韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 53-58.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 53-58.

(수학교육과) 현대대수학 교재 개발

이 기 석(한국교원대학교)

본 연구는 교사양성 대학에 적합한 현대대수학 강좌운영의 실례를 소개하고자 한다. 이를 위하여 군, 환, 벡터공간 내용을 적절히 재구성한다. 갈로아 정리는 고차방정식 근의 가해성과 밀접한 관련이 있으므로 중·고등학교육과정과도 관련지을 수 있다. 그러나 근론과 환론, 벡터공간의 이론적 배경을 바탕으로 체론의 갈로아 정리로 나아가는 과정에서 많은 학생들이 어려움을 토로하는 것이 현실이다. 이처럼 그 내용의 중요성에 비해 실질적인 접근의 어려움으로 인하여 체론을 아예 배우지 않거나 배우더라도 그 본질을 이해하지 못하는 경우가 많다. 따라서 본 연구에서는, 교사양성 대학의 학생들의 갈로아 정리의 핵심과 본질을 보다 쉽게 이해할 수 있도록 함에 초점을 두고자 한다.

1. 서 론

사범대학과 교육대학의 수학교육과에서 교과내용학을 공부하는 경우, 순수하게 학문적으로 수학을 공부하는 자연대학 수학과와는 다른 목표를 갖는다. 따라서 수학교육과는 수학교육과의 목표에 걸맞는 교과내용학 교재가 필요하다. 그러나 현재 우리 나라의 거의 모든 수학교육과에서 사용하는 교과내용학 교재는 수학과의 교재와 다르지 않다. 이렇게 된 것은 수학교육과에서 사용할 수 있는 적절한 교재가 개발되어 있지 않은 데에도 그 원인이 있다.

본 연구에서는 현재 상황의 문제점을 분석하고, 수학교육과의 목표에 부합하는 적절한 수학 교과내용학 교재가 갖추어야할 특성을 생각해 보고 그를 적용하여 하나의 예로서, 현대대수학의 교재를 구성하는 방안을 살펴보고자 한다.

2. 교재 개발의 방향

수학교육과의 수학교육과를 위한 교과 내용학 교재는 크게 다음과 같은 두 가지 원칙에 따르려고 한다.

첫째는 “집중의 원리”이다. 수학교육과 학생들은 교과내용학 이외에도 교과교육학, 교육학, 교육실습 등 교육 관련 공부를 해야 한다. 따라서 수학교육과 학생들은 교과 내용학에만 전념할 수는 없다. 따라서 수학교육과의 교과 내용학은 그 범위를 줄여야 한다. 그렇지 않으면 좋지 않은 결과가 발생할 수 있다. 즉 수학교육과와 동일한 교재를 사용한다면, 많은 양을 제한된 시간에 다루어야 하므로

겉핥기 식의 얄팍한 지식을 얻기 쉽고 그에 따른 편견과 오해가 생기기 쉽다.

둘째는 "교육의 원리"이다. 학교 교육 현장에서 사용할 수 있는 교육 현장 지향적인 지식이 중요하다. 이는 순수 수학을 공부하는 수학과 학생들에게는 전혀 필요하지 않은 것이다. 특히 초, 중등학교의 교육 내용과의 관련성에 대한 연구가 필요하다.

3. 현대 대수학 교재의 개발

교재 개발의 두 가지 기본 원칙에 따라, 현대 대수학 I, 현대 대수학 II의 구성을 연구한다. 기존의 교육 과정에 의하면, 현대 대수학 I 은 군 이론 (group theory), 현대 대수학 II 는 환 이론 (ring theory) 및 체 이론 (field theory)를 다룬다.

우리는 위의 관행을 따르지 않고 Galois 이론에 집중하기로 한다. Galois이론은 수학적으로 매우 중요한 이론일 뿐 아니라, 다항식의 근에 관련된 여러 가지 개념을 유기적으로 설명하여 수학교육적인 면에서도 아주 유용하다.

현대대수학 I의 교재를 제1부와 제2부로 나눈다. 제1부는 학기 중에 다루도록 하고, 제2부는 제1부에서 다룬 내용을 심화하여 다루고 빠진 부분을 보안하여 완결시킨다. 제1부는 학기 강의 중에 다루도록 하고, 제2부는 개인적으로 심화 학습을 하고자 하는 학생을 위한 것이다.

