韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 35-41.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 35-41.

교사양성대학에서의 선형대수학 강좌 운영

신 현 용 (한국교원대학교)

수학이 자연과학의 기초 또는 기본으로 여겨지듯이, 수학에서도 기초가 되는 강좌들이 있다. 미적분학이나 집합론, 그리고 선형대수학은 그러한 강좌라고 할 수 있다. 대수학의 관점에서 볼 때, 선형대수학은 현대대수학을 이해하기 위한 기본바탕이 되고, 한편 수학 전체적으로 보더라도, 선형대수학은 다른 고등수학을 배우기 위한 필수적인 선수과목을 것이고, 그 자체로서도 많은 응용성을 지니고 있다. 뿐만 아니라 선형대수학은 중등 교육과정과도 밀접한 관련이 있으므로, 교샤양성 대학에서의 선형대수학 강좌를 통해 학생들은 교육과정상의 연계성까지 이해하여야 한다. 따라서 본 연구는 사범대학 학생들로 하여금, 선형대수학 그 자체의 순수한 측면과, 중등교육과의 긴밀한 관련성, 아울러 기하학, 미분방정식, 그리고 부호이론과 관련된 최신 정보수학의 응용적인 측면도 포함하여 선형대수학의 폭넓은 이해를 꾀하는 방안을 제시한다.

I. 서 론

예비교사들이 교사양성 대학교육을 통하여 수학 교과의 본질을 이해하고 바람직한 수학적 성향을 개발할 수 있을 것인가라는 측면에서 대학교육은 제 역할을 수행하지 못하고 있는 실정이다. 물론 교사양성 대학교육의 문제점을 교직에 관한 사회적 풍토, 교사의 임용방식, 교사재교육 등의 차원에서 논의할 수도 있겠지만, 보다 근본적이면서도 중요한 문제는 교육과정과 교수・학습방법의 문제로 귀착될 것이다. 우선 교육과정과 관련된 문제점으로 자연(이과)대학 수학과와 비슷한 교육과정 운영, 수학의 본질에 관한 이해 및 성향 개발 부족, 교과내용학・교과교육학・일반교육학의 불균형 등을 들 수 있고, 교수・학습방법과 관련된 문제점으로는 초・중등 현장교육과의 연계부족과 교수・학습방법의 획일화를 들 수 있다. 여기서 주의할 것은 이러한 각각의 문제점이 아무런 관련성 없이 명확하게 상호 구별되는 것이 아니라는 점이다. 다만 여기서는 문제점간의 상호관련성을 상세하게 논의하기보다는 각각에 대해서 살펴봄으로써 교사양성 대학교육이 현재 안고 있는 문제점을 분석하고 이를 바탕으로 교사양성대학으로서의 특성을 살릴 수 있는 방편을 모색해 본다.

우선, 현재 대부분의 중등 교사 양성 대학의 수학교육과 교육 과정은 일반 대학의 수학과 교육 과정과 실질적으로 크게 다르지 않다. 이로 인하여 교육과정에 관한 한 교사양성을 위한 특수목적대학으로서의 특수성이 모호한 형편이다. 이러한 현실의 필연적인 결과로 신임 교사가 교단에 섰을 때, 그간 습득한 지식은 그를 위해 투자한 시간과 노력에 비해 그 효용성이 적다. 이에 따라 중등 교사양성대학의 수학교육과 교육과정에 큰 변화가 있어야 한다는 요구가 있어 왔고 부분적이긴 하지만

이에 관한 연구가 진행되기도 하였다(박승안, 1990; 박승재, 1996; 경상대학교 사범대학 중등교육연구소, 2000;). 이와 같은 현실은 초등교사 양성 대학에서도 예외는 아니다. 실제, 몇몇 교대를 제외한 대부분의 교육대학교에 개설된 수학과 전공과목은 교육대학교가 4년제로 변경되면서 사범대학의 수학교육과 교육과정을 참고하여 작성한 과목을 그대로 유지하고 있는 실정이기 때문에 초등교사 양성대학으로서의 특수성을 제대로 발휘하지 못하고 있는 실정이다.

