韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 43-52.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 43-52.

교사양성대학에서의 이산수학 교육과정

이 재 학 (한국교원대학교)

교육과정은 그 시대에 적합한 요구들을 반영하여야 한다. 제 7차 수학과 교육과정에서 이산수학의 도입이 바로 정보화 시대의 반영이라고 볼 수 있다. 즉, 이산수학의 도입은 수학의 변화가 수학교육의 변화로 이어졌다는 점에서 긍정적으로 평가할 수 있다. 그러나 새로운 내용의 교육과정 도입은 충분한 검증절차의 부재로 인하여 부정적인 측면도 나타날 수 있다. 예를 들어, 교사양성 대학에서 이미 오래 전부터 개설되어진 해석학이나 대수학 같은 강좌와는 달리 이산수학의 강좌는 비교적 최근에 개설되어 졌으므로 대부분의 현장교사들은 이산수학 내용에 대한 지식이 거의 없다는데 있다. 이러한 문제점들을 바탕으로 우선, 교사양성 대학교육과정에서의 이산수학에 대한 충분한 연구와 우리 현실에 맞는 교재의 재구성이 요구되어진다. 따라서 본 연구를 통해 7차교육과정을 고려하여, 교사양성 대학에 적합한 이산수학 강좌에 대한 구체적인 예들을 제시하여 사범대학 학생들로 하여금 이산수학을 제대로 이해하고, 아울러 이러한 연구가 현직 교사연수에도 충분히 반영될 수 있도록 한다.

I 서 론

이산수학을 학교 교육에 접목시키려는 많은 노력은 수학에 관심이나 재능이 뛰어난 우수한 학생을 대상으로 기술 산업의 시대, 특히 컴퓨터에 의한 정보화 시대를 준비하게 하려는 측면을 강조하면서 최근에 이루어졌다.

미국에서는 1989년 NCTM의 '학교 수학 교육과정과 평가의 규준'에서 추천하여 1991년에 나온 'Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12 의 일련의 연구가 있으며, Rutgus 대학에서는 수학에 재능이 있거나 관심이 많은 학생들을 대상으로 한 과외 프로그램 'Young Scholar Program in Discrete Mathematics'을 실시하고 있다. 네델란드의 10, 11 학년의 교수요목에는 이산수학의 내용이 상당한 수준까지 제시되어 있으며, 덴마크의 Gymnasium A수준에서는 프랙탈, 카오스, 선형계획법 등의 주제를 다루고 있다.

우리 나라의 경우에는 이산수학을 소위 영재를 위한 선택 과목으로 성격을 지으려는 의견이 있었으나 많은 지지를 얻지 못하였고, 현재는 이산수학이 지나치게 이론적이고 실생활과는 유리된 기존의 입시 위주의 수학 내용에 식상한 많은 학생이나 수학에서 부진한 학생을 위하여 좋은 대안으로 여겨지고 있는 실정이다.

지금의 교육 현장에서는 이산수학에 대하여 생소한 수학 교사가 대부분이며 이산수학에 관심을 가지고 공부를 한 교사라 하더라도 이산수학의 여러 분야 전체에 익숙한 사람은 거의 없다고 할 수

있다. 이는 2003년부터 고등학교 현장에서 학생들이 이산수학을 선택할 때 이를 적절히 지도할 수 있는 수학 교사가 거의 없다는 뜻이다. 그 동안 교사 양성 기관이나 연수 기관에서 이산수학 또는 그래프 이론 등의 이름으로 교과목 개설이나 강의가 있어 왔으나 통일된 교육과정이 제시되지 않은 상태였으며 따라서 구체적으로 어떤 내용을 다루어야 하며 그 수준 또한 정하기가 어려웠다. 이는 이산수학이라는 과목 자체가 아직 완전히 정립되지 않았다는 데에도 원인이 있으며 또한 이산수학에서 다룰 수 있는 영역이 방대하고 각 영역마다 특성이 있어 이를 획일화하여 하나의 교육과정으로 정하는 것에는 많은 논란과 이견이 있을 수밖에 없다는 데에도 있다. 교육인적자원부의 제7차 교육과정에서 고등학교에서의 이산수학 교육과정이 정해졌으나 이것이 앞으로의 교육과정에서 그대로 유지된다고 보기도 어려우며 실제로 많은 개선의 여지가 있을 것이다. NCTM(1990)의 연구보고서에서 제안한 고등학교 수준의 이산수학 내용이나 이산수학을 실제로 가르치고 있는 외국의 고등학교 교육과정과 비교하고, 수학의 타 영역과의 연계성, 실제 교육 현장의 상황등을 고려하여 이산수학 교육과정은 더 연구되어 이산수학, 더 나아가서 수학 본래의 교육 목표에 더 접근할 수 있도록 개편되어야 할 것이다. 따라서, 교사양성기관에서는 이러한 미래를 전망하고 그에 대처할 수 있도록 이산수학 교육과정을 미래 지향적으로 적절히 정하는 것은 매우 의미있는 일이다.

