韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 15집, 2003. 1. 1-7.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 15, Jan. 2003. 1-7.

교사양성대학에서의 수학사 및 수리철학 강좌 운영

신 현 용 (한국교원대학교)
서 봉 건 (한국교원대학교 대학원)

수학사 및 수리철학에 관한 연구는 교사양성 대학에서 더욱 강조되어야 할 부분임에도 불구하고 그에 관한 연구가 미진하다. 자연대의 수학과는 수학 그 자체가 중요하겠지만, 교사양성 대학에서는 수학 내용자체 뿐만 아니라, 수학의 역사적인 측면과 수학에 관한 인식론적인 측면이 함께 요구되어 진다. 절대적인 것으로 인식되어 온 수학에 대한 잘못된 선입견은 수학교육에도 심각한 악영향을 끼칠 수 있다. 그러나 괴델의 불완전성 정리 등으로 인해 수학에서의 논리체계는 더 이상 절대적이지 않다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 숱한 오류들의 극복을 통해 발전해 온 수학사적인 측면과 그로 인하여 수학에 관한 인식론적 변화를 수학에서의 큰 사건들을 중심으로 살펴보고자 한다. 구체적으로 유클리드 기하에서 비유클리드 기하의 발견, 칸토어의 무한한 역설의 발생, 역설을 극복하기 위한 수학기토론의 탄생, 괴델의 불완전성 정리로 이어지는 과정들을 살펴보고, 그로 인해 도출되어지는 수학교육적 시사점을 논의해 보며, 이르르 바탕으로 교사양성 대학에서의 수학사 및 수리철학 강좌의 운영 방안을 제시한다.

Ⅰ. 서 론

수학교육에서 중요한 요소는 무엇인가? 이에 대한 해답은 쉽지는 않을 것이다. 그러나 수학교육에서 교사에 대한 측면이 비중 있게 다루어져야 함에는 의심의 여지가 없을 것이다. 수학교사에 대한 측면 또한 다양한 범주에서 연구되어 질 수 있다. 특히, Ma(1999)는 교사의 교과내용에 관한 이해와 지식, 그리고 교사의 신념이 수학교육에서 얼마나 중요한가를 구체적인 사례연구를 통해 입증하였다.

교사의 수학적 지식이나, 교사가 수학을 어떻게 바라보고 있느냐에 대한 인식이나 신념 등과 같은 것은 각각 따로 분리해서 볼 것이 아니라 상호 유기적 관계 속에서 파악될 수 있어야 한다.

수학교육에 있어 교사의 수학에 관한 철학은 매우 중요하다. 왜냐하면 교사가 수학을 어떠한 관점으로 바라보고 있느냐에 따라 직접적으로 수업에 영향을 끼치게 되고, 그로 인하여 학생들이 수학을 바라보는 안목이나 태도가 달라질 수 있기 때문이다. 원하던 원치 않던 모든 수학 교수법은 일관되지는 않을지라도 수리철학에 의존한다고 한다(Thom,1973). 한편, Hersh(1986)는 수학이 무엇인가에 대한 본질적이고 철학적인 것은 어떻게 가르칠 것인가에 영향을 끼치고, 가장 본질적인 것은 최선의 교수법이 무엇인가가 아니라 실제로 수학이 무엇인가라는 것이다. 정영옥(1997)은 수학교육학에서 본질적으로 가장 중요한 문제 중의 하나는 수학 자체의 본질에 관한 문제와 그것을 기반으로 하는 수학 교수법은 어떤 것이어야 하는가에 관련된 것이며, 수학의 본질에 관한 문제는 수리철학에 속하는

인식론의 문제이며, 수학 인식론과 수학 교수법의 관련성은 암묵적으로 인정되어온 기본 가정이라 할 수 있다.

