韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 29-34.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 29-34.

교사양성대학 수학교육과 "미분방정식" 강좌 운영

-교육과정 및 교수학습 방법개발과 관련한-

이 병 수 (경성대학교)

물리학, 공학, 경제학, 생물학, 생태학 등의 자연현상, 사회 현상 그리고 심리상황 등과 관련된 내용들의 모델링 과정을 거쳐 나온 미분방정식의 해를 구하고 해의 의미를 파악하는 작업은 바로 우리의 생활의 진면목을 직접 확인하는 것과 같다. 모델링 과정의 효율성은 교사와 학생간의 충분한 수학적 대화속에서 더욱 의미가 커질 것이다. 아울러 학생들에게 미분방정식의 해의 실제적인 의미를 상상하게 하고 그 결과를 발표하게 하는 것과 해를 구하는 과정에 관한 이론의 이해를 돕는 것이 바람직한 학습 지도 방법이 될 것이다. 전 교육과정을 통해 미분방정식의 모델링 과정을 소개하면서 해의 존재성, 해의 유일성, 해법, 해의 의미 등의 학습 및 지도를 학습자 중심으로 운영할 필요가 있다.

I. 서론

교사 양성 대학 수학과는 수학에 대해 긍정적이고 적극적이며, 깊은 애정으로 수학의 본질과 응용의 가치를 깊히 이해할 수 있고, 학습과 지도를 통해 수학 교육의 의미를 최대한 실행할 수 있는 바람직한 교사 양성을 목적으로 한다. 교육내용학과 교과교육학 및 일반교육학의 효율적인 통합 운영을 바탕으로 다양한 교수 학습 방법의 개발과 함께 최대한으로 초중등 교육의 연계를 이룰 수 있는 교육과정 및 교수학습 방법개발은 본 연구의 최대 목적이다. Gavalas(2000)는 수학교육체계의 네 가지의 구성 요소로 교사와 학생 그리고 수학 외 교육공학의 중요성을 지적하고 있다. 그러나 수학 교육의 가장 큰 중심은 무엇보다도 학습의 주체인 학생과 학습지도의 주체이자 학습 환경의 보조자인 교사의 역할이다. 따라서 실제적으로 가장 중요한 것은 교사와 학생간의 인간 관계에서 이루어지는 학습 과정 그 자체라고 할 수 있다. 교사와 학생간의 학습과 관련된 인간관계는 보통 질문과 답변으로 이루어진다. 학생이 교사에게 행하는 질문과 교사가 학생에게 행하는 질문 및 그 질문에 따른 답변이 두 사람간의 수학적 인간 관계이다. 수학 강의의 한 축인 교사의 학생을 향한 질문의 양식이나 수준 혹은 형식에 따라 학생들의 수학에 대한 개념의 이해나 수학의 구성과정에 대한 이해가 달라질 수 있다(Mason, 2000). 교사의 질문은 학생들로 하여금 수학적 개념이나 기법 혹은 방법의 이해를 돕고 또한 그러한 것들을 이해한 정도를 평가하는데 있어서 교육적 도구의 역할을 한다. 반면 학생들의 질문은 교사로 하여금 학생들의 이해 수준을 직접 느끼게 하고, 자신의 강의 내용의 수준과 방법을 스스로 평가하게 하며, 그에 따른 개선책을 강구하게 만든다. 이러한 느낌과 평가 그리고 개선책의 강구는 학습 현장에서 즉시 이루어지므로, 수학교육에서 무엇보다도 중요한 것은 학생들의 직

