韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 77-86.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 77-86.

스키마와 스키마 사이의 간격이 초등학교 3학년 영재아의 수학의 관계적이해에 미치는 영향

이 상 덕 (단국대학교)
김 화 수 (단국대학교 대학원)

초등학교 영재들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습을 통하여 많은 양의 선수학습을 행하고 있다. 이들 중 일부는 방법과 이유를 아는 관계 이해를 하기보다는, 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고 있다. 그들은 수학을 능동적이기보다는 수동적인 입장에서 받아들이기에 새로운 수학적 지식을 창출하지 못하는 성향을 강하게 보이고 있다.
이에 본 연구자는 이러한 문제의 해결을 위해 초등학교 영재들이 가지고 있는 수학적 스키마와 선생님들이 가르치는 스키마 사이의 간격에 초점을 맞추어 연구하였다. 대전에 있는 영재교육기관에 등록된 초등학교 3학년 영재들을 대상으로 하여 연구한 결과, 스키마와 스키마 사이의 간격이 멀수록 학생들이 방법과 이유를 아는 관계적 이해를 하기보다는 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고, 그 간격을 줄일수록 수학에 흥미를 느끼고 고학년의 수학내용까지도 스스로 파악하고 이해하려는 성향이 나타난다는 사실을 발견하게 되었다. 그 간격이 적을수록 학생들은 교사로부터 학습받은 내용을 자신의 지식으로 재구성하여 새로운 문제에 적용을 쉽게 하였다.
본 발표에서는, 학생들의 수학적 스키마와 선생님들이 가르치는 스키마 사이의 간격을 줄이는 것이 학생들이 수학을 관계적 이해를 하는데 큰 도움을 줄 수 잇음을 보이려고 한다.

Ⅰ. 서 론

초등학교 영재들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습을 통하여 많은 양의 선수학습을 행하고 있다. 이들 중 대부분은 방법과 이유를 아는 관계적이해를 하기보다는, 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고 있다. 그들은 수학을 능동적이기보다는 수동적인 입장에서 받아들이게 되는 성향을 강하게 보이고 있다.

이에 본 연구자는 이러한 문제의 해결을 위해 초등학교 영재들이 가지고 있는 수학적 스키마와 선생님들이 가르치는 스키마사이의 간격에 초점을 맞추어 연구하였다. 대전에 있는 영재교육기관에 등록된 초등학교 3학년 영재들을 대상으로 하여 연구한 결과, 스키마와 스키마 사이의 간격이 멀수록 학생들이 방법과 이유를 아는 관계적이해를 하기보다는 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고, 그 간격을 줄일수록 수학에 흥미를 느끼고 고학년의 수학내용까지도 스스로 파악하고 이해하려는 성향이 나타난다는 사실을 발견하게 되었다.

이에 본 논문에서는 초등학교 3학년 영재아들을 지능검사와 문제해결력 검사, 창의력 검사를 통하여 비슷한 성향의 학생들끼리 반을 구성하고 스키마 와 스키마 사이의 간격을 달리한 수업 내용과 문제를 제시함으로써 영재아들의 스키마형성과 수학의 관계적이해에 어떠한 영향을 끼치는지 알고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

A. Piaget의 scheme

Piaget는 합리적 사고와 지식의 본질을 내면화된 가역적 행동 곧 조작(operation)으로 보고 있으며 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지구조를 schemes이라고 부른다. Piaget의 발생적 인식론은 인지발달에서 수학적 사고의 발생에 특별한 의미를 부여하고 있다. 논리-수학적 개념은 대상으로부터의 단순추상에 의한 정적인 이미지가 아니라 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 '반영적 추상화'에 의해 구성된 조작과 그것을 바탕으로 구성된 보다 고차의 조작이다. 즉 수학적 구조, 개념, 증명방법, 알고리즘, 명제, 정리 등 모든 것이 조작적 scheme이다. 결국 수학적 활동이란 scheme을 구성하고 적용하는 것이라고 할 수 있다. 이러한 입장에서 보면, 교사의 주된 과제는 아동에게 적절한 문제를 구성하여 아동으로 하여금 문제 의식을 갖고 연구하도록 이끌고, 그 결과를 정리하는데 조력하는 것이다.

