韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 71-76.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 71-76.

분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석

전 평 국 (한국교원대학교)
박 혜 경 (한국교원대학교 대학원)

학생들의 분수 나눗셈에 대한 이해는 개념적 이해를 바탕으로 수행되어야 함에도 불구하고 분수 나눗셈은 많은 학생들이 기계적인 절차적 지식으로 획득할 가능성이 높은 내용이다. 이것은 학생들이 학교에서 분수 나눗셈을 학습할 때에 일상생활에서의 경험과 선행 학습과의 연결이 잘 이루어지지 못하고 있는 것에 큰 원인이 있다고 본다.
본 연구에서는 학생들의 분수 나눗셈의 개념적 이해를 돕기 위하여 경험적 지식과의 연결 관계를 활용한 교수 방안을 실험 교수를 통해 조사하였다. 결과로서 번분수를 활용한 수업은 분수 나눗셈의 표준 알고리즘이 수행되는 이유를 알 수 있게 하는데 도움이 되나 여러 가지 절차적 지식이 뒷받침되어야 하며 분수 막대를 직접 잘라 보는 활동을 통한 수업은 분수 나눗셈에서의 나머지를 이해하는데 효과가 있다는 것을 알았다. 결론적으로, 학생들의 경험과 학교에서 이미 학습한 분수 나눗셈들의 관련 지식들을 적절히 연결하도록 한다면 수학적 연결을 통해 분수 나눗셈의 개념적 이해를 이끌 수 있다.

I. 서 론

수학학습에서의 강조점은 시대에 따라 많은 변화를 거쳐 왔다. 1990년대에 들어설 무렵부터 수학교육에서는 '수학적 힘(mathematical power)'이 강조되고 있다. 복합적인 개념을 담고 있는 '수학적 힘'을 개발한다는 것은 한 마디로 설명하기 어려우나 '수학적 힘'의 강조로 더욱 부각되고 있는 것 중의 하나가 수학적인 지식들 간의 연결(connection)이라 하겠다. 학생들은 많은 양의 단편적인 지식들을 학습하기보다는 관련 지식들을 연결하면서 학습할 때에 새로운 지식을 올바르게 이해하거나 생성할 수 있으며 문제를 해결하기 위해 사용할 수 있다. 그러므로 학생들은 자신들의 기존 지식과 의미 있는 연결을 통해 새로운 지식을 학습하고 자신의 지식을 일관된 전체로서 조직할 수 있어야 한다. 이를 위해서 지식의 개념적 이해(conceptual understanding)가 필요하며 개념적 이해는 학생들의 지식이 오랫동안 유용하게 유지될 수 있도록 돕는다.

학생들의 분수 나눗셈에 대한 이해는 개념적 이해를 바탕으로 수행되어야 함에도 불구하고 분수 나눗셈은 많은 학생들이 기계적인 절차적 지식으로 획득할 가능성이 높은 내용이다. 이것은 학생들이 학교에서 분수 나눗셈을 학습할 때에 일상생활에서의 충분한 예들을 통해 분수 나눗셈이 필요함을 느끼고 해결하고자 하는 욕구를 경험하게 하지 못하고 있는 것에도 큰 원인이 있다고 본다.

따라서, 본 연구에서는 학생들이 분수 나눗셈과 관련하여 어떠한 경험적 지식을 가지고 있으며, 그것들을 연결시켜 분수 나눗셈을 이해하려 할 때에 어떠한 어려움을 겪는지 개별 면담을 통해 알아보

고자 하였다. 또한 관찰된 경험적 지식을 바탕으로 분수의 나눗셈의 개념적 이해를 위한 교수 방안을 제시하고자 하였다.

II. 연구 방법 및 절차

본 연구는 분수 나눗셈과 관련한 학생들의 경험적 지식을 조사하고 그것들을 이용하여 개념적 이해가 가능하게 되기까지의 과정을 밝히기 위해 면담을 통한 사례 연구와 교수 방안 제시를 위한 실험 교수 방법으로 설계되었다.

