 교구들은 공간 시각화 활동을 촉진하기 위한 가장 효율적인 교구라기보다는 학습 보조 자료 중의 하나로 다루어졌다.

### E. 기대되는 효과

학습 능력 수준에 따른 교구 활용의 의존도 및 활용의 구체적인 예는 교사가 수업에 교구를 활용하고자 할 때, 언제 어떻게 활용할 지에 대한 교수법 및 아동들 스스로 교구의 의미 개발, 이를 학습에 적용하여 문제 해결로 이끌어 가는 과정의 이해는 교사의 역할에 대한 시사점을 제공할 것이다.

## II. 연구 방법 및 절차

### A. 연구 대상

본 연구는 충청북도 청주시 흥덕구 분평동에 소재하고 있는 N 초등학교 5학년 1반 3명을 수학 학습 능력 수준에 따라 상·중·하로 구분하여 연구 대상으로 선정하였다.

### B. 연구 절차

Frostig & Hoffer의 일곱 가지 과제 범주의 요소와 제 7차 초등학교 수학과 교육과정에 새로이 신설된 ‘공간 감각’ 영역 부문에 관련된 공통된 요소를 찾은 후, 본 연구의 공간 시각화에 적절한 활동 요소를 중심으로 ‘공간 과제’를 개발하였다. 2차에 걸쳐 수정·보완을 한 ‘공간 과제’는 1차 ‘공간 과제’ 예비 수업(2002. 9. 16 - 2002. 9. 25, 총 6회)은 학습 능력 수준이 비슷한 4명의 아동을 대상으로 교사 없이 개인별 교구 조작을 통한 수업이 진행되었으며, 2차 ‘공간 과제’ 예비 수업(2002. 10. 7

- 2002. 10. 12, 총 5회)은 개인차가 나타나는 5명의 아동과 수업 교사가 참여하여 '공간 과제' 예비 수업을 진행하였다. 최종 본 수업을 위한 11개의 '공간 과제' 활동 내용은 아래와 같다.

- 1) 옮기기-도형을 여러 방향으로 옮겼을 때, 움직이기 전·후의 변화 관찰, 합동 관계 파악
- 2) 뒤집기-거울의 특징을 이용하여 거울의 위치에 따라 변화하는 모양 관찰, 대칭 관계 파악
- 3) 돌리기-마주보는 밑면의 합이 7인 주사위를 제시된 방향으로 돌렸을 때, 눈의 위치 및 방향 파악
- 4) 종이접기-색종이를 가지고 머릿속으로 이동, 돌리기, 뒤집기, 자르기 한 후, 상상한 모양을 그림으로 표현
- 5) 공통점을 찾기-삼각형을 1개, 2개씩, 3개씩, ... 사용하여 변과 변이 만나는 다양한 도형을 만들어 보고, 전체-부분 간의 재배열을 통해 도형들 간의 공통된 성질과 관계를 찾아 분류해 보는 활동
- 6) 쌓기나무 그림을 보고 여러 방향에서 바라본 모양 그리기-평면과 입체 공간을 다루는 과제로써 쌓기나무의 그림을 보고 공간 시각화 활동을 통해 여러 방향에서 바라본 모양을 그려보는 활동
- 7) 쌓기나무를 직접 쌓아보고 이를 그림으로 표현하기-층별로 각기 다른 색깔의 쌓기나무를 이용하여 쌓아 본 후, 여러 방향에서 바라본 모양과 개수를 관찰, 이를 점지에 직접 그려보는 활동
- 8) 여러 방향에서 바라본 그림을 보고 공간시각화를 통해 쌓기나무 그려보기-여러 방향에서 바라본 모양과 그 칸 위에 쌓아놓은 쌓기나무의 개수를 보고 공간 시각화를 통해 쌓기나무를 그려보는 활동
- 9) 직육면체 탐구-주사위 또는 직육면체의 교구를 관찰한 후, 전개도와 겨냥도를 그려보는 활동
- 10) 공간 시각화 활동을 통해 직육면체 그려보기-직육면체의 구성 요소 및 전개도를 찾아보는 활동
- 11) 평면 도형을 이용하여 입체도형을 만들어보고 보고, 생활 속의 관계 찾기-평면 도형을 종류를 선택하여 내가 만들고 싶은 입체도형과 전개도를 완성, 또한 생활 속에서 도형과의 관계를 탐구하는 활동