둘째, 수학교사는 무엇보다도 수학의 본질을 이해하고 긍정적인 성향을 가지고 있어야 함에도 불구하고 현행 교사양성대학 교육의 교육과정은 이를 촉진시키지 못하고 있는 실정이다. 누구보다도 교사는 지식기반사회에 적극적이고 역동적으로 대처할 수 있어야 하는데, 이는 가르치는 내용에 대한 단편적인 지식이 아니라 유기적인 지식 체계를 갖추고 있어야 가능한 일일 것이다. 하지만, 초・중등 학교수학이 그렇듯이 수학 자체의 본질을 이해하고 수학의 힘은 물론 수학의 한계를 파악하기보다는 매 학기 배워야 하는 상당한 양의 수학 내용에 많은 부담을 안고 있으며 깊이 있는 이해보다는 단편적인 지식을 획득하기에 급급한 실정이다. 이와 같은 실정은 제 7차 교육과정 시행과 더불어 수학의 상당 부분이 필수가 아닌 선택으로 되었기 때문에 이전의 학생들과 비교해 볼 때 현행 교육과정에 따라 수학을 배운 학생들의 수학적 지식이 상당히 적은 상태에서 교사양성대학에 들어올 것이기 때문에 더욱 심화될 문제이기도 하다. 또한 초등교사 양성대학의 경우는 수학 심화 과정이라 하더라도, 전 교과를 배우는 부담과 함께 상당히 많은 수학 내용을 추가로 공부해야 하기 때문에 더욱 많은 연구와 세심한 주의가 요구된다.

셋째, 교육과정 상에서 교과내용학・교과교육학・일반교육학이 불균형을 이루고 있다는 점이다. 우수한 수학교사가 되기 위해서는 분명히 가르칠 수학 내용 자체에 관한 지식, 그러한 지식을 해당 학교급과 관련지어 학생들의 이해를 증진시키기 위해서 어떻게 가르칠 것인가에 관한 교수 방법적 지식, 그리고 일반적인 교육학에 관련된 지식 모두가 필요할 것이다. 하지만, 이 각각의 지식이 과연 얼마만큼 필요한 것이며 그 상대적인 중요성은 늘 교사양성 대학교육의 교육과정 개편과 더불어 논의되는 문제 중의 하나일 것이다. 구체적인 예로 사범대학의 경우는 국립대학과 사립대학간에 거의 차이가 없이 수학교육학과 수학내용학의 학점수 비율이 약 1:3 정도이지만, 수학교육학의 시간수 비율 측면에서는 현저한 차이가 나타나고 있다. 또한 교육대학교의 경우는 대부분의 대학에서 기존의 교육과정대로 수학내용학에 초점을 두어 운영하는 반면에 서울교대와 같은 일부 교육대학교에서는 초등교사 양성대학으로서의 특수성을 중점으로 초등수학 교육학에 초점을 두는 방향으로 교육과정을 전면 개편하기도 하였다. 중등학교 수학교사의 전문성 신장을 위해서 세부적인 교과내용 지식에 대한 강조를 축소하고 그 대신에 교수 내용 지식과 교수방법론적인 지식을 대폭 강조하여 지도할 필요가 있음을 역설하고 있다. 이와 같은 일련의 경향 및 연구결과들은 교사양성대학에서의 다양한 교과지식간에 체계적하고 타당성 있는 균형점을 연구해야 함을 간접적으로 시사하는 것이라고 볼 수 있다.

넷째, 교사양성대학의 교육과정은 초・중등 현장교육과 그 연계가 매우 부족한 형편이다. 대부분의

예비교사들은 실제 초·중등학교에서 가르칠 수학 내용과 무관한 듯 보이는 수학내용학 강의에 대해서 부정적으로 생각하는 경향이 있으며, 초임교사들 역시 대학에서 배운 수학 내용들이 현장에 직접적인 도움이 되지 않는다는 불평을 하기도 한다. 물론 이는 학습자인 교사 스스로 수학교과의 전반적인 특성이나 수학을 행함으로써 터득할 수 있는 바람직한 수학적 성향을 개발하지 못한 책임도 있겠지만, 상당부분은 대학 교육과정의 각 강좌에서 그러한 관련성을 충분히 짚어주지 아니한 것은 교사 양성 기관의 책임이라 하지 않을 수 없다.