A. 연구 대상

1. 비형식적 개별 면담

자발적으로 참여 의사를 밝힌 청주시 소재 N초등학교 5학년 학생 5명을 대상으로 하였고 각 학생의 수학 교과에 대한 능력은 중위권에 속한다.

2. 실험 교수

청주시 소재 G초등학교 5학년 4반 학생들 중에서 선행 지식 검사를 통해 선진도 학습을 하지 않고 연구에 필요한 사전 지식을 갖춘 학생들로 12명을 선정하였다.

B. 연구 절차

1. 개별 면담

먼저 학생들의 경험적 지식을 이끌어내기 위한 적절한 질문들을 찾아내고자 하였으며 예비 검사를 통해 수정, 보완된 개별면담 문항으로 학생들과 비형식적 개별면담을 실시하였다.

면담 내용은 학생들이 분수의 기호 표현에 대한 의미를 어떻게 받아들이고 있으며 나눗셈의 표현과의 연결이나 번분수로의 확장이 가능한지를 알아보고자 하는 것에 초점이 맞추어졌다.

2. 실험 교수

현행 제7차 교육과정의 수학 5-나와 6-나의 교과서에서의 분수 나눗셈의 지도 과정을 분석하고, 분수의 나눗셈의 개념적 이해를 위한 교수 방안을 모색하고자 세 가지 접근 방법으로 실험교수를 시행하였다. 본 연구에서의 접근 방법은 학생들이 분수의 나눗셈에 관한 표준 알고리즘이 수행되는 이유를 알고 행할 수 있도록 하기 위한 설명 방법들 중에서 다음의 세 가지를 택하였다.

첫째, 공통분모를 사용한 접근 방법으로 분수 나눗셈에서 피제수와 제수를 같은 분모를 갖는 분수로 변환(통분)하여 정수 나눗셈과 관련시켜 분자끼리 나누어 해결한다.

(예) $\frac{7}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{21}{9} \div \frac{2}{9} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$ $\frac{7}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{7\times9}{3\times9} \div \frac{3\times2}{3\times9} = \frac{7\times9}{3\times2} = \frac{7}{3} \times \frac{9}{2}$

둘째, 나눗셈을 분수 형태로 나타내어 해결하는 방법으로 분수 나눗셈을 분자와 분모가 분수인 하나의 분수(번분수)로 생각하여 분모를 1로 만들어 해결한다.

(예) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}}{1} = \frac{3}{4}\times\frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

셋째, 알고리즘을 발견하도록 도와주는 방법으로 학생들이 알고 있는 나눗셈의 풍부한 예와 모델들을 접하게 함으로써 나누는 것은 제수의 역수를 곱하는 것과 같음을 생각하게 하여 수들의 관계를 탐구하여 역수를 발견하도록 한다.

III. 연구 내용

A. 결과 분석

1. 분수의 나눗셈과 관련한 학생들의 경험적 지식

a. 면담에서 관찰된 경험적 지식

(1) 연구 대상 학생들의 분수에 대한 경험은 대부분이 무언가를 나누어 먹는다거나 나누어 갖는 것과 관련되어 있다. 개별 면담을 실시한 5명의 학생 모두가 '분수 $\frac{3}{5}$'의 상황을 빵이나 피자를 나누어 먹는 것으로 예를 들었다. 5명의 학생 중 어느 한 명도 $\frac{3}{5}$을 빵 3개를 다섯 명이서 나누어 먹을 때 한 사람이 먹게 되는 양이라는 상황을 스스로 생각해내지 못하였다.

(2) 연구 대상 학생들은 분수의 곱셈의 계산은 수행할 수 있으나 분수 곱셈이 의미하는 바를 언어로 표현한 것에는 익숙하지 않았다. 개별 면담을 실시한 5명의 학생 중 2명은 3의 $\frac{2}{3}$나 5의 $\frac{1}{5}$이라는 말을 $3\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{5}$이라는 대분수와 혼동하였다.