II 중등학교 이산수학의 내용

1. 우리 나라 제7차 교육과정의 이산수학

우리나라의 제7차 교육과정에서 '이산수학'은 10단계 수학의 도달 여부에 상관없이 이산수학에 관심이 있고 실생활에 필요한 이산수학을 학습하기를 희망하는 학생들을 대상으로 하는 선택 과목으로서, '이론적이고 학문 중심적인 수학의 성격을 탈피하여 이산수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 바탕으로 우리 주위에서 흔히 경험하는 사회 현상 및 자연 현상의 우연성을 이해하고, 여러 가지 자료를 처리하고 분석할 수 있는 능력을 신장하는 데 적합한 과목'으로 규정하고 있다. 교육과정에서 제시한 이산수학의 학습 목표는 다음과 같다.

> '수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고, 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있다.
> 가. 일상적인 정보에서 수량적인 관계나 법칙을 계산기나 컴퓨터를 이용하여 이해하고, 활용할 수 있다.
> 나. 세기의 기본이 되는 방법과 집합이나 자연수를 나누는 방법을 이해하고, 이를 이용하여 실생활에서 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.
> 다. 사물의 현상을 그래프와 행렬 등을 이용하여 조직, 해석하고, 이를 활용할 수 있다.
> 라. 여러 가지 문제를 알고리즘적으로 사고하고 처리하는 능력을 기른다.
> 마. 다양한 의사 결정 과정과 상충적인 상황에서 합리적이고 논리적인 사고를 하여 문제를 해결할 수 있다.'

이상의 학습 목표를 달성하기 위하여 제시된 이산수학의 내용체계는 다음과 같다.

가. 선택과 배열
순열과 조합: 순열, 조합
세기의 방법: 배열의 존재성, 포함 배제의 원리, 집합의 분할, 수의 분할, 여러 가지 분배의 수
용어와 기호: 합의 법칙, 곱의 법칙, 순열, 조합, 비둘기집의 원리, 포함배제의 원리, 수의 분할, 집합의 분할, ${}_nP_r$, $n!$, ${}_nC_r$

나. 그래프
그래프: 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프
수형도: 여러 가지 수형도, 생성수형도
여러 가지 회로: 오일러회로, 해밀턴회로
그래프의 활용: 행렬의 뜻, 그래프와 행렬, 색칠 문제
용어와 기호: 그래프, 꼭지점, 변, 꼭지점의 차수, 경로, 회로, 수형도, 생성수형도, 오일러회로, 해밀턴회로, 인접행렬

다. 알고리즘
수와 알고리즘: 수와 규칙성, 수와 알고리즘
점화 관계: 두항 사이의 관계식, 세 항 사이의 관계식
용어와 기호: 알고리즘, 순서도, 점화 관계, 일반항, 부분합, a_n, S_n

라. 의사 결정과 최적화
의사 결정 과정: 2x2 게임, 선거와 정당성
최적화와 알고리즘: 계획세우기, 그래프와 최적화
용어와 기호: 최적의 경로

2. 미국 NCTM의 이산수학 규준
1989년 미국의 NCTM에서 제안한 수학교육과정에서 9-12 학년을 위한 이산수학의 성격은 다음과 같다.