### C. 자료 수집 및 방법

#### 1. 문서 자료

공간 시각화의 구체적인 내용을 포함하는 11개의 '공간 과제' 활동은 '학습지' 및 '관찰 일지', 그리고 비디오 녹화 및 프로토콜 녹음 자료에 대한 '발췌 기록물'은 교구를 활용한 아동의 사고 흐름이나 다양한 활동 결과가 기록되어 있는 문서 자료이다. 그 외 1대의 비디오 녹화는 활동 전반적인 활동을 촬영하여 아동들이 정신적인 시각화에 의존하는 모습과 교구 활용의 방법 및 시간 확인, 또한 학습 능력 수준간의 아동들이 같은 시각에 벌어지는 문제 상황 파악, 질문이 대두되는 수업 상황을 기록하기 위해 촬영하였다. 이는 3명의 프로토콜 녹음 자료가 반영할 수 없는 행동적 측면의 자료를 분석하는 데 도움을 주었다. 3대의 카세트는 아동 개인간의 공간 시각화 및 교구 활용을 통한 사고의 흐름을 언어적으로 분석하는 데 유용하였다.

#### 2. 관찰 자료

(1) 해결 시간: 각 활동마다 제한 시간을 두어 각각의 문제를 해결하는 데 소요되는 시간을 개인별

로 초시계를 이용하여 측정한 후 기록하였다.

(2)교구 사용 시간: 연구자는 정해진 위치에서 각 활동마다 제한 시간을 두어 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도를 측정하기 위해 활동별 체크 리스트에 아동들이 사용하는 교구의 처음과 끝 시각을 15초 단위로 기록하였으며, 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도를 백분율로 환산하였다.

#### D. 자료 분석

자료 분석은 질적 분석을 위한 첫 단계로서 학습지는 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도는 시간 측정 비교와 질적인 방법을 비교하여 제시하였고, 교구 활용에 대한 비교는 학습지에 제시된 결과 및 프로토콜의 상황을 제시하여 상황을 소개하였으며 이외에 특이 사항을 첨가하였다.

### III. 결 과

#### A. 결과

1. 연구 내용 1: '공간 과제' 활동 전반에 걸쳐 나타난 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도는 아동 C(33%), 아동 A(18%), 아동 B(15%) 순으로 나타났으나, 실제적인 문제 해결 상황 속에서는 나타나는 교구 활용 의존도는 다양한 형태로 나타났다. 아동 A 경우, 교구 사용에 대한 단편적인 시각에서 벗어나 교구의 역효과도 나타났지만, 문제 확인과 구체화하는 과정을 통해 스스로 오류를 수정하고, 다양한 시행착오에 대한 구체적인 해결 대안도 교구의 관찰을 통해 가능해졌다. 아동 B(15%)는 교구의 사용에 대한 공통점은 자신이 제시한 답의 정확성을 반성한다거나 모르는 상황에 직면하였을 때, 교구 조작을 통해 답을 구하였다. 아동 B의 경우는 문제의 조건을 정확하게 사용하지 않는 경향이 많아 오답을 제시하는 경우가 많았는데, 교구가 이를 교정해 주어 자신의 사고 과정의 문제점이나 문제 조건을 빠뜨린 실수를 확인시켜 주는 기회로 작용하였다.