(3) '12를 3으로 나눈 것과 12의 $\frac{1}{3}$'이 실생활 문제로 제시되면 5명의 학생 모두가 이해할 수 있었으나 5학년 2학기에 제시되는 '$12\div3=12\times\frac{1}{3}$'의 표현의 이해에는 학생들에 따라 많은 차이를 나타내었다.

(4)학생들에게 (자연수)÷(단위분수)의 예를 적절히 제시한다면 초등학교 5학년에서도 잘 이해할 수 있는 것으로 보여졌다. 한 학생과 연구자와의 대화가 다음 에피소드에 나타나있다.

<에피소드 1>

연구자 : 오렌지 두 개를 2분의 1개씩 자르면 몇 덩어리가 되니?
학 생 : 2분의 1개씩이요? 한 개를 2분의 1로요?
연구자 : 그러니까 크기를 2분의 1씩 되게 자른다는 얘기야. 귤 12개가 있을 때 3개씩 나누면?
학 생 : 4.
연구자 : 4 덩어리가 되지? 그러면 오렌지 2개를 2분의 1개씩 나누면 몇 덩어리가 되느냐고 묻는 거거든?
(그림을 그리면서) 오렌지 2개를 2분의 1개씩 자르면 몇 조각이 되느냐는 거지.
학 생 : 네 조각이요.

연구자의 '오렌지 두 개를 2분의 1개씩 자르면'이라는 질문이 학생에게는 명확하지 못한 것으로 받아들여졌다. 학생은 되물었고 연구자는 다시 '크기를 2분의 1씩 되게 자른다는' 얘기로 바꾸어 진술하였다. 또한 자연수 나눗셈에서는 덩어리라는 표현을 분수의 나눗셈에서는 조각이라는 표현과 적절히 겹치면서 바꾸어 사용하였다.

<에피소드 2>

연구자 :(원형도화지를 주며) 그 럼 이번에는 이런 원판 3개를 주고 4분의 1 크기들로 나누라고 한다면?
학 생 : 3개의 4분의 1이요?
연구자 : 3개의 원판이 있는데 원판 하나의 4분의 1이 되는 크기들로 나누면 몇 조각이 되느냐는 거야.
4분의1 , 4분의1 크기들로 몇 조각으로 나눌 수 있겠어?

학 생 : 12조각이요.
연구자 : 그렇지. 12조각이지. 3 속에 4분의1, 4분의 1들이 몇 번이나 들어가느냐와 마찬가지야.

위의 대화에서 연구자는 의도적으로 '3에는 4분의1들이 몇 번이나 들어가 있는지'라고 반복해서 덜어낼 수 있게 하는 표현을 사용하였다. 그 이유는 나눗셈을 이해하기 위한 비형식적인 경험은 동수누감과 밀접하게 연결되어 있기 때문이다. 위의 에피소드에 이어 (자연수)÷(단위분수)에서 (분수)÷(단위분수)의 질문으로 연결을 시도했는데 질문의 내용에서 자연스럽게 따라 올 수 있었다.

b. 경험적 지식을 연결시키는 과정에서 겪는 어려움

학생들이 자신들의 경험적 지식을 연결시켜 분수의 나눗셈을 이해하도록 할 때에 어떠한 어려움을 나타내는지를 알아보기 위한 질문에서 나타난 결과들은 [그림Ⅲ-1]과 같다.

2. 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 실험 교수

실험 교수를 통해 조사된 결과는 다음과 같다.

첫째, 분수에서의 나눗셈을 자연수에서의 나눗셈과 관련시키는 방법은 동분모 분수에서의 나눗셈이 분자들끼리의 나눗셈과 같다는 사실을 학생들 스스로가 깨닫도록 이끄는 것이 중요하다.

둘째, 번분수를 활용한 수업은 분수 나눗셈의 표준 알고리즘이 수행되는 이유를 알 수 있게 하는데 도움이 되나 여러 가지 절차적 지식이 뒷받침되어야 한다.