수학사 및 수리철학에 관한 연구는 교사양성 대학에서 더욱 강조되어야 할 부분임에도 불구하고 그에 관한 연구가 미진하다. 자연대의 수학과는 수학 그 자체가 중요하겠지만, 교사양성 대학에서는 수학 내용 자체 뿐만 아니라, 수학의 역사적인 측면과 수학에 관한 인식론적인 측면이 함께 요구되어 진다. 절대적인 것으로 인식되어온 수학에 대한 잘못된 선입견은 수학교육에도 심각한 악영향을 끼칠 수 있다. 그러나 괴델의 불완전성 정리 등으로 인해 수학에서의 논리체계는 더 이상 절대적이지 않다는 것을 알 수 있다.

예비교사들은 수학사 및 수리철학에 관한 강좌를 통해, 수학은 숱한 오류들의 극복을 통해 발전해왔다는 수학사적인 측면과 그로 인하여 수학에 관한 인식론적 변화가 있었음을 제대로 이해하여야 한다. 예를 들어, 유클리드 기하에서 비유클리드 기하의 발견, 칸토어의 무한과 역설의 발생, 역설을 극복하기 위한 수학기초론의 탄생, 괴델의 불완전성 정리로 이어지는 과정들을 살펴보고, 그로 인해 도출되어지는 수학교육적 시사점을 논의해 보는 것은 매우 유익할 것이다. 본 연구에서는 이를 바탕으로 교사양성 대학에서의 수학사 및 수리철학 강좌의 운영 방안의 예를 제시한다.

Ⅱ. 수학사 및 수리철학 운영 방안의 한 예

1. 강좌명

수학사와 수리철학(History and Philosophy of Mathematics)

2. 선수 과목

집합론, 기하학 Ⅰ, 추상대수학 Ⅰ, 해석학 Ⅰ

3. 강좌 소개

유클리드 원론, 무리수의 발견, 0, 음수, 그리고 복소수의 도입, 비 유클리드 기하학의 발견, 미적분학의 발전, 사원수(quaternions)의 발견, 수학기초론의 연구, 집합론, 그리고 괴델의 불완전성 정리 등을 중심으로 수학사를 개괄한다. 뉴턴 역학, 상대성 이론, 양자 역학, 초끈 이론 등의 이론 물리학의 역사와 관련 짓도록 시도한다. 이러한 수학의 역사를 살피는 과정에서 직관주의, 형식주의, 논리주의 등은 물론 Lakatos의 주장을 언급하여 자연스럽게 수리 철학적인 문제도 살핀다. 한편, 컴퓨터의 발달에 따른 증명 개념의 변화에 주목한다. 특히 정보 수학(특히 암호학)이나 이론 물리학(특히 양자 역학)에서 중요한 역할을 하는 확률의 다양한 속성을 살피고 확률의 역할에 주목한다. 이러한 논의를 바탕으로 수학적 증명을 재 조망하여 보고, 새로운 증명 패러다임, 그리고 이에 따른 새로운 형태의 증명 지도 방안을 탐색하여 본다. 끝으로 수학적 논리 체계의 근본적인 한계, 인간의 관찰 능력의 피할 수 없는 한계, 자연 현상에서의 확률(임의성)의 개입 등에 의한 수학에서의 확실성의 상실을 살펴봄으로 수학을 보다 정확히 이해하도록 시도한다.

4. 목차

가. 서론

나. 유클리드 원론

다. 비유클리드 기하학

라. 해석학의 발전

마. 칸토어의 집합론

바. 다양한 수리철학적 관점

사. 괴델(Gödel)이 준 충격

아. 수학교육에서의 역설과 직관

자. 확률의 신비와 힘

차. "증명"이란 무엇인가?

카. 수학과 자연에 대한 인식의 변화

5. 참고문헌

본 강좌에서는 특별한 주 교재를 정하지 않고 강의 목차마다 담당 강사가 정리한 강의 노트를 중심으로 이루어지나 아래의 참고문헌은 강의 전반의 이해를 돕기 위해 추천함.

박세희 역(1984), 수학의 확실성, 민음사.

우정호 역(2001), 수학적 발견의 논리, 민음사.

강문봉 (1993), Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

6. 필독서

필독서를 읽고 학기말까지 독후감을 제출할 것. 단 앞 선 강좌에서 읽은 책은 해당 없음.

신현용 · 승영조 역 (2002). 무한의 신비, 승산.

전대호 옮김 (2002). 유클리드의 창: 기하학 이야기, 까치.