B. Skemp의 schema

Skemp는 피아제의 심리학의 기본적인 아이디어를 수학 학습 심리학의 입장에서 해석하여 수학적 개념의 이해를 위한 학습지도이론 곧 스키마의 형성을 위한 스키마 학습이론을 전개하고 있다. 어떤 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 적용되는지를 알지 못하고 문제해결에 적용하는 상태를 도구적 이해라고 하고 방법과 이유를 아는 상태 특정한 법칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 상태를 관계적이해라고 한다.

대전을 알기 위해서는 대전의 전체 지리를 알아야한다. 하지만 전체를 다 안다는 것은 불가능하다. 왜냐하면 대전이라는 도시는 고정되어 있지 않고 길도 계속 뚫리고 다리도 놓아지고 건물도 많이 생기면서 자라고 있기 때문이다. 만일 새로운 동네가 형성되면 우리는 거기에서 자신의 인지지도를 확장해야한다. 수학도 마찬가지다. 수학 또한 멈추지 않고 계속 크고 새로운 것들이 발견되고 증명되어 진다. 예전에 비해 보는 관점, 설명하는 방법 등이 달라지고 새로운 개념들이 머리 속에 들어오게 된다. 우리는 이러한 개념들을 자신이 알고있던 개념들과 함께 여러 가지 모양으로 구성해서 문제 해결에 도달하게 되는데, 이 개념들의 구성 체가 바로 스키마(schema)이다.

Ⅲ. 연구 문제 및 연구의 제한점

A. 연구문제

1. 초등학교 3학년 영재아들은 공식을 암기하여 문제를 해결하는 것을 좋아하는가? 아니면 원리를 파악하여 스스로의 방법으로 문제를 해결하는 것을 좋아하는가?
2. 초등학교 3학년 영재아들은 어떠한 방법으로 문제 해결에 접근을 하는가?

B. 연구의 제한점

1. 본 연구의 대상자는 연구자가 임의로 선정하였기 때문에, 다른 지역의 초등학교 3학년 영재아들에게도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.
2. 실험 처치를 위한 특정한 분야의 문제를 선정하였기 때문에, 다른 내용의 문제에 대해서도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.
3. 실험 처치를 위해서 특정 영재 사립기관의 문제해결력 검사 문제와 창의력 검사 문제를 선정하였기 때문에, 다른 내용의 문제에 대해서도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.

Ⅳ. 연구 방법 및 연구 내용

A. 연구 방법

본 연구는 초등학교 영재아들이 수학의 관계적이해를 하는데 스키마와 스키마 사이의 간격이 어떠한 작용을 하는지 알아보기 위해 대전에 있는 초등학교 3학년 학생 중에서 각 각 전체 석차 3%안에 들면서, K영재 학술원(사립기관)에 재학중인 영재아 18명을 대상으로 지능검사(한국 웩슬러 유아지능검사)와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 비슷한 성향의 학생들을 세 반으로 나누어 두 가지의 연구문제를 중심으로 연구를 하였다. 그리고 본 연구자가 임의로 선정한 단원의 내용을 학생들에게 3단계로 분류하여 설명을 한 다음, 각 단계마다 모두 동일한 문제를 제시하여 그 결과를 알아보았다.

첫 번째 연구문제는 영재아들이 방법과 이유를 아는 관계적이해를 하기를 원하는지, 아니면 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하기를 원하는지를 알아보기 위한 것이고, 두 번째 연구문제는 영재아들이 도구적 이해를 했을 때와 관계적이해를 했을 때 어떠한 방법으로 문제 해결에 도달하는지 알아보기 위한 것이다.