마지막으로, 교수·학습 방법의 획일화 문제를 들 수 있다. 제 7차 수학과 교육과정은 학습자 중심으로 비 정형적인 문제를 해결하는 능력, 논리적으로 탐구하고 예측하며 추론하는 능력, 수학에 대해 또는 수학을 통해 의사 소통하는 능력, 수학 내에서 또는 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 자신감과 수학적 성향 등을 포함한 수학적 힘의 신장을 궁극적인 목표점으로 하고 있다. 하지만, 교사양성 대학의 교수·학습 방법은 교수의 강의를 중심으로 한 지식전달에 초점이 주어지는 상태이며 이는 특히 수학과에 두드러진 문제이다. 전형적인 수학 강의는 교사가 칠판을 적당히 나누어 필요한 정의, 정리, 증명 등을 기술해 나가면서 상당한 분량의 수학 내용을 일방적으로 설명해 주고 학생들은 공책에 적으면서 증명방법을 외우고 할당한 연습문제를 열심히 풀어서 그 방법을 익숙하게 획득해 나가는 형태이다. 교사 자신이 이런 방법으로 수학을 배우고 나서, 초·중등학교 교실에서 학습자 중심 또는 탐구학습 중심으로 수학을 가르치기란 쉽지 않다.

II. 개발 방향

1. 수학의 본질을 이해하고 수학을 즐기게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
2. 수학의 유용성을 알고 활용하게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발

선형대수학에서도 벡터 공간의 구조는 추상대수학에서 자세히 다루고, 행렬과 행렬식, 행렬의 계급수, 고유치의 문제, 내적 등이 우선적으로 다뤄지고, 이와 관련된 계산이 충분히 연습되어야 한다. 미적분학의 중요성은 아무리 강조해도 지나치지 않다. 전임 조교 제도를 도입해서라도 충분한 연습 시간이 제공되어야 한다.

3. 실생활에서 수학을 느끼고, 수학을 활용하게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
4. 초·중등 교육과정과 연계된 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
5. 수학의 각 영역간에 연계성이 강조된 종합화된 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
6. 지적 홍미를 유발하여 자율적으로 탐구하게 하는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
7. 일반 교육학의 강좌를 수학 교육학에 대폭 흡수한 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
8. 교육 공학이 적극적으로 적용되는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
9. 교사가 학생들을 가르칠 때 사용하기를 바라는 그러한 수업 모형으로 미래의 교사를 양성할 수 있도록 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발

Ⅲ. 개발 내용

1. 강좌명

선형대수학과 응용(Linear Algebra and Its Applications)

2. 선수 과목

집합론

3. 강좌 소개

유클리드 벡터 공간을 중심으로 선형성을 이해하게 한다. 중학교 과정에서의 일차 연립방정식으로부터 행렬, 행렬식, 역행렬 등을 자연스럽게 도입하여 수학에서의 선형대수학의 유용성을 깨닫게 한다. 행렬, 행렬식, 역행렬은 물론 고유치, 내적 공간 등에서의 다양한 계산을 충분히 하도록 한다. 이 강좌에서는 벡터 공간의 대수적 구조에 관해서는 간단히 소개는 하되 자세히 다루지 않고 후의 추상대수학에서 다루도록 한다. 한편, 기초적인 부호 이론을 소개하여 정보 수학을 접하게 하고, 기하학이나 미분방정식, 그리고 이산 수학 등 수학의 다른 분야에서의 선형대수학의 효용성을 알게 한다. 한편, 선형대수학과 관련된 다양한 웹사이트를 소개하여 본 강좌 수강 시 도움을 받을 수 있도록 한다.

4. 목차

가. 서론

나. 행렬

다. 행렬식

라. 여인수 전개

마. 벡터 공간

바. 차원

사. 선형 사상

아. 고유치

자. 내적 공간

차. 응용

5. 참고문헌

가. 김응태 · 박승안, 선형대수학 제 3 판, 경문사, 2000.

본 서는 저자들의 대수학 전반에 걸친 여러 저서 중 하나서 매우 체계적이 고 깊이 있게 내용을 다룬다. 본 강좌의 주 교재이다.