박병철 역(2002), 엘러건트 유니버스, 승산.

7. 평가 기준

기말 평가 (40%)

과제물 (25 %)

퀴즈 (20 %)

독후감 (10 %)

출석 (5 %)

8. 본 강좌의 운영 방안

가. 교수 · 학습 방법

수학, 자연 과학, 그리고 철학은 분리하여 논하기 어려울 정도로 이들 분야는 깊은 관계를 가지고

있다. 수학자는 자연스럽게 과학적 문제와 철학적 문제에 접하게 되기 때문이다. 유클리드 기하학, 무리수의 발견. 0, 음수, 복소수의 도입, 사원수의 발견, 비유클리드 기하학의 발견, 미적분학의 발전, 칸토어에 의한 집합론, 선택 공리나 연속체 가설에 관련한 괴델과 코언의 연구 결과 등은 수학 자체에 있어서는 물론이고, 자연 과학의 발전, 수리 철학, 더 나아가 일반적인 철학 전반에 심대한 영향을 끼쳤다. 따라서 수학사적으로 중요한 사건들과 직관주의, 논리주의, 형식주의 등 수학에 대한 다양한 견해, 그리고 라카토스 등에 의한 수학 및 수학적 증명에 관한 견해는 적절한 수준에서 교사 양성을 위한 교육 과정에서 언급되어야 한다.

수학사와 수리 철학에 관련하여 여러 문제를 깊이 있고 폭 넓게 사고하고 이해함이 최선이나 교사 양성을 위한 본 교육 과정 강좌에서는 폭이 넓고 종합적으로 다루도록 노력한다. 특히 수학사와 수리철학을 따로 따로 다루지 아니하고 적절히 조화시켜 강좌를 진행하도록 한다.

또한 본 강좌에서는 수학은 물론 물리학에 대해서도 상식적인 수준에서 언급하며 수학과 관련짓도록 한다.

최근 컴퓨터의 발달은 수학 자체에도 심대한 영향을 끼치고 있다. 특히 증명의 개념에 많은 변화를 초래했다. 따라서 본 강좌에서는 증명에 관하여 다소 심층적인 논의를 함으로써 수학에서의 변화를 보게 한다.

본 강좌를 통하여 학생들이 수학의 강점은 물론 약점까지도 이해하도록 한다. 이를 위하여 수학에서의 확실성의 상실 등을 다루도록 한다. 이러한 이해는 학생들로 하여금 수학을 보다 정확히 이해하고, 이로 인하여 수학을 더욱 좋아하게 한다. 본 강좌는 사범대학의 경우에는 수학에 관하여 어느 정도 이해하게되는 3 학년 2학기 정도나 4 학년 1학기 정도에서 개설될 수 있을 것이다.

나. 본 강좌의 특성 및 유의점

강좌에서는 전통적인 수학사 또는 수리철학 강좌와는 달리, 실생활, 학교 수학, 수학의 타 분야와의 연계성, 그리고 컴퓨터 등 정보 환경의 활용 등에 상당한 비중을 두기 때문에 잘 못 운영하면 강좌가 산만해질 수 있다. 따라서 토의나 과제, 그리고 복습 퀴즈를 짜임새 있게 구성하여, 일관성과 심도 있는 강좌가 되도록 각별히 노력한다. 특히 매 강의 시 부여되는 과제는 강의와 같은 수준의 중요성을 부여하여 평가에도 그 내용이 포함되게 한다. 본 강좌는 강좌의 특성상 담당 강사의 취향에 따라 강의 내용과 방향이 크게 다를 수 있다. 여기에 제시되는 강좌 내용은 객관적인 입장에서 기술하려 노력하였지만, 집필자의 성향에 따른, 매우 개인적인 제안일 수 있는 부분이 있을 것이다. 그러나 수학사와 수리 철학에 대한 인식의 수준과 성향은 교사의 수학 교육에 대한 신념과 교수 행위에 큰 영향을 미친다. 따라서 본 강좌에서는 수학과 교육과정의 성격과 목표에 부합하는 강좌가 되도록 각별히 유의하여야 한다.