<표III-1> '공간 과제' 활동별 학습 능력 수준에 따른 교구 활용 의존도 분석표

학습능력 수준	과제 1(%)	과제 2(%)	과제 3(%)	과제 4(%)	과제 5(%)	과제 6(%)	과제 7(%)	과제 8(%)	과제 9(%)	과제 10(%)	과제 11(%)	전체 (%)
A	0	0	0	11	13	44	46	5	18	7	9	18
B	0	7	11	5	19	0	44	7	30	9	11	15
C	0	61	51	15	44	8	40	40	36	22	32	33

아동 C가 문제 이해도가 낮아 문제에 대한 반문이 많았고 문제의 답을 구하기 위하여 전반적으로 교구에 의존하는 경향이 가장 크게 나타났다. 그러나 그러한 태도는 교구의 특징을 통해 규칙을 일반화하는 과제의 유형에서는 전적으로 교구에 의존하였고, 일부 특정 과제에서는 이전의 학습 경험이 없었음에도 불구하고 머리 속으로 상상하여 이를 구체화하여 답을 제시한 경우도 나타났다. 후반부에서는 스스로 생각에 자신감이 생겨나 조금씩 새로운 도전을 시도해 보기도 하고, 교구의 효과를 통한 과제 해결에 학습의 향상을 볼 수 있었다.

2. 연구 내용 2: 문제 해결 과정에서 학습 능력 수준에 따른 교구의 활용은 학습 능력 수준이 가장 높은 아동 A는 문제 이해를 잘 하였으며, 교구의 활용은 주로 문제 이해 단계, 또는 적용 및 발전에서 주로 활용하였다. 이해 단계에서 터득한 규칙이나 원리 발견은 문제 해결을 쉽게 하였으며, 또한 자신이 해결한 문제의 답을 확인하기 위하여 교구를 직접 조작하고 탐색하는 현상이 발견되었다. 학습 능력 수준이 중간에 위치하고 있는 아동 B는 전반적으로 문제에 대한 이해 및 조건에 대한 탐색이 부족하여 문제 이해 및 해결 단계에서 많은 실수를 범하였다. 필요시 동료와의 의사 소통은 문제 해결의 단서가 되기도 하였다. 교구 활용에 대한 경우는 대체적으로 단계에 관계 없이 도중에 어려움을 느낄 때, 교구를 활용하여 자신의 궁금증이나 정답 유, 무를 알아보기 위하여 활용하였다.

학습 능력 수준이 낮은 아동 C는 전반적으로 문제에 대한 조건 파악 및 이해력이 낮았으며, 답을 구하는 측면에서 교구 의존도가 가장 높게 나타났다. 또한 학습의 진행에 어려움이 있을 경우에는 교사에게 반문하거나 어려움을 호소하였으며, 교구의 성질 파악 및 탐색 과정보다는 답을 구하는 데 많은 시간이 소요되었으며 다음 단계의 문제 해결에 적용하는 정도는 상당히 낮았다. 그러나 흥미를 가진 특정 과제에서는 다른 활동에 비해 교구 없이 공간 시각화 활동을 잘 한 것으로 나타났다.

#### B. 결론 및 제언

교구를 통한 학습의 도입은 감각 운동적인 아동들의 흥미와 학습에 대한 도전감을 불러일으킬 수 있는 좋은 매개체이다. 또한 활동을 통한 학습 경험은 기억력을 높이고 누적된 학습 경험은 유사한 문제에 처하였을 때 적극적인 학습 자세를 불러일으킬 수 있다. 입학 초기에 경험하는 수학 학습의 안내와 학습 체험, 그리고 교사의 역할은 아동들에게 수학 학습을 형성하는 중요한 요소들이다. 생활 속에서 경험하는 도형의 모양과 변환 활동의 탐색은 도형 영역에서 다루어야 할 요소들이며, 감각 기관을 통한 대상의 모양 지각은 모든 활동의 기본이 되기도 한다. 이처럼 공간 시각화를 위한 교구의 활용은 공간 감각 및 수학적 사고력을 향상시키고, 학습 능력 수준에 따른 교구 활용은 아동 수준에 따른 적절한 교구의 투입과 안내 및 아동의 학습을 돕기 위한 교사의 구체적인 역할과 격려가 동반된다면 학습의 효과는 배가될 것이다.

### 참 고 문 헌

- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp.420-464. NY: MacMillan.
- Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte(Eds), *Learning and teaching geometry, K-12 :1987 yearbook* (pp.126-135). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.