나. 박승안, 대수학과 그 응용, 경문사, 2000.

대수학의 전반적인 내용들이 이산수학, 암호이론, 부호 이론 등 다양한 응용성을 제시한다.

다. Hill, A First Course in Coding Theory, Clarendon, 1986.

부호 이론의 기초와 전반적인 이해에 좋은 책이다. 선형대수학과 추상대수학이 부호이론에 어떻게 활용되는지를 확실하게 볼 수 있다.

라. Kolman, B., Elementary Linear Algebra, The Macmillan Company, 1970.

오래된 책이지만 쉽고 많은 예를 제시함으로 이해에 많은 도움을 준다. 특히, 미분방정식이나 이차형식에 선형대수학이 어떻게 이용되는지 잘 설명 되어 있다.

6. 필독서

필독서를 읽고 학기말까지 독후감을 제출할 것. 단 앞 선 강좌에서 읽은 책은 해당 없음.

가. 박병철 역, 페르마의 마지막 정리, 영림카디널, 1999.

나. 박병철 역, 엘레건트 유니버스, 승산, 2002.

다. 신현용 역, 우리 수학자 모두는 약간 미친 겁니다, 승산, 1999.

라. 신현용 · 승영조 역, 초등학교 수학, 이렇게 가르쳐라, 승산, 2002.

마. 신현용 · 승영조 역, 무한의 신비, 승산, 2002.

바. 신현용 · 이종인 · 승영조 역, 뷰티풀 마인드, 승산, 2002.

7. 평가 기준

중간 평가 (X = 30 % 또는 40 % 중에서 수강생이 중간 고사 직후 결정함.)

기말 평가 (Y = 30 % 또는 40 %, 단, X + Y = 70 %)

퀴즈 (10 %)

독후감 (15 %)

출석 (5 %)

8. 본 강좌의 운영 방안

가. 초등학교 저학년 단계에서의 간단한 암산, 구구단 등의 기초 계산력의 중요성은 의심할 여지가 없다. 수학 교사는 수학 전문가로서 강도 높은 훈련을 대학 과정에서 받아야 한다. 대학 저학년 과정에서 수학 전반에 걸쳐 활용하게 되는 기초 계산력도 매우 중요하다. 선형대수학에서는 적지 않은 계산을 할 수 있도록 교육과정이 편성 · 운영되어야 한다. 벡터 공간의 대수적 구조는 추상대수학에서 자세히 다루고, 행렬과 행렬식, 행렬의 계급수, 고유치의 문제, 내적 등이 우선적으로 다뤄지고, 이와 관련된 계산이 충분히 연습되어야 한다.

이 강좌는 전통적인 선형대수학 강좌와는 달리, 실생활, 학교 수학, 수학의 타 분야와의 연계성, 그리고 컴퓨터 등 정보 환경의 활용 등에 상당한 비중을 두기 때문에 잘 못 운영하면 강좌 내용이 천박해 질 수 있으며, 강좌 자체가 산만해질 수 있다. 따라서 토의나 과제, 그리고 복습 퀴즈를 통하여 일관성과 심도 있는 강좌가 되도록 각별히 노력한다. 특히 매 강의 시 부여되는 과제는 강의와 같은 수준의 중요성을 부여하여 평가에도 그 내용이 포함되게 한다.

나. 중 · 고등학교에서 배운 수직선, 좌표평면, 좌표공간을 통하여 벡터와 차원의 개념을 직관적이지만 자연스럽게 소개한다. 그 후 벡터 공간의 개념을 수학적으로 엄밀하게 도입한다. 이 때, 고등학