다. 본 강좌와 타 과목과의 관련성

본 강좌에서 언급하는 대부분의 수학자는 이 강좌 수강생 대부분에게는 낯설지 않을 것이다. 본 강좌를 진행하면서 등장하는 수학자들의 수학적 업적을 다시 정리하여 보게 하는 것은 효과적일 것이다. 예를 들어 칸토어가 견지한 실무한적 자세는 수학의 발달에 큰 역할을 하게 되는데 앞서 수강한 수학기초론(집합론)에서 선택공리나 연속체 가설 등에 관하여 다시 정리하여 보도록 하는 것이다. 또 미적분학 강좌에서나 해석학 강좌에서 다룬 수렴성(평등 수렴성) 개념의 정립 과정을 언급하거나 스스로 조사해 보게 하는 것도 좋을 것이다. 추상대수학 강좌에서는 작도 가능성과 다항식의 가해성, 그리고 종이 접기와의 관계들을 역사적으로 언급하거나 과제로 제시할 수도 있을 것이다.

라. 본 강좌의 추구방향

(1) 비 유클리드 기하학의 발견과 리이만 기하학으로의 발전, 가무한적 입장에서의 실무한적 입장으로의 변화 등으로부터 수학의 자유성은 물론 수학의 힘을 알게 한다.

한 편, 괴델의 정리와 초끈 이론이 주장하는 바를 살펴봄으로 수학의 내재적인 한계와 인간 이성의 한계도 알게 한다. 수학에 대한 이러한 이해는 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 할 것이고, 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 가지게 할 것이다.

(2) 수학의 발달 과정을 이해함으로 수학적으로 사고하는 능력을 길러 줄 것이다.

(3) 수학사를 활용하여 학습 효과를 증대시킨 많은 연구가 보고되어 있다. 수학사를 활용하여 학생들로 하여금 학습에 관한 흥미를 유발하고, 더 나아가 학습 효과를 높인 사례를 소개 할 것이다. 교사의 수학사에 대한 깊은 이해는 수학에 대한 학생들의 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 할 것이다.

(4) 본 강좌에서는 컴퓨터나 인터넷 등이 직접적으로 활용되기보다는 유용한 웹 싸이트를 통하여 필요한 정보를 제공하는 수준에서 활용될 수 있을 것이다. 따라서, 본 강좌를 운영하는 과정에서 추천할 만한 곳을 소개하도록 할 것이다. 물론 증명 지도 방안 등과 같은 특별한 경우에는 컴퓨터나 인터넷상에서 실험도 실시할 수 있을 것이다.

9. 평가

가. 각 강의를 시작하기 전에 지난 강의의 내용을 복습한다. 이 때, 예고 없이 퀴즈를 내어 지난 강의나 토의 내용을 간단히 평가하여 심도 있고 일관성 있는 강좌가 되도록 유도한다. 퀴즈 성적은 최종 평가에 반영되어야 한다.

예: 지난 시간에 학습한 비유클리드 기하의 의의에 대해 논하시오.

나. 중요한 개념과 그에 관련된 사항들을 종합적으로 이해하도록 하기 위하여 작문 형식의 평가를 실시한다. 즉, 중심 용어들을 몇 개 제시하고 그 용어들을 모두 엮어서 에세이 형식의 글을 작성하게 하는 것이다.

예: 다음 용어들을 모두 사용하여 작문하시오.

역설, 러셀의 논리주의, 브로워의 직관주의, 힐버트의 형식주의, 괴델의 불완전성 정리

다. 수학의 다른 영역과의 연관성을 충분히 인식하도록 유도한다. 이는 과제의 형식으로 실시하면 좋을 것이다.

예: 라카토스의 『수학적 발견의 논리』 (2001, 우정호 역)를 참조하여 해석학에서 배운 평등수렴의 개념이 나타나게 된 배경에 대해 설명하시오.

예: 대수학에서 배운 3대작도 불능문제에 대해 설명하고 종이접기가 이를 해결할 수 있는지 논하시오(인터넷에서 종이접기 관련사이트 참조할 것).