제1부에서 군, 환 (체), 벡터 공간의 정의 및 기본적인 개념을 병렬적으로 다룬다. 물론 이 세 가지 주제를 모두 자세히 다룬다면 3개 학기 이상이 소요되므로 그렇게 하고자 하는 것은 아니다. 각각의 대수적 구조를 상호 비교하면서 유기적으로 연구한다. 그리고 현대대수학 II에서 다루게 될 Galois 이론을 공부하기 위하여 필요한 부분을 중심적으로 다룬다. 제2부에서는 제1부에서 간략히 다루어진 군, 환 (체), 벡터공간 각각에 대하여 좀더 자세하고 깊이있게 다룬다.

현대대수학 II의 교재도 제1부와 제2부로 나눈다. 제1부는 기초체의 표수가 0인 경우에 한하여 Galois 이론을 다룬다. 따라서 separability의 문제는 고려되지 않는다. 제2부는 기초체의 표수가 0이 아닌 경우도 고려하는, 일반적인 경우의 Galois 이론을 다룬다. 현대대수학 I의 경우와 마찬가지로 제1부는 학기 중의 강의에서 다루고, 제2부는 개인별 심화 학습용으로 사용한다.

[가]. 현대대수학 I <제1부>

(1) 군의 정의와 예
(2) 환의 정의와 예
(3) 벡터공간의 정의와 예
(4) 부분구조 : 군의 부분구조, 환의 부분구조, 벡터공간의 부분구조
(5) 정규부분군, 이데알, 부분벡터공간
(6) 상(quotiet)구조 : 군의 상구조, 환의 상구조, 벡터공간의 상구조

(7) 군 준동형사상, 군 동형사상
(8) 환 준동형사상, 환 동형사상
(9) 체의 정의와 예
(10) 유한체
(11) 체위의 다항식환 I : 나눗셈 알고리듬, 기약다항식
(12) 체위의 다항식환 II : 동치류의 정의와 연산

[나]. 현대대수학 I <제2부>
(1) Direct Products
(2) Finite Abelian Groups
(3) The Sylow Theorems
(4) Conjugacy
(5) The Structure of Abelian Groups
(6) Euclidean Domain
(7) Principal Ideal Domains
(8) Unique Factorization Domains
(9) Quadratic Integers
(10) The Field of Quotients
(11) Unique Factorization in Polynomial Domains
(12) The Chinese Remainder Theorem

[다]. 현대대수학 II <제1부>
(1) History
(2) Cyclotomic Polynomial (원분 다항식)
(3) Q[x] : 유리수 계수 다항식환
(4) Simple Extensions (단순확대체)
(5) Algebraic Extensions (대수적 확대체)
(6) Normal Extensions (정규 확대체)
(7) Splitting Field (분해체)
(8) Galois Group (갈로아 군)
(9) Solvable Group (가해군)
(10) The Symmetric Groups, The Alternating Groups
(11) The Simplicity of Alternating Groups

(12) Galois Correspondence (갈로아 대응)
(13) Fundamental Theorem of Galois Theory (갈로아 이론의 기본 정리)
(14) Galois' Criterion

[라]. 현대대수학 II <제2부>
(1) Characteristic (표수)
(2) Finite Field (유한체)
(3) Separability
(4) Normal Extensions (정규 확대체)
(5) Fundamental Theorem of Galois Theory (갈로아 이론의 기본 정리)
(6) Geometric Costructions (작도 가능성)

[마]. 현대대수학 II 교재의 Sample
교재의 서술에 있어서 가능한 많은 도움 그림을 통하여 독자의 이해를 돕는다.
아래에서 현대대수학 II 교재의 일부를 예시한다. 이러한 서술 방법이 학교 현장에서의 교육 방법에 대한 하나의 길잡이가 되도록 한다.

<u>보조정리 11.20</u> ① $F \subseteq E \subseteq L = E(v)$

② $v^k \in E$

③ $[L:F] < \infty$, 유한 차원확대체

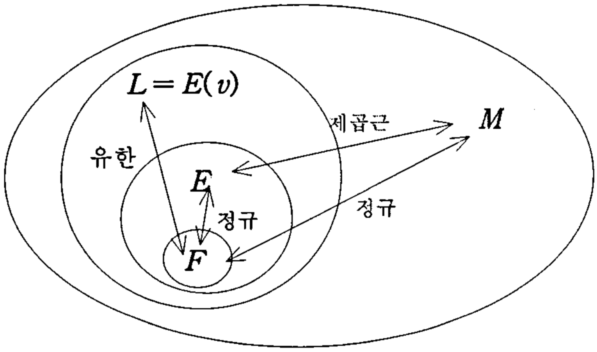
④ E 는 F의 정규확대체

라고 가정하면 다음과 같은 M 이 존재한다.

ⓐ $L \subseteq M$

ⓑ M 은 E 의 제곱근 확대체

ⓒ M 은 F의 정규확대체



(증명) E 는 F 의 정규 확대체이므로 E 는 어떤 다항식 $g(x) \in F[x]$ 의 분해체이다. $p(x) \in F[x]$ 가 v 의 최소다항식이고 M 은 $g(x)p(x) \in F[x]$ 의 분해체라고 하자. 그러면 M 은 F 의 정규확대체이다. $L = E(v)$이므로 $L \subseteq M$ 이 성립한다. $p(x)$ 의 근을 $v = v_1, v_2, \cdots, v_r$이라고 하자. $p(x)$ 가 기약다항식이므로, 각각의 i 에 대하여 $\sigma_i(v) = v_i$가 성립하는 $\sigma_i \in Gal_F M$ 가 존재한다. E 는 F의 정규확대체이므로 $\sigma_i(E) = E$이다. 각각의 i 에 대하여

$v_i^{\ k} = \sigma_i(v)^k = \sigma_i(v^k) \in E \subseteq E(v_1, v_2, \cdots, v_{i-1})$이 된다.

$E \subseteq L = E(v_1) \subseteq E(v_1, v_2) \subseteq E(v_1, v_2, \cdots, v_r) = M$이므로 M 은 E 의 제곱근 확대체이다.

<u>정리 11.21</u> ① $f(x) \in F[x]$

② $f(x) = 0$ 는 가해(solvable)방정식이다.

⇒ 다음과 같은 M 이 존재한다.

ⓐM은 F의 정규확대체

ⓑM은 F의 제곱근확대체

ⓒ$K \subseteq M$, K는 $f(x)$의 분해체

(증명) $f(x) = 0$ 는 가해(solvable)방정식이므로, 정의에 따라 $f(x)$ 의 분해체 K는 다음과 같은 제곱근 확대체 F_+ 에 포함된다.

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_t, \quad F_i = F_{i-1}(u_i), \quad u_i \in F_{i-1}, \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

단계적으로 정리 11.20을 이용한다.

<1단계>

$F = F_0$

$E = E_0$

$L = F_1$

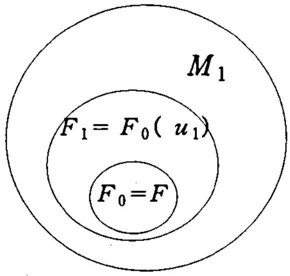
$v = u_1$

에 정리 11.20을 적용하면 다음과 같은 M_1 을 구한다.

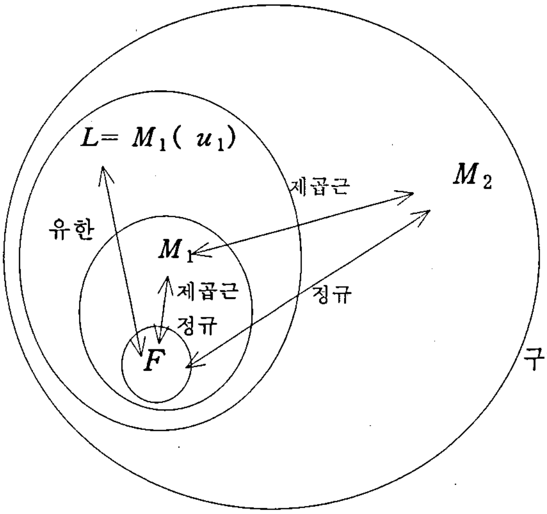
① $F_1 \subseteq M_1$

② M_1 은 F_0 의 제곱근 확대체

③ M_1 은 F의 정규 확대체



<2단계>



$F = F_0$

$E = M_1$

$L = M_1(u_2)$

$v = u_2$

에 11.20을 적용하면 다음과 같은 M_2 를 구한다.

① $F_2 \subseteq M_2$

② M_2 은 M_1 의 제곱근 확대체

③ M_2 은 F의 정규 확대체

이 작업을 반복하면 다음과 같은 $M = M_t$ 를 얻는다.

① $F_t \subseteq M \rightarrow K \subseteq M$

② M 은 F의 제곱근 확대체

③ M 은 F의 정규 확대체