교 물리 시간에 배운 벡터와 스칼라 개념과의 차이를 언급하여 수학적 정의의 엄밀성과 일반성을 느끼게 한다. 일반적인 벡터 공간에서 일차 독립, 기저, 차원, 선형 변환 등 기초적인 개념과 성질을 살피되, 유클리드 공간에서의 구체적인 예를 통하여 그 의미를 분명히 이해하게 한다. 유클리드 벡터 공간과 함께 선형대수학에서 중요한 역할을 하는 행렬을 도입할 때에도 일상 생활에서 다양하게 야기되는 필요성과 예를 통하여 소개한다. 행렬의 집합에 덧셈과 스칼라 배를 정의하여 행렬의 집합을 벡터 공간으로 다룬다. 행렬 공간의 다양한 대수적 성질을 살핀다. 특히, 정사각행렬의 공간에서는 곱셈도 자연스럽게 정의하고 기본 연산, 역행렬 등 곱셈에 관련된 여러 가지 대수적 성질을 알아보되 기본 연산과 역행렬과의 관계에 주목한다. 정사각행렬의 행렬식을 정의하고 행렬식의 다양한 성질을 증명한다. 특히, 일차 연립방정식의 해, 행렬식, 그리고 역행렬과의 관계를 명확히 살핀다. 집합론에서의 함수 개념, 미적분학에서의 연속 함수, 그리고 추상대수학에서 다루는 군(환) 준동형사상과 같은 맥락에서 벡터 공간에서의 선형 사상을 도입하고 선형 사상과 행렬과의 밀접한 관계를 분명히 이해하게 한다. 대각화 가능한 행렬과 관련하여 고유치, 고유 벡터 등을 소개한다. 내적 공간의 유용성을 살피고, 다양한 등식과 부등식, 직교 정규 기저, Fourier 계수 등에 대하여도 알아본다. 선형대수학의 응용으로서 벡터 해석, 미분방정식의 해법, 그리고 부호 이론 등을 언급한다.

9. 평가

가. 각 강의를 시작하기 전에 지난 강의의 내용을 복습한다. 이 때, 예고 없이 퀴즈를 내어 간단히 평가하여 최종 평가에 반영한다.

나. 중요한 개념과 그에 관련된 사항들을 종합적으로 이해하도록 평가문항을 제시한다.

예: 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.

정칙행렬, 행렬식, 역행렬, 행 계급수, 열 계급수, 행렬식 계급수

다. 중요한 정리를 암기하고 증명할 수 있도록 한다.

예: 미지수가 n 개인 1차 연립방정식의 해에 관한 Cramer 공식을 쓰고 증명하시오.

라. 풍부한 예를 통하여 개념이나 정리의 이해를 확실하게 하도록 한다.

예: 정칙행렬의 역행렬은 기본행연산을 사용하여 구할 수도 있고, 행렬식과 수반행렬을 사용하여 구할 수 있다. 간단한 예를 통하여 이 두 가지 방법을 설명하시오.

마. 좀 더 심도 있고 종합적인 문항을 통하여 더 깊은 이해를 기한다.

예: 다음 중 옳은 주장은 증명하고 틀린 주장은 반증하시오.

① 선형변환 $T : V \to U$ 에서 $\dim V = \dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T)$ 이다.

② $L = \{T \mid T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 선형변환$\}$ 일때 $L \cong \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 이다.

③ 유한차원 벡터공간 V의 두 부분공간 W_1, W_2 에 관하여

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

이다.

④ $n\times n$ 행렬 A가 대각화 가능하기 위한 필요충분조건은 A는 n개의 서로 다른 고유치를 가지는

것이다.

바. 수학의 다른 영역과의 연관성을 충분히 인식하도록 한다.

예: 다음 연립 선형미분방정식을 고유치, 고유벡터, 대각화 등을 사용하여 푸시오.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

사. 학교 수학과의 관련성을 충분히 인식하도록 한다.

예: 좌표 평면상에 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식을 행렬식을 이용하여 나타내시오.

아. 실생활에서 수학적인 요소를 발견하도록 한다.

예: 사다리타기 게임에서는 왜 술래가 두 명일 수 없을까?

자. 인터넷이나 컴퓨터의 이점을 충분히 활용하도록 한다.

참 고 문 헌

경상대학교 사범대학 중등교육연구소 (2000). 세계의 학교 교육과 교사 양성 교육, 교육과학사.

박승안 (1990). 수학과 교육프로그램 개발연구, 연구보고 제90-7-80호, 한국대학교육협의회.

박승재 (1996). 중등 교원양성 교육과정 연구, 교육부 정책 연구과제.