라. 학교 수학과의 관련성을 충분히 인식하도록 강좌 내내 유념한다. 이는 모든 강의나 토의 내용에 수학 교육적 의식을 고취시키도록 유도할 것이다. 이 점도 과제의 형식으로 실시하면 좋을 것이다.

예: 중등학교 과정에 무한의 개념이 등장한다. 이에 관한 다음의 주장을 읽고 본인의 생각을 정리하여 보자.

현대 수학에 익숙한 우리에게는 $0.999\cdots$는 하나의 분명한 수(무한 순환 소수)이며 이는 정확히 1과 같다. 지금 중학교 2학년(수학과 교육 과정 8-가 단계)에서 다루는 내용이다. "공비가 1보다 적은 무한 등비 급수의 수렴성" 등 필요한 수학적 내용들을 정확히 이해하면 쉽게 "증명"할 수 있다. 보통은 다음과 같이 설명한다: 먼저, $x = 0.999\cdots$ 라고 하면 $10x = 9.999\cdots$가 된다. 두 식으로부터 $9x = 9$ 를 얻고, 이로부터 $x = 1$ 을 얻게된다. 그러나 입장에 따라서 $0.999\cdots$과 같은 수 자체를 인정하지 않을 수 있다. 모양으로 봐서는 1과 매우 가까운 "것" 같으나 1 보다는 분명히 적은 어떤 "것"을 나타낼 뿐, 실존하는 "수"로 보기는 어렵다는 입장이 가능하다. 따라서 그러한 "것"을 "10 배" 한다는 것은 있을 수 없고, 설령 10 배가 가능하다 하더라도 10 배 하면 소수점의 위치가 오른쪽으로 한 칸 옮겨지는 이유를 도저히 설명할 수 없다. 게다가 다음과 같은 뺄셈은 전에 해 본 적이 없다: $9.999\cdots - 0.999\cdots = 9$. 결국 위의 모든 논증을 받아들일 수 없다. 주장하는 내용들이 그럴 듯 하기는 하나, 어쩌 이상하고, 수학 같지가 않다. 이제 $1 + 10 + 10^2 + \cdots$ 의 값을 같은 논법으로 계산하여 보자. 먼저 이 값을 x 라고 하면 $10x = 10 + 10^2 + \cdots$ 가 된다. 따라서 $9x = -1$ 를 얻고, 이로부터 $x = -\frac{1}{9}$ 을 얻게된다. 이 논증은 타당한가? 타당하지 않다면 앞의 경우와 무엇이 다른가?

또 다른 예를 들어보자. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$ 의 값을 계산하기 위하여 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$ 를 s 라고 하면, $s=1+\frac{1}{s}$가 되어 $s=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 임을 알 수 있다. 이제, 이와 같은 방법을 적용하여 다음 무한 급수의 값을 계산하여 보자.

$1 + (-1) + 1+ (-1) + 1+ (-1) + 1+ (-1) + \cdots = 1 - \{1 + (-1) + 1 + (-1) + 1+ (-1) + 1 + (-1) + \cdots\}$ 이므로,

$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ 를 s 라고 하면 $s = 1 - s$ 가 성립하여 $s = \frac{1}{2}$ 이다. 이 논증은 타당한가? 타당하지 않다면 무엇이 문제인가? 무한의 개념이 개입된 내용을 지도할 때에는 각별한 주의가 요구된다.

마. 실생활에서 수학사 또는 수리 철학적인 문제를 의식하도록 한다. 이 점도 과제의 형식으로 실시하면 좋을 것이다.

예: 수학에서의 역설의 다양한 예를 조사해보고 우리주변에서 역설적인 표현들을 찾아보고 논의하시오(예: 악마의 '악마' 유혹)

참 고 문 헌

정영옥 (1997). 수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점, 수학교육 학술지, 대한수학교육학회 시리즈, 제 7집, 서울: 대한수학교육학회.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Eds.), *New directions in the philosophy of mathematics* pp.9-28, Boston: Birkhauser.

Ma, L.(1999). *Knowiong and Teaching Elementary Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist?. In A. G. Howson(Eds.), *Developments in Mathematical Education* pp.194-209, Cambridge University Press.