21세기로 가는 시점에서 정보와 정보의 교환은 최소한 물건의 생산만큼 중요한 것이 되었다. 물리적 또는 물질 세계는 미적분과 대수, 기하, 삼각함수의 필수 아이디어인 연속 수학에 의해 흔히 모델화 되는 반면, 정보 처리라는 비물질 세계는 이산적인 수학의 사용을 요구한다. 컴퓨터 공학 역시 수학이 사용되고 창조되는 방법에 점차 강하게 영향을 미치고 있다. 컴퓨터는 본질적으로 유한이고 이산적인 기계이다. 따라서 이산수학으로부터의 내용은 컴퓨터를 사용하는 문제해결에 필수적이다. 이런 점에서 모든 학생들로 하여금 이산수학의 개념과 방법을 경험하게하는 것은 중요하다. 비록 이산수학이 상대적으로 새로운 분야이지만, 여기에서는 그것을 유한개의 원소를 갖는 집합과 체계로 단순화하여 제한하여 생각한다.

위와 관련하여 학생들이 도달하여야 할 목표로서 다음을 제시하고 있다.

가. 유한그래프, 행렬, 점화식 관계와 같은 이산 구조를 사용하여 문제 상황을 표현할 수 있어야 한다.
나. 행렬을 사용하여 유한 그래프를 표현하고 분석할 수 있어야 한다.
다. 알고리즘을 개발하고 분석할 수 있어야 한다.
라. 세기와 이산 확률 문제를 풀 수 있어야 한다.
대학 진학 학생들은 이에 더하여 다음을 더 요구하고 있다.
마. 선형계획법과 차분방정식을 이용하여 문제를 표현하고 해결할 수 있어야 한다.
바. 알고리즘의 응용 및 컴퓨터 타당화와 관련된 문제 상황을 탐구할 수 있어야 한다.

III. 이산수학의 내용

이산수학은 수학의 다른 분야와 비교하여 상대적으로 새로운 분야이며 그 내용이 타 영역과 중복되기도 하고, 많은 사람이 인정하는 표준화된 내용도 정해졌다고 볼 수 없는 실정이다. 컴퓨터와 관련된 이산수학의 내용-알고리즘의 복잡도, 유한상태 기계, 부울대수-이나 부호이론, 암호학, 선형계획법 등의 응용수학도 이산수학의 범주에 포함될 수 있으며, 집합론의 명제, 관계, 함수 등의 내용도 대부분의 이산수학 책에서 다루어고 있다. 현재, 이산수학이란 이름으로 출판된 국내외의 책에서 많이 다루는 이산수학의 주제를 살펴보면 다음과 같다.

가. a 출판사(국내)
집합 및 함수: 집합, 관계, 함수, 함수의 성장
기초: 알고리즘, 알고리즘의 복잡성, 수치함수의 연산, 수학적귀납법, 순열과 조합,
비둘기집의 원리, 램지의 성질
점화관계
그래프 이론
언어와 유한상태 기계
나. b 출판사(국내)
수학적 모델, 알고리즘 언어
명제와 논리, 집합의 정의, 연산, 성질, 종류
수학적귀납법, 관계와 함수
그래프 이론
형식언어와 기계
부울대수
대수체계
수치함수와 생성함수, 계차방정식, 알고리즘의 분석
다. c 출판사(국외)
알고리즘 언어
논리와 집합, 관계와 함수

조합
그래프 이론
부울대수, 대수 구조
기계와 계산-오토마타, 유한상태 기계, 튜링 머신
확률

라. d 출판사(국외)
선거이론
분배이론
게임이론
그래프이론
Markov Chain

마. e 출판사(국외)
수와 세기: 정수, 함수와 세기, 세기의 원칙(오일러 함수, 치환), 디자인, 분할, 모듈러 계산
그래프와 알고리즘: 알고리즘과 복잡도, 그래프, network, 점화식
대수적 방법: 군, 환, 체, 다항식환, 유한체와 그 응용, 오류정정 부호, 생성함수, 자연수의 분할, 대칭성과 세기(Polya's theorem)