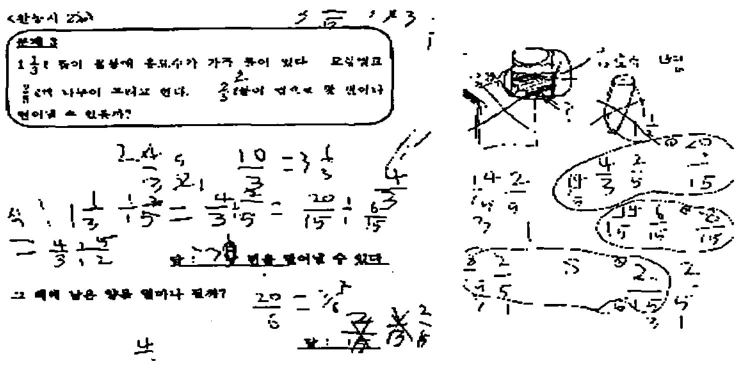
셋째, 분수 막대를 직접 잘라 보는 활동을 통한 수업은 분수 나눗셈에서의 나머지를 이해하는데 효과가 있다.

[그림Ⅲ-1]는 한 남학생의 사고의 연결 과정을 잘 살펴볼 수 있는 활동지로 식을 정리하여 쓰는 것에는 많이 미숙하나 사고 과정을 살펴볼 수 있다. 이 학생은 식을 $1\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{3} \div \frac{2}{5}$라고 식을 세우고 그 위에 계산을 하여 $3\frac{1}{3}$이라는 답을 얻었다. 처음에는 $3\frac{1}{3}$번을 덜어낼 수 있다고 답을 하였다가 나머지를 묻는 문제가 나오자 $\frac{1}{3}$을 지우고 나머지를 구하려고 노력한 흔적을 볼 수 있다. 학생의 사고 과정은 동수누감의 과정을 거치는데 첫 번째, 두 번째, 세 번째 덜어냈다고 생각한 것으로 보이는 곳에 ①,②,③이라고 표시해 보았다.

내용		학생들의 연결 상태	연결의 어려움	비고
분수의 기호 표현과 의미를 번분수로 연결	분수 $\frac{3}{5}$의 의미	5개 중의 3개	$\frac{\frac{1}{2}}{2}$을 2개 중의 $\frac{1}{2}$개로 생각 못함	두 가지 중 하나로 인식하고 동시에 떠올리지는 못함
		하나를 다섯으로 나눈 것 중의 세 조각	5의 $\frac{3}{5}$을 3이라고 생각 못함	
		사과 3개를 5사람이 나누어 먹을 때 한 사람이 먹게 되는 사과의 양	$\frac{\frac{1}{2}}{2}$을 사과 $\frac{1}{2}$개를 2사람이 나누어 먹을 때로 연결 못시킴	연구자의 의도된 질문으로 연결 가능

분수의 기호 표현과 의미를 번분수로 연결	분모가 1인 분수	$\frac{3}{1}=3$, $\frac{5}{1}=5$	$\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{4}{5}}{1}=\frac{4}{5}$ 연결 가능	알고 있는 것의 확장으로 연결 가능
	$\frac{\frac{1}{2}}{2}$에 대한 생각	$\frac{\frac{1}{2}}{2}$은 어떤 수?	·가분수- 분자가 복잡하므로 · $\frac{1}{2}$곱하기2또는2나누기 $\frac{1}{2}$ ·덜 나누어진 수→좀 더 계산을 해야 되는 수	직관적으로 수의 특성과 배열을 참고하여 답을 함
분수 연산의 형식적인 표기와 의미의 연결	2의 $\frac{1}{2}$ 5의 $\frac{1}{2}$ 3의 $\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}$라고 생각	· $2\times\frac{1}{2}$, $5\times\frac{1}{2}$, $3\times\frac{2}{3}$이라고 생각 못함 · $\frac{1}{2}$의 $\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$로 생각 가능	분수 곱셈의 의미와 다양한 표현 이해가 요구됨
나눗셈의 표현과 분수 표기의 연결	나눗셈을 접할 때	세로셈으로 계산하고 소수로 답함	제수와 피제수를 바꾸어 계산하는 체계적인 오류를 나타내기도 함	분수를 나눗셈으로 나눗셈을 분수로 바꾸는 의미를 파악하게 하고 충분한 연습이 선행되어야 함
	나눗셈을 분수로 나타낼 때	문장제에서는 분수로 대답 가능	나눗셈식을 분수로 바꿀 때 분자, 분모에 어떤 수를 쓸지 혼동	
	분수 나눗셈을 번분수로 나타내려 할 때	번분수 표현에 익숙지 않음	$3\div\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $\frac{2}{3}\div5=\frac{10}{3}$과 같이 곱셈과 혼동	