접적인 질문이며 또한 그러한 질문을 자연스럽게 유도하고 이끌어 나가는 것이 교사들의 가장 중요한 학습 환경 조성이다. 또한, 학생들이 그룹을 지어 그들의 생각과 의문점들에 대한 의견을 교환하고 그들 스스로 동의하거나 또는 동의하지 않으면서 공동의 의견과 공동의 생각을 만들어 낸다면 수학 학습은 더욱 풍부해질 것이다(Lloyd, 1999; Richards, 1991; Slavin, 1990; Voigt, 1996). 따라서 학생들이 스스로 혹은 선생의 지도아래 적극적으로 3 내지 5명 정도의 그룹을 짜서 서로 토론하고 그 결과를 공동의 이름으로 발표하게 하는 것은 학습 증진과 인간 관계의 형성에 많은 도움이 될 것이다. 한편, 수학교육은 Zulkardi(2002)의 의견과 같이 실세계(real world)와 관련된 내용을 지도하는 것과 함께 학생들이 배우는 수학적 내용을 스스로 실생활 문제 상황(real-problem situations)으로 상상하고 해결할 수 있게 해야 한다. 수학교육 연구는 보통 순수적인 면과 응용적인 면의 두 가지 측면을 가지고 있다. 수학적인 사고와 수학적인 지도 그리고 수학적인 학습의 본성을 이해하는 것이 수학교육의 순수한 일면이고, 또 하나는 그러한 이해를 수학 강의의 개선에 활용하는 것이 수학교육의 응용적인 일면이다(Schoenfeld, 2000). 교사 양성 대학은 전문적인 수학자의 양성이 목적이 아니고 유능하고 바람직한 학습지도자의 양성이 목적이므로, 수학적 내용의 많고 적음이 문제가 아니고 수학적 내용의 전달 방법과 전달 내용이 그 무엇보다도 더 중요하다. 따라서 Cohen(2001)의 지적처럼 교사는 지도하고 있는 수학 내용을 잘 알고 있어야 할 뿐 만 아니라, 이전 수준의 학습 내용과 이후 수준의 학습 내용을 심도있게 알고 있어야 한다. 아울러 그는 지도 내용의 타 분야에의 응용 정도도 훤히 알고 있어야 한다고 지적하고 있다. 예비 교사가 습관적으로 수학적 사고를 하는 마음 가짐을 가지고 유연하고 상호 활동적인 학습지도를 할 수 있는 능력을 기르도록 지도해야 한다(Krantz, 2001). 그러기 위해서는 다양한 효과적인 학습 지도 스타일을 경험할 수 있도록 해야 하고 활동적인 학습 모형에 참여시켜야 한다.

수학의 연구 내용은 크게 집합과 함수의 두 부분으로 나눌 수가 있다. 일반적으로 함수 $y=f(x)$의 수학적 특성을 연구하고 방정식 $f(x)=0$의 근을 구하는 작업은 방정식 $f(x)=x$의 해를 구하고 해집합의 특성을 연구하는 부동점 이론과 함께 수학의 응용 분야에서는 핵심적인 역할을 한다. 마찬가지로 가장 단순한 미분방정식인 일계 상미분 방정식 $y'=f(x,y)$의 해를 구하고 그 해의 의미를 파악하는 수학적 활동도 매우 중요하다. 미분방정식은 물리학, 공학, 경제학, 생물학, 생태학 등의 자연현상 및 사회 현상과 관련된 내용들을 미분방정식적 모델링 과정을 거쳐서 나온 방정식이다. 따라서 이러한 미분방정식의 해를 구하고 해의 의미를 파악하는 작업은 바로 우리의 생활의 진면목을 직접 확인하는 것과 같다고 할 수 있다. Sanchez(1983)은 모델링 과정은 논리적인 문제를 푸는 것도 아니고, 또한 완벽한 지침을 요구하는 것도 아니며 단지 물리적인 식견과 수리적 추론 그리고 상식적인 견해의 조화로운 결합을 강조하며 물리적 현상과 관련된 예를 들어 수학적으로 묘사하는 과정을 설명하고 있다. 자연현상, 사회현상, 심리상황 등을 미분방정식적 모델링하는 과정의 효율성은 교사와 학생간의 충분한 수학적 대화속에서만이 더욱 의미가 커질 것이다. 아울러 학생들에게 미분방정식의 해의 실제적인 의미를 상상하게 하고 그 결과를 발표하게 하는 것과 해를 구하는 과정에 관한 이론의 이해를 돕는 것이 바람직한 학습 지도 방법이 될 것이다.

본 "미분방정식 교육의 교육 과정 및 교수학습 방법개발"과 관련한 강좌의 운영에서는 교사가 학생들의 질문을 유도하여 교사와 학생들의 충분한 토론의 기회를 갖는 학습 상황을 연출하는 방향으로 학습 지도를 전개하며, 직관력을 최대한 활용하는 입장에서 논리적인 수학적 사고 구조의 형성을 도우며, 학습 내용을 실생활의 문제와 관련시켜 지도할 수 있게 보조하고, 또 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 실생활로 연계시켜 사유하면서 끌어 나가는데 도움을 줄 수 있는 보조자료써의 역할을 하는 것을 목적으로 한다.

II. 연구 방향

1. 스스로 수학을 즐기고 수학의 본질을 이해하게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
2. 수학의 유용성을 알고 활용하게 하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
3. 실생활에서 수학을 발견하고, 수학적 내용을 스스로 실생활의 문제 상황으로 상상하고 해결할 수 있는 능력을 양성하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
4. 초·중등 교육과정과 연계된 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
5. 수학의 각 영역간에 연계성이 강조된 종합화된 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
6. 지적 흥미를 유발하여 자율적으로 탐구하게 하는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
7. 일반 교육학의 강좌를 수학 교육학에 대폭 흡수한 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
8. 교육 공학이 적극적으로 적용되는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
9. 교사가 학생들을 가르칠 때 사용하기를 바라는 그러한 수업 모형으로 미래의 교사를 양성할 수 있도록 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발
10. 실생활을 수학적으로 모델링할 수 있는 능력을 배양하는 교육과정 및 교수·학습 방법 개발
11. 소그룹으로 공동 학습을 하고 공동 결과를 생산하게 하는 교육 과정 및 교수·학습 방법 개발

III. 연구 내용

1. 강좌명

미분방정식

2. 선수과목

미적분학

3. 강좌 소개

과학, 공학, 경제학, 그리고 심리학 등의 사회현상 혹은 자연현상과 관련된 시스템이나 혹은 현상의 움직임 또는 상황등을 수학적으로 묘사하는 것은 실생활과 관련된 수학의 가장 중요한 내용중의

하나이다. 시스템과 현상의 변환과 관련된 변수의 설정과 함께 논리적 근거가 있는 가정이 우선적으로 설정되어야 한다. 이러한 가정은 그 시스템이나 현상에 바로 적용될 수 있는 경험법칙들을 포함하고 있어야 한다. 미분방정식이나 미분방정식계가 그러한 시스템의 수학적 모델에 해당된다. 물리계의 수학적 모델은 보통 시간을 변수로 포함하고 있으며, 그것의 해는 시간에 따라 그 시스템의 과거, 현재, 미래의 상황을 의미한다. 선수과목인 미분적분학에 대한 굳건한 이해를 바탕으로 하는 미분방정식은 독립변수에 따라 상미분방정식과 편미분방정식으로 구분되고, 미분의 계수(order)에 따라 일계방정식과 고계방정식으로 구분되며, 미분방정식의 계수(coefficient)에 따라 상수 계수 미분방정식과 변수 계수 미분방정식으로 분류되며, 선형(linear) 방정식과 비선형(nonlinear)방정식으로 분류된다. 미분방정식은 물리학, 공학, 경제학, 생물학, 생태학 등의 자연현상 및 사회 현상과 관련된 내용들을 미분방정식적 모델링 과정을 거쳐서 나온 방정식이다. 따라서 이러한 미분방정식의 해를 구하고 해의 의미를 파악하는 작업은 바로 우리의 생활의 진면목을 직접 확인하는 것과 같다고 할 수 있다. 미분방정식의 종류에 따른 해(또는 근사해)법의 발견과 해의 존재성과 해의 유일성등의 확인등과 해의 의미를 파악하는 것이 미분방정식의 주요 내용이다. 예를 들면, 가장 단순한 미분방정식인 일계 상미분 방정식 $y' = f(x, y)$의 해를 구하고 그 해의 의미와 특징을 파악하는 수학적 활동이 그러하다. Sanchez(1983)은 모델링 과정은 논리적인 문제를 푸는 것도 아니고, 또한 완벽한 지침을 요구하는 것도 아니며 단지 물리적인 식견과 수리적 추론 그리고 상식적인 견해의 조화로운 결합을 강조하며 물리적 현상과 관련된 예를 들어 수학적으로 묘사하는 과정을 설명하고 있다. 자연현상, 사회현상, 심리상황 등을 미분방정식적 모델링하는 과정의 효율성은 교사와 학생간의 충분한 수학적 대화속에서만이 더욱 의미가 커질 것이다. 아울러 학생들에게 미분방정식의 해의 실제적인 의미를 상상하게 하고 그 결과를 발표하게 하는 것과 해를 구하는 과정에 관한 이론의 이해를 돕는 것이 바람직한 학습 지도 방법이 될 것이다. 따라서 가장 먼저 실제 현상을 모델링하는 과장을 이해시키면서 상미분방정식과 편미분방정식의 의미를 이해하는 것을 도울 필요가 있다. 전 교육과정을 통해 미분방정식의 모델링 과정을 소개하면서 해의 존재성 해의 유일성, 해법, 해의 의미등을 학습 및 지도를 할 필요가 있다.

4. 목차

(1) 기본적인 정의와 수학적 모델

(2) 1계 상미분방정식

여러 종류의 상미분방정식을 소개하고 그에 따른 각각의 해법을 소개한다.

(3) 1계 상미분방정식의 응용

(4) 고계 선형미분방정식

상수 계수 동차 미분방정식을 다룬다.

(5) 2계 선형미분방정식의 응용

(6) 선형미분방정식의 멱급수 해법

변수 계수 동차 선형미분방정식을 다루고 멱급수 해법을 소개한다.

(7) 선형미분방정식의 Laplace 변환 해법

(8) 해의 유일성 및 존재성과 수치계산

방향장 개념을 소개하고, 일계초기치문제와 선형이계경계치문제를 중심으로 수치계산법을 다룬다.

(9) 유예(delay) 미분방정식

유예(delay) 미분방정식의 초보 내용을 소개한다.

(10) 편미분 방정식 개론과 수학적 모델

연습문제

5. 참고 문헌

1. 신준용 · 엄미례 · 이현영 (1998). Mathematica로 배우는 미분방정식, 서울: 교우사.

2. Driver R.D. (1978). Introduction to Ordinary Differential Equations, New York: Harper & Row, Publishers, Inc..

3. Rainville, E.D. & Bedient, P.E. (1974). Elementary Differential Equations, London: Collier Macmillan Publishers.

4. Ross, C.C. (1995). Differential Equations, An Introduction with Mathematica, New York:Springer-Verlag.

3. Zill D.G. (5th Ed.) (2001). A First Course in Differential Equations, United States: Brooks/Cole.

6. 필독서

가. 신현용 역, 우리 수학자 모두는 약간 미친 겁니다, 승산, 1999.

나. 신현용, 송영조 역, 무한의 신비, 승산, 2002.

다. 신현용 · 이종인 · 승영조 역, 뷰티풀 마인드, 승산, 2002.

7. 평가 기준

적극적인 발표와 토론에 참가하는 것을 기준으로 한 평가 비율은 다음과 같다.

중간 및 기말평가 : 각 30%, 구두 시험 : 10%, 발표와 토론 : 30%, 출석 : 10%

참 고 문 헌

신현용 · 서봉건 · 조숙례 · 임한철 · 이경희 (2002). Liping Ma의 연구와 그 시사점, 한국수학교육학회지 시리즈 E **13(2)**, pp.717-727, 서울: 한국수학교육학회.

전영남 (2002). 무한개념의 이해와 반성적 추상, 한국수학교육학회지 시리즈 E **13(2)**, pp.655-691, 서

울: 한국수학교육학회.

American Mathematical Society (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers,* (By Cohen, A.), Notices of the AMS, pp.985-988.

American Mathematical Society (2001). *Two reactions to the mathematical eduaction of teachers.* (By Krantz, S.G.), Notices of the AMS, pp.989-991.

Gavalas, D. (2000). *Study of the 'teaching system' according to systems theory,* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31(2), pp.261-268.

Klaoudatos, N. (1994). *Modelling-oriented teaching (A theoretical development for teaching mathematics through the modelling process,* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 25(1), pp.69-79.

Kwon, O.N. (1996). *Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations.* http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invKwo.pdf.

Lloyd, G.M. (1999). Two teachers' conceptions of a reform-oriented curriculum: Implications for mathematicst teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2, pp.227-252.

Mason, J. (2000). *Asking mathematical questions mathematically,* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **31(1)**, pp.97-111.

Richards, J. (1991). *Mathematical discussions.* In E. von Glasersfeld (Ed., Radical constructivism in mathematics education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Sanchez, D.A.; Allen, Jr. R.C. & Kyner, W.T. (1983). *Differential Equations,* An Introduction, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc..

Schoenfeld, A.H. (2000). *Purposes and Methods of Research in Mathematics Education,* Notices of the AMS.

Slavin, R. (1990). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leadership* **47**, pp.52-54.

Voigt, J. (1996). *Negotiation of mathematical meaning in classroom process:* Social interaction and learning mathematics. In L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer(Eds.), Theories of mathematical learning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. pp.21-50.

Zulkardi (2002). *How to design mathematis lessons based on the realistic approach?* RME. Literature Review, http://www.geocities.com/raluilma/rme.html.