IV. 교육과정 개발 방향

학생들이 장래에 다양한 전공이나 직업을 택할 수 있도록 중등학교의 수학 프로그램은 그 영역을 보다 넓히고 깊게하는 것이 바람직하다. 또한, 학생들의 능력, 적성, 포부를 고려하여 많은 나라에서는 다양한 교육 과정을 제시하고 있으며 우리 나라 제7차 수학교육과정도 이를 수용하여 여러 가지의 선택 과목을 제시하고 있다. 고등학교의 이산수학도 이와 관련하여 교육 과정의 내용이 앞으로는 더욱 다양해지고 깊어질 것이 예상된다. 이에 대비하여 교사 양성 기관에서의 교육과정은 미래를 대비하여 준비하는 것이 되어야 한다. 따라서, 이산수학도 현재의 고등학교 이산수학의 영역에서 더 확장하고 보다 전문화된 내용으로 교육과정을 구성하여야 한다. 또한, 이산수학을 통하여 수학의 본질을 이해하고 수학을 즐길 수 있으며 이 과정에서 실생활에서의 수학의 활용성과 유용성을 느끼게 하는 교육과정이 되어야 할 것이다. 한편, 이산수학의 기초 개념인 집합이나 논리를 비롯하여 대수학에서 다루어질 수 있는 부울대수, 부호이론, 암호학과 수치해석학에서 다루어지는 계차방정식이나 방정식의 수치적 해법 등은 각각의 영역에서 다루어지는 것이 더욱 타당할 것이다. 이와 같은 맥락에서 교사 양성 기관에서의 이산수학 교육과정의 주제를 선별하는 데 다음과 같은 원칙을 설정하는 것은 적절할 것이다.

가. 수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 실생활의 이산적인 상황의 문제를 수학적으로 사고하는 능력을 기르고 합리적으로 의사를 결정하며, 창의적으로 해결할 수 있는 주제를 선별한다.

나. 초, 중등학교 교육과정, 특히 고등학교 이산수학의 교육과정과 연계된 주제를 선별한다.

다. 수학의 타 영역과의 연계성을 고려하여 일반적으로 수학교육과의 필수 과목의 한 주제로 다루어질 수 있는 것은 제외한다.

라. 미래의 중등학교 교육과정에 대비하여 미래 지향적인 폭넓은 주제와 깊이를 고려한다.

V. 교육과정

1. 성격과 목표

이산수학은 교사 양성 대학에서 집합론과 선형대수학을 이수한 모든 학생을 대상으로 개설할 수 있는 필수 과목이 되어야 한다. 이산수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속 상황의 문제를 수학적으로 분류하고 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 것을 교육 과정의 목표를 설정하고, 이 목표를 달성하기 위하여 이산수학의 학습 내용을 세기의 원리와 점화식, 알고리즘, 그래프, 선형계획법, 의사결정 과정의 5개 영역으로 하며, 이산적인 상황의 문제를 모델링한 다양한 소재를 사용하도록 한다.

2. 내용 체계

1) 세기의 원리와 점화식: 비둘기집의 원리, 램지의 성질
포함배제의 원리와 그 응용
집합과 수의 분할 및 그 응용
귀납적으로 정의 된 수열

2) 알고리즘: 알고리즘의 뜻과 언어
복잡도
탐색 알고리즘과 분류 알고리즘

3) 그래프: 그래프의 정의와 행렬 표현
그래프의 기본 성질
여러 가지 회로-오일러회로, 해밀턴회로, 최단경로 알고리즘
수형도
평면그래프
색칠문제
network

4) 선형계획법: 여러 가지 선형계획법의 모델링
기하학적 해법. 단체법
민감도 해석

5) 의사결정 과정: 게임이론
선거이론

3. 영역별 내용

1) 세기의 원리

이 영역에서 비둘기집의 원리와 간단한 램지의 성질, 포함배제의 원리는 기본 원리의 이해와 구체적인 상황에서 이들 원리를 적절히 적용할 수 있도록 하는 것이 중요하다. 집합과 수의 분할에서는 조직적으로 나열할 수 있는 능력과 이로부터 유추할 수 있는 규칙성을 찾아내도록 한다. 또한, 귀납적으로 정의된 수열에서 일반항을 찾아내는 방법을 이해한다.