B. 연구 내용

1. 넓이

넓이에 대한 내용을 3단계로 분류하여 설명을 한 다음, 각 단계 모두 동일한 문제를 제시하여 그 결과를 알아보았다.

(1) 1단계

「사각형과 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴, 등변 사다리꼴 그리고 원의 넓이를 구하는 공식을 알려 주었다.」

(2) 2단계

「사각형의 넓이가 왜 '가로 × 세로' 인지에 대해 설명을 하였다.

(3) 3단계

「넓이를 구할 때 왜 사각형 모양으로 만들어서 구하는지 설명하였고, 원주율(π)에 대해서 설명하였다.」

2. 방정식

방정식에 대한 내용을 3단계로 분류하여 설명을 한 다음, 각 단계 모두 동일한 문제를 제시하여 그 결과를 알아보았다.

(1) 1단계

「방정식의 풀이방법, 즉 이항하여 +는 −로 −는 +로 바꾸어 계산하는 방법을 가르쳐 주었다.」

(2) 2단계

「1단계의 내용을 단순히 암기하여 푸는 방법이 아닌, 등식의 성질을 이용해서 이항을 하면 '왜' +는 −로 되고 −는 +가 되는지를 설명하여 학생들의 이해를 도왔다.」

(3) 3단계

「위 단계들의 내용에 미지수와 동류항에 대한 내용과 나눗셈을 분수 형태로 바꾸어서 계산하는 방법 그리고 약분에 관한 내용 등을 설명하였고 다음과 같은 문제를 제시하였다.」

3. 분수

분수에 대한 내용을 3단계로 분류하여 설명을 한 다음, 각 단계 모두 동일한 문제를 제시하여 그 결과를 알아보았다.

(1) 1단계

「분수의 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈과 나눗셈의 계산 방법을 가르쳐 주었다.」

(2) 2단계

「분수란 무엇인지 정의에 대해 설명하고, 이 분모 분수의 크기 비교를 통해 분수의 덧셈에서 분모가 서로 다를 때 '왜' 분모를 통분을 하는지 그리고 통분하는 과정에 대해서 설명을 하였다.」

(3) 「분수의 곱셈은 분수의 덧셈의 확장으로 설명하였고, 분수의 나눗셈에서 제수(除數)를 역수로 바꾸어 피제수(被除數)와 곱하는 이유를 통분을 이용하여 설명하였다.」

C. 연구 내용 분석

1. 1단계 적용 후 문제 풀이 결과

(1) 넓이

반 \ 문제	1	2	3	4	5	6	7
A	6	4	3	2	2	2	1
B	6	3	2	2	2	1	0
C	6	3	1	1	3	1	0
백분률	100%	55.6%	33.3%	27.8%	38.9%	22.2%	5.6%

(2) 방정식

반 \ 문제	1		2			3		4	5
	1	2	1	2	3	1	2		
A	6	1	3	3	3	2	2	3	1
B	5	0	3	3	3	2	1	3	0
C	5	0	3	1	2	2	2	4	0
백분률	88.9%	5.6%	50%	38.9%	44.4%	33.3%	27.8%	55.6%	5.6%

(3) 분수

반 \ 문제	1											2	3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
A	3	3	3	3	3	6	5	6	3	3	3	1	1
B	2	2	2	2	2	6	3	6	2	2	2	0	0
C	3	3	3	3	3	6	3	6	3	3	3	0	0
백분률	44.4%	44.4%	44.4%	44.4%	44.4%	100%	61.1%	100%	44.4%	44.4%	44.4%	5.6%	5.6%

위 결과를 살펴보면, 영재아들은 암기 학습을 싫어하여 사각형의 넓이를 구하는 문제, 방정식의 이항 문제 그리고 분수의 곱셈 문제와 같이 자주 대하는 문제나 기존의 스키마에 동화된 계산 방법인, 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하여 문제를 해결하는 것을 제외하고는 매우 저조한 정답률을 보이고 있다. 또한 각 반의 6명의 영재아 중에서 2~3명의 영재아(41%)는 공식을 이용하는 문제에서는 90%이상의 문제해결력을 보였지만 문장제형 문제나 생활 속의 수학 문제에서 정답률이 0%에 가까웠다. 이것은 선수학습을 통하여 공식을 알고 있는 영재아라 할지라도 왜 그렇게 공식이 나오게 되는지를 알지 못하는 영재아들이 대부분이라는 것을 알 수가 있다.