[그림III-1] 학생들의 경험적 지식의 연결을 통한 분수 나눗셈의 이해



[그림III-2] 사고의 연결을 보여주는 한 학생의 활동지

B. 논의

1. 학생들의 경험적 지식과 수학적 연결

학생들의 분수에 대한 경험은 특정한 상황에 국한되어 있는데 그 이유 중의 하나는 학생들이 분수를 학습할 때에 제시된 예들이 다양하지 못한 데에서 기인하는 것으로 보였다. 교사들은 적절한 과제와 질문을 통해 학생들의 지식의 연결을 도와야 한다. 분수의 나눗셈은 교사와 학생들에게 지식의 연결을 통한 학습의 과정을 경험시키는 좋은 주제라 할 수 있다.

2. 분수의 나눗셈에 대한 개념적 이해

학생들이 개념적 이해 없이 분수의 나눗셈을 학습하게 되면 계속되는 학습에 흥미를 잃고 어려워 한다. Hiebert와 Lefevre(1986)의 지적처럼 이해를 수반하지 못하고 개념적 지식과 관련시키지 못한 절차적 지식은 상황에 의존적이어서 새로운 상황에서 활용되지 못하며 자신이 수행된 결과에 대해 그릇된 해석을 갖기도 한다는 것을 드러냈다. 학생들은 나머지에 관한 질문에서 자신의 불완전한 형식적인 지식과 익숙한 비형식적인 경험 사이에 충돌이 생기자 그것을 해결하고자 하는 욕구를 보이게 된다. 이는 분수의 나눗셈에 대한 학습의 동기유발로 작용하게 되었다.

Ⅳ. 결 론

분수 나눗셈을 개념적으로 이해시키기 위해서는 학생들이 갖고 있는 경험과 지식을 알고 적절한 방법으로 연결시키는 것이 중요하다. 본 연구를 통해 학생들이 갖고 있는 경험적 지식이 얼마나 다양하며 그것들의 연결 정도는 학생들에 따라 많은 차이가 있을 수 있음을 알 수 있었다. 연구 대상 학생들은 연구자의 질문에 대답하면서 자신들의 경험과 분수 나눗셈 사이의 관련성을 깨달아 연결시키는 노력을 보였다. 이를 바탕으로 생각해 볼 때 교사들은 학생들에게 다양한 경험적 지식을 갖도록 하는 과제와 질문들을 제시하고 관계가 풍부한 지식의 구조를 갖추도록 도와야 한다. 또한 교사 자신이 연결이 풍부한 지식을 갖고 있을 때 학생들의 반응에서 어떠한 방법으로의 연결이 일어나고 있는지를 깨달을 수 있을 것이다. 결론적으로, 학생들의 경험과 학교에서 이미 학습한 분수 나눗셈들의 관련 지식들을 적절히 연결하도록 한다면 수학적 연결을 통해 분수 나눗셈의 개념적 이해를 이끌 수 있다.

참 고 문 헌

Bennett, A. B. (1989). Fraction patterns-visual and numerical. *Mathematics Teacher,* **82(4)**, pp.254-259.

Hiebert, J., & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawlence Erlbaum Associates.

Ma, L.(1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowlege. *Journal for Research in Mathematics Education,* **21(1)**, pp.16-32.