가. 비둘기집의 원리를 이해하고, 여러 가지 경우에 이 원리를 적용할 수 있게 한다.
나. 램지의 성질을 이해하고 이 성질을 이용하여 해결할 수 있는 구체적 상황을 알아 본다.
다. 포함배제의 원리를 이해하고 구체적인 사례에서 이 원리를 적용하여 개수를 계산할 수 있게 한다.
라. 유한집합을 주어진 개수의 서로 소인 부분집합의 합집합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
마. 주어진 자연수를 몇 개의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 구할 수 있다.
사. 집합과 수의 분할을 이용하여 여러 가지 분배의 수를 구할 수 있다.
아. 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 특성다항식이나 생성함수를 이용하여 구할 수 있다.

용어와 기호: 비둘기집의 원리, 포함배제의 원리, 수의 분할, 집합의 분할, 수열의 귀납적 정의, 특성다항식, 생성함수, $_nP_r$, $n!$, $_nC_r$

2) 알고리즘

문제 해결의 일반적인 과정에서 한 단계에서 다음 단계로 변화하는 과정을 알고리즘의 사고로 살펴 보고 특정한 문제의 해결 과정에서 일반화의 가능성을 추정하고 그 추정을 확인하는 절차는 문제 해결 전략에서 중요하다. 실세계에 기반을 둔 수열의 문제나 점화 관계도 알고리즘으로 접근함으로써 수학적 탐구활동이 풍부해 질 수 있다. 알고리즘의 개발과 분석은 컴퓨터를 이용하여 문제 해결하는 방법의 핵심이 된다. 알고리즘의 관점에서 수학을 탐구하는 기회를 경험하고 컴퓨터 등 기술공학적 도구를 수학 활동에 이용하고 나아가 수학적 소프트웨어를 개발할 수 있는 능력은 현대인이 갖추어야할 기본 소양이다.

가. 알고리즘의 뜻을 이해하고, 간단한 문제 해결을 위한 알고리즘을 간단 명료하게 작성할 수 있다.
나. 알고리즘의 복잡도를 이해하고 복잡도에 관한 기본 성질을 이해한다.
다. 탐색 알고리즘과 분류알고리즘을 이해한다.

용어와 기호: 알고리즘, 복잡도, $f=O(g)$ $f \prec g$, $f \preceq g$

3) 그래프

그래프는 그 응용 범위가 매우 넓어 수학 뿐만이 아니라 자연과학, 사회과학 등 거의 전 학문 분야에서 쓰이고 있다. 특히, 컴퓨터 과학과 관련된 분야나 도시 계획, 교통 문제 등 현대에 이르러 그 쓰임새가 더욱 광범위해지고 있다. 이 영역에서는 실생활의 문제를 주요 소재로하여 그래프 이론을 전개하고 이들 이론을 바탕으로 문제 해결 능력을 기른다.

가. 그래프의 뜻을 알고 여러 가지 용어의 뜻을 안다.
나. 그래프로 모델링될 수 있는 여러 가지 실제 문제 상황의 예를 안다.
다. 그래프를 행렬을 이용하여 나타낼 수 있고, 그래프의 여러 가지 성질을 이해한다.
라. 오일러회로와 해밀턴회로를 이해한다.
마. 최단경로 문제와 스케쥴링의 문제를 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.
바. 수형도와 생성수형도를 이해하고 이를 이용하여 배낭꾸리기 문제를 해결할 수 있다.
사. 평면그래프를 이해하고 오일러 공식, 그래프의 평면성 판단, 평면그래프의 쌍대그래프를 이해한다.
아. 그래프의 색칠 문제를 이해하고 이를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
자. network의 뜻을 알고 Max Flow-Min Cut 정리를 이해하여 이와 관련된 문제를 해결할 수 있다.