2. 2단계 적용 후 문제 풀이 결과

(1) 넓이

반 \ 문제	1	2	3	4	5	6	7
A	6	6	6	5	5	3	4
B	6	5	5	4	5	2	3
C	6	5	3	4	5	2	3
백분률	100%	88.9%	77.8%	72.2%	83.3%	38.9%	55.6%

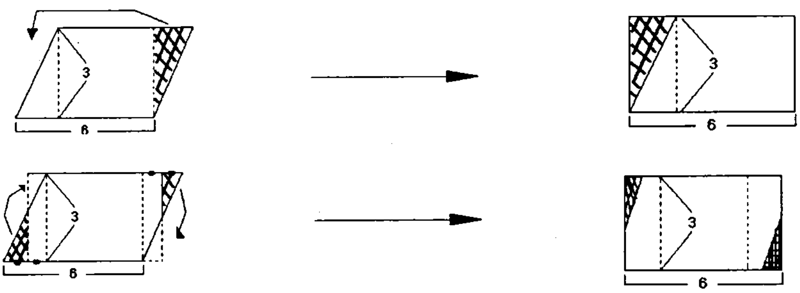
(2) 방정식

반 \ 문제	1		2			3		4	5
	1	2	1	2	3	1	2		
A	6	2	5	5	6	6	6	5	1
B	6	0	5	5	6	5	5	4	0
C	6	0	3	3	6	5	5	5	0
백분률	100%	11.1%	72.2%	72.2%	100%	88.9%	88.9%	77.8%	5.6%

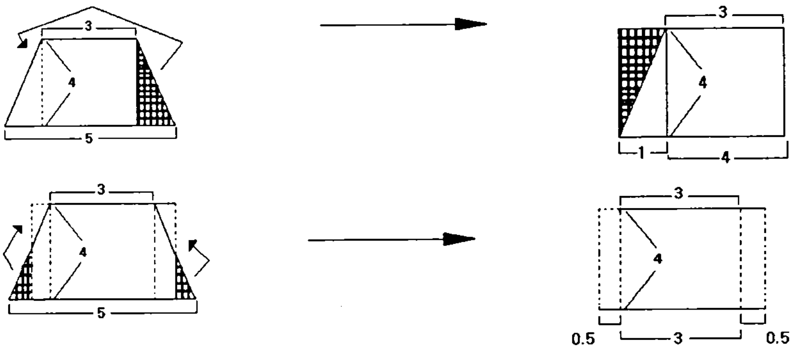
(3) 분수

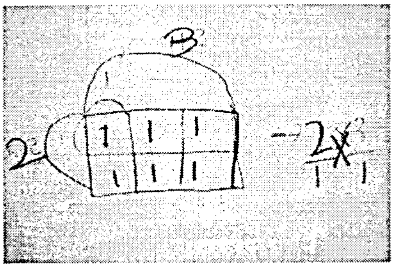
반 \ 문제	1											2	3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
A	6	6	6	5	5	6	6	6	6	6	5	3	2
B	6	5	5	5	4	6	6	6	4	3	3	1	1
C	6	5	5	5	3	6	6	6	4	3	3	2	1
백분률	100 %	88.9 %	88.9 %	83.3 %	66.7 %	100 %	100 %	100 %	77.8 %	66.7 %	61.1 %	33.3%	22.2%

위 결과를 살펴보면, 영재아들은 왜 그렇게 되는지 알았을 때(관계적이해가 이루어 졌을 때), 그들 자신이 가지고있는 스키마(Schema)에 새롭게 구성된 스키마를 접근시켜 여러 가지 창의적인 방법으로 문제를 해결해 나간다. 예를 들어 ,

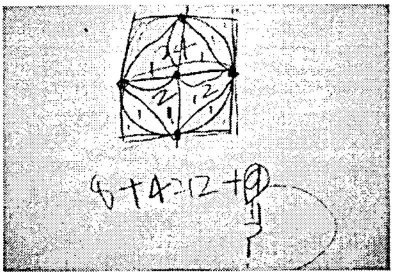


와 같은 방법으로 문제를 해결하였고, 이 스키마를 확장시켜

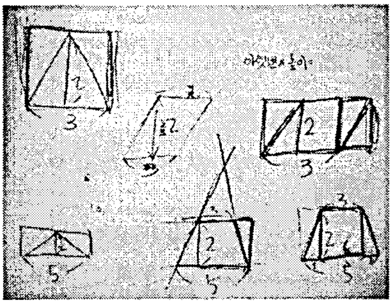




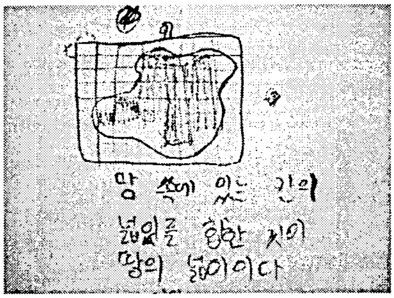
(사각형의 넓이)



(원의 넓이)



(여러 도형의 넓이)



(폐곡선의 넓이)

와 같은 여러 가지 창의적인 방법으로 문제를 해결하였다.

상위권(A반)의 영재아들의 이해도가 중위권(B반), 하위권(C반)영재아들에 비해 약간은 빠르지만 스키마와 스키마 사이의 간격을 줄일수록 그 차이는 현저하게 줄어들고 문장제 문제나 생활 속의 수학문제 또한 여러 가지 방법으로 해결해 나가는 것을 볼 수 있다. 그러나 방정식의 5번 문제와 같이 새로운 스키마(백분률)가 요구 될 때에는 신속히 기존의 스키마에 연결을 시켜 이해를 도와 주어야 한다.

3. 3단계 적용 후 문제 풀이 결과

(1) 넓이

반 \ 문제	1	2	3	4	5	6	7
A	6	6	6	5	6	6	5
B	6	6	5	5	5	5	5
C	6	6	5	5	6	5	5
백분률	100%	100%	88.9%	83.3%	94.4%	88.9%	83.3%

(2) 방정식

반 \ 문제	1		2			3		4	5
	1	2	1	2	3	1	2		
A	6	5	6	6	6	6	6	5	5
B	6	3	6	6	6	6	6	5	4
C	6	4	6	6	6	6	6	5	4
백분률	100%	66.7%	100%	100%	100%	100%	100%	83.3%	72.2%

(3) 분수

반 \ 문제	1											2	3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
A	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	4
B	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	3
C	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	3
백분률	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	88.9%	88.9%	83.3%	55.6%

위 결과를 살펴보면, 영재아들의 스키마와 스키마 사이의 간격을 줄이면 줄일수록 관계적이해가 이루어져 창의력과 문제해결력이 증가하게되고 그들 스스로가 새로운 스키마를 형성하여 다른 문제 또는 다른 분야에도 적용을 시킨다. 영재아들은 도구적이해가 아닌 관계적 이해를 하기를 원하고 그 과정에서 과제에 대한 집착력을 갖는다. 이런 경우 교사들은 그들이 가지고 있는 스키마가 어느 정도인지를 파악하여 그 스키마에 자연스럽게 연결될 수 있는 새로운 스키마를 제시해 주어야한다.

V. 결론

수학은 추상적인 학문이고 많은 개념들이 여러 가지 모양으로 모여서 만들어진 개념의 덩어리이다. 하지만 너무나 많은 학생들이 이러한 개념을 이해하고 또 자기 나름대로 하나, 둘씩 개념들을 모아 구성하면서 문제를 해결하기보다는 단순히 암기한 공식에 따라 의미가 거의 없는 기호의 조작만

을 연습하기 때문에 수학에 대한 흥미와 수학의 필요성을 느끼지 못하고 있을 뿐만 아니라, 수학의 힘 또한 느끼지 못하고있다.

여러 사설교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습 등을 통한 선수학습으로 인하여 영재아들은 같은 또래의 학생들에 비해 많은 양의 개념과 문제 해결 방법을 알고 있으나 어떻게 해서 그러한 공식과 방법이 나오는가를 아는 학생은 불과 몇 명 뿐 이다. 또한 그들이 알고있는 대부분의 개념은 중, 상위개념과 그 개념들의 구성으로 만들어진 개념들 뿐 이고 가장 기본적인 하위 개념은 잘 알지 못하고 있기 때문에 스키마와 스키마 사이의 연결고리가 연결이 되지 않아 동화가 잘 이루어지지 않는 경우가 있다.

이에 본 논문에서는 이러한 영재아들이 관계적이해를 하는데 스키마와 스키마 사이의 간격이 어떠한 역할을 하는지 그리고 스키마와 스키마 사이의 간격이 줄었을 때, 영재아들은 어떠한 방법으로 문제 해결에 접근을 하는지 실험을 통하여 알아보았다. 그 결과 스키마와 스키마 사이의 간격이 멀면 멀수록 이해보다는 암기를 하려고 하는 성향이 나타나 수학에 흥미를 잃어 금방 지루해했고, 그 반면에 그 간격을 줄이면 줄일수록 수학에 흥미를 느끼고 고학년의 수학내용, 문장제 문제, 생활 속의 수학문제 까지도 스스로 파악하고 다양한 방법으로 해결하려는 성향이 나타났다. 스키마를 이용한 수업은 학생들로 하여금 조직화되고 추상화된 수학을 능동적으로 구성하게 함으로써 수학의 원리와 필요성을 동시에 느끼게 해 주어 수학도 다른 과목 못지 않게 재미있다는 것을 느끼게 할 수 있다고 생각한다.

참 고 문 헌

라병소(1999), <u>수학 학습에서의 관계적이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구</u>, 단국대학교 박사학위 논문.

R. Skemp 지음 · 황우형 옮김, <u>수학 학습심리학</u>, 민음사.

김성숙, 이상덕, 김화수(2002), 수학의 관계적이해를 위한 스키마식 수업모델 제시, <u>한국수학교육학회</u>.

Bransford, J. D., Franks, J. J., Vye, N. J., & Sherwood, R. D. (1986). *New approaches to instruction: Because wisdom can't be told.* Paper presented at the Conference on Similarity and Analogy, University of Illinois.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher,* 18(1), 32-42.

Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1973.

Freudenthal, H.(1962). Logical analysis and critical survey In : Report on the relations between arithmetic and algebra, ed. H, Freudenthal Subcommission ICMI. Groningen, Wolters.

Kilpatrick, J.(1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. *PME-XI ; Program,* 3-27.

Perkins, D. N., Salomon, G. (1988). Teaching for transfer. *Educational Leadership,* 46(1), 22-32.

Rerfetto, G. A., Bransford, J. D., Franks, J. J. (1983). Constraints on access in a problem-solving context. *Memory and Cognition,* 11, 24-31.

Van Haneghan, J. P., Barron, L., Young, M., Williams, S., Vye, N., & Bransford, J. (1992). The Jasper series: An experiment with new ways to enhance mathematical thinking. In D. F. Halpern (Ed.), *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics(*pp. 15-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Glasersfeld, E.(1987). Learning as a constructive Activity. In C. Janvier(ED.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*(pp. 3-17). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Von Glasersfeld, E.(1991a). *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Whitehead, A. (1929). *The aims of education.* Cambridge, MA: harvard University Press.