용어와 기호: 그래프, 꼭지점, 변, 면, 유향그래프, 단순그래프, 완전그래프, 이분그래프, 오일러회로, 해밀턴회로, 꼭지점(변, 면)의 차수, 경로, 수형도, 생성수형도, 평면그래프, 오일러공식, 쌍대그래프, 꼭지점(변)의 색칠, 채색다항식, 사색정리, network, flow, st-cut, $\deg(v)$,

4) 선형계획법

선형계획법은 원래 제한된 물자를 효과적으로 분배하는 방법의 연구에서 비롯되었으나 경제의 규모가 커지면서 경영과학이나 산업공학에서 필수적으로 다루는 한 분야가 되었다. 선형계획법은 일반적인 최적화 이론이나 자동제어 등의 영역으로 발전되며 이와 같은 분야는 현재 기계공학, 전자공학 등에서 이론적 연구의 기초가 되고 있다. 선형계획법은 고등학교 10-나 단계의 부등식의 영역에서 간단히 취급되고 있으며 기하학적인 방법을 사용하여 풀고 있다. 이 영역에서는 실생활의 여러 문제를 기하학적 풀이 방법에서 단체법까지 확장하고 민감도 해석을 체계적으로 다루도록 한다.

가. 여러 가지 선형계획법의 모델링을 구현한다.
나. 단체법을 이해하고 이를 이용하여 선형계획법의 문제를 해결할 수 있다.
다. 민감도(sensitivity)를 해석할 수 있다.

용어와 기호: 목적함수, 제한식, 선형계획법, 가능영역, 가능해, 기본해, 볼록집합, 극점(extreme point), artificial variable, surplus variable, slack variable, 표준형, 최적해, 단체법

5) 의사결정 과정

주어진 상황에서 최선의 결정을 찾는 것은 비단 기업이나 국가의 최고 경영자만의 몫은 아니다. 주어진 조건 아래에서 가능한 경우를 모두 조사하고 그 가운데서 최선의 경우를 찾는 것은 우리가 일상 생활에서 자연스럽게 접할 수 있는 문제이다. 이와 같은 상황의 문제를 해결할 때 수학이 어떻게 적용되는지 이해함으로써 수학의 가치를 인식하고 수학의 흥미를 유발하도록 한다. 게임이론에서는 기하학적인 풀이가 가능한 2X2 게임만을 다루도록 한다.

가. 여러 가지 게임의 뜻을 이해한다.
나. 혼합전략의 게임에서 최적전략을 구할 수 있다.
다. 여러 가지 선거 방법의 수학적 의미와 그 정당성을 이해한다.

용어와 기호: 게임, 영합게임, 비영합게임, 결정적게임, 순수 전략, 혼합 전략, 게임의 값,

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정, 교육부 고시 1997-15호, 제7차 수학과 교육과정, 대한교과서

______ (2001). 고등 학교 교육 과정 해설 5 수학, 대한교과서

교육인적자원부 (2002). 고등학교 이산수학, 강원대학교 1종 도서 편찬위원회, 천재교육

____________ (2002). 고등학교 이산수학 교사용 지도서, 강원대학교 1종 도서 편찬위원회, 천재교육

이중권 (2002). 세계 여러 나라의 수학교육과정, 경문사

박진홍 (1996). 새로운 이산수학, 교우사

유원희 (1992). 이산수학, 경문사

류성림 (2003). 이산수학에서의 수학적 모델링, 청람수학교육 11, pp.127-165. 한국교원대학교 수학교육연구소

이준열(2002). 이산수학 제7차 교육과정의 구현 방안 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> **41(1)** pp.127-137.

Goodaire, E.G. & Parmenter, M.M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*, NJ, Prentice Hall

Dossey, J.A.; McCrone, S.; Giordano, F.R. & COMAP (2002). Mathematics Methods and Modeling for Today's Mathematics Classroom, *A Contemporary Approavh to Teaching Grades* 7-12, CA, Brooks/Cole

Biggs, N.L. (1985). *Discrete Mathematics*, NY, Oxford Press
NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM
______ (1991). *Discrete Mathematics across the Curriculum*, K-12, 1991 Year Book, Reston, VA, NCTM
______ (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM