韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 16집, 2003. 8. 165-173.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 16, Aug. 2003. 165-173.

소수의 관계적이해를 위한 스키마식 수업이 학습자에게 미치는 영향

이 상 덕 (단국대학교)
김 화 수 (단국대학교 대학원)
김 성 숙 (배재대학교)

수학은 추상적인 학문이다. '추상'은 몇 개 또는 무한히 많은 사물의 공통성이나 본질을 추출하여 파악하는 사고작용이다. 그리고 이 추상들이 모여 분류(유사성을 기초로 해서 우리의 경험을 함께 묶는 것)가 되고 그 다음에 이름이 붙여진다. 이것이 바로 개념(concept)이 형성되는 과정이고 수학자가 수학을 하는 과정이다. 그리고 이 개념들은 여러 가지 모양으로 결합하여 스키마(Schema)라고 부르는 개념 구조를 형성하게 되는데, 이 스키마(Schema)는 수학적 사고를 하는데 매우 중요한 역할을 한다.
본 논문에서는 기존의 초등학교 교과서의 소수의 관한 내용에서 교차연결고리가 부족한 부분을 보충한 스키마식 수업 모델을 제시하여 수학의 연계성과 위계성을 강조함으로써 학생들로 하여금 수학의 구조를 파악하게 하여 수학에 대한 흥미와 필요성을 알게 하는데 그 목적을 두고 있다.

I. 서 론

많은 초등학생들은 소수가 무엇인지 그리고 소수의 덧셈과 곱셈의 소숫점의 위치가 왜 서로 다른지, 소수점 이하의 자리수와 관계가 깊은 것은 무엇인지, 소수는 어떤 수의 범위에 포함되는지, 소수와 분수는 어떠한 관계가 있는지, 또한 분수는 나눗셈과 어떠한 관계에 있으며, 나눗셈은 뺄셈과 어떠한 관계에 있는지, 어떤 경우에 소수를 분수로 바꾸지 못하는지 등 여러 부분에서 이해하기 어려워한다. 그들은 그 이유가 무엇인지 그리고 그들의 연결고리가 어떻게 연결되어있는지를 알고 싶어 한다. 대부분의 초등학생들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 또는 개인 교습을 통하여 많은 양의 선수학습을 행하고 있지만 수학 학습에서 방법과 이유를 아는 관계적이해를 하고있는 초등학생들은 매우 드물었다. 실제로 본 연구자의 연구대상인 초등학교 3학년 영재아 대부분이 수학문제를 푸는 방법과 수학공식은 알고 있었지만 왜 그렇게 되는지의 이유를 아는 학생은 한 명도 없었다. 이들은 일반 학생들과 마찬가지로 방법과 이유를 아는 관계적이해의 수학이 아닌 주어진 규칙에 적용하여 정답을 찾아내는 도구적이해의 수학을 배워왔다는 것을 알 수가 있었다. 또한 가르치는 선생님도 수학영재교육을 내용의 원리 이해보다는 빠르고 많은 양의 어려운 문제 풀이에 집중해 왔다는 것을 알 수가 있었다. 그러나 학생들은 문제를 풀면서 왜 그렇게 되는지의 이유를 알고 싶어했다. 학생들에게 관계적이해를 할 수 있도록 그 이유를 설명해 주었을 때, 그들은 수학에 더 많은 흥미를 가지고, 여러 가지의 문제해결에 우수한 응용력을 보여 주었다.

이에 본 연구자는 이러한 문제점이 초등학교 3학년 영재아들이 가지고 있는 수학적 스키마의 연결고리에 문제점이 있다고 보고, 초등학교 3학년 영재아들을 지능검사와 문제해결력 검사, 창의력 검사를 통하여 비슷한 성향의 학생들 36명을 대상으로 각 반 6명씩 6반을 구성하여 3반은 소수의 대한 내용을 공식 암기위주의 수업을 하고 다른 3반은 스키마식 수업을 하여, 어떤 경우에 더 많은 학생들이 수학에 흥미를 느끼고 스스로 문제해결을 할 수 있는지 알아보았다.

II. 이론적 배경

A. Piaget의 scheme

Piaget는 합리적 사고와 지식의 본질을 내면화된 가역적 행동 곧 조작(operation)으로 보고 있으며 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지구조를 schemes이라고 부른다. Piaget의 발생적 인식론은 인지발달에서 수학적 사고의 발생에 특별한 의미를 부여하고 있다. 논리-수학적 개념은 대상으로부터의 단순추상에 의한 정적인 이미지가 아니라 대상에 대한 주체의 행동의 일반적인 조정으로부터 '반영적 추상화'에 의해 구성된 조작과 그것을 바탕으로 구성된 보다 고차의 조작이다. 즉 수학적 구조, 개념, 증명방법, 알고리즘, 명제, 정리 등 모든 것이 조작적 scheme이다. 결국 수학적 활동이란 scheme을 구성하고 적용하는 것이라고 할 수 있다. 이러한 입장에서 보면, 교사의 주된 과제는 아동에게 적절한 문제를 구성하여 아동으로 하여금 문제 의식을 갖고 연구하도록 이끌고, 그 결과를 정리하는데 조력하는 것이다.

B. Skemp의 schema

Skemp는 피아제의 심리학의 기본적인 아이디어를 수학 학습 심리학의 입장에서 해석하여 수학적 개념의 이해를 위한 학습지도이론 곧 스키마의 형성을 위한 스키마 학습이론을 전개하고 있다. 어떤 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 왜 그렇게 적용되는지를 알지 못하고 문제해결에 적용하는 상태를 도구적 이해라고 하고 방법과 이유를 아는 상태 특정한 법칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 상태를 관계적 이해라고 한다.

우리는 새로운 개념들을 자신이 알고있던 개념들과 함께 여러 가지 모양으로 구성해서 문제 해결에 도달하게 되는데, 이 개념들의 구성체가 바로 스키마(schema)이다.

Ⅲ. 연구 문제 및 연구의 제한점

A. 연구문제

1. 초등학교 3학년 학생들은 공식을 암기하여 문제를 해결하는 것을 좋아하는가? 아니면 원리를 파악하여 스스로의 방법으로 문제를 해결하는 것을 좋아하는가?

2. 초등학교 3학년 학생들은 어떠한 방법으로 문제 해결에 접근을 하는가?

B. 연구의 제한점

1. 본 연구의 대상자는 연구자가 임의로 선정하였기 때문에, 다른 지역의 초등학교 3학년 학생들에게도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.

2. 실험 처치를 위한 특정한 분야의 문제를 선정하였기 때문에, 다른 내용의 문제에 대해서도 동일한 연구 결과가 나올 것이라고 일반화하는데 제한점을 갖는다.

Ⅳ. 연구 방법 및 연구 내용

A. 연구 방법

본 연구는 대전에 있는 초등학교 3학년 학생 중에서 각 각 전체 석차 3%안에 들면서, *S*영재 교육원(사립기관)에 재학중인 영재아 36명을 대상으로 각각 6명씩 3반은 공식 암기위주의 기존의 교재중심의 수업을 중심으로 소수에 대한 내용을 소수 자체의 내용만을 설명 하였고, 6명씩 3반은 개념과 스키마를 중심으로 5개월간의 연구를 통해 다음과 같은 내용의 수업을 하면서 두 그룹을 비교하며 연구를 하였고 같은 내용의 소수에 관한 문제지를 바탕으로 결과를 관찰하였다.

B. 스키마식 수업모델 제시

1단계 : 나눗셈

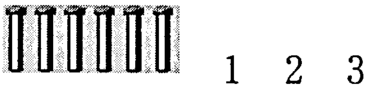
1. 「뺄셈과 나눗셈과의 관계(연결)에 대해서 설명하였다.」

2. 「나눗셈의 의미(등분제와 포함제)에 대해 설명하였고, 등분제와 포함제가 뺄셈과 연결되었음을 보여 주었다.」

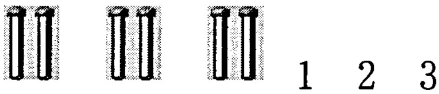
3.「나눗셈이 분수 $\left(\frac{\text{피제수}}{\text{제수}}\right)$로 나타내어지는 과정에 대해서 분수와 연결하여 설명하였다 .」

1단계의 예,

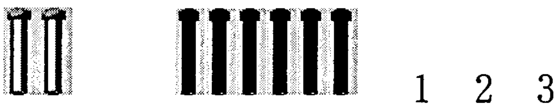
① 6÷2은 6에서 2을 세 번 빼는 것과 같다.



② 등분제 : 피제수를 제수가 나타내는 수로 등분한다.(6÷2)



포함제 : 피제수 속에 제수가 몇 번 포함되는가를 나타내는 것.(6÷2)



③ 나눗셈의 개념을 바탕으로 3÷5는 피제수 3에 제수 5가 5개 중의 3개가 포함되므로 $\frac{3}{5}$이 된다.

④ 6÷2는 6에서 2를 세 번 뺄 수 있고, 세 번 뺄 수 있다는 것은 세 번 포함되는 것과 같고, 그 말은 제수에 의해서 피제수가 삼등분 되는 것과 같은 뜻을 가진다. 그러므로 나눗셈의 등분제와 포함제를 뺄셈과 연결하여 설명하였다.

2단계 :분수

1.「분수의 개념에 대해서 설명하였다.」

2.「분수의 덧셈에서 분모를 통분하는 이유와 통분할 때 최소공배수를 사용하는 이유를 분수의 개념과 배수의 개념을 결합하여 설명하였다 .」

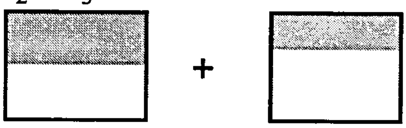
3.「분수의 곱셈은 왜, 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 곱하는지를 분수의 개념을 바탕으로 곱셈의 개념과 사각형의 넓이에 대한 개념을 결합하여 설명하였다.」

4.「분수의 나눗셈은 왜, $\left(\text{피제수}\times\frac{1}{\text{제수}}\right)$로 바뀌는지를 분수의 개념을 바탕으로 통분, 교환법칙, 역수, 나눗셈, 곱셈의 개념을 결합하여 설명하였다. 」

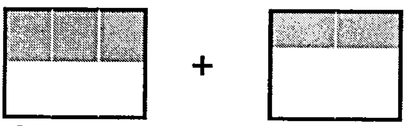
2단계의 예,

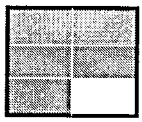
1) 모양은 다르더라도 크기나 양을 똑같이 되게 나누는 것.

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

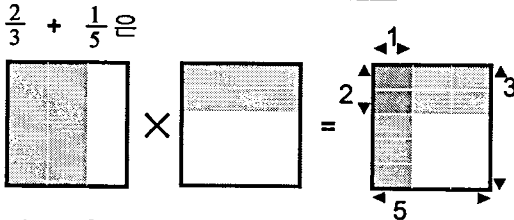


은 조각이 나누어진 개수와 조각의 크기와의 관계에 의해



가 되어  된다.

3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$은



$$\frac{\text{겹쳐진 부분의 개수}}{\text{전체 나누어진 부분의 개수}}=\frac{1\times 2}{5\times 3}$$

4) $$\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=\frac{1\times5}{2\times5}\div\frac{3\times2}{5\times2}=(1\times5)\div(3\times2)=\frac{1\times5}{3\times2}=\frac{1\times5}{2\times3}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}$$

3단계 : 소수

1. 「소수의 개념에 대해서 설명하였다.」

2. 「소수의 개념을 바탕으로 0과 1 사이에 소수가 어떻게 표시되는지를 설명하였다.」

3. 「소수가 분수로 어떻게 바뀌는지를 소수와 분수의 개념을 결합하여 설명하였다.」

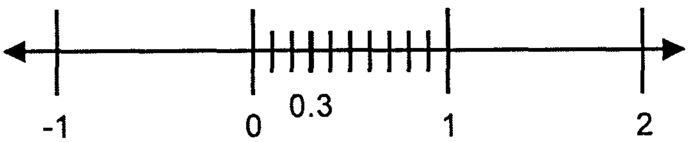
4. 「소수의 덧셈과 곱셈의 소수점을 찍는 위치가 왜 다른지 소수의 개념을 바탕으로 분수의 덧셈, 곱셈, 거듭제곱의 개념을 결합하여 설명하였다. 」

5. 「순환소수가 유리수(분수)가 되는 것을 소수의 개념을 바탕으로 분수, 등식의 성질, 방정식의 개념을 결합하여 설명하였다. 」

3단계의 예,

1) 0과 1 사이에 있는 실수.

2) 0.3을 수직선 위에 표시하면



3) 분수의 개념에 의해 10개 중의 3개이므로 $\frac{3}{10}$

4) $0.2 + 0.3 = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$이므로 계산된 결과의 분모도 10, 즉 등분된 개수에 변함이 없으므로 소수점의 위치는 변함이 없다.

$0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$이므로 계산된 결과의 분모가 100, 즉 등분된 개수에 변화가 있으므로 소수점의 위치도 변화한다.

5) 0.999⋯ 를 분수로 나타내면

$x = 0.999 \cdots$ - ① 등식의 성질 이용 양변에 $\times$ 10

$10x = 9.999 \cdots$ - ②

$x - 0.999 \cdots = 0$ - ①

$10x - 9.999 \cdots = 0$ - ②

① 식과 ② 식은 같으므로 $x - 0.999 \cdots = 10x - 9.999 \cdots$

그러므로 $x = \frac{9}{9} = 1$이 된다.

등식의 성질을 이용하여 방정식에 대해 설명한 다음 위내용을 설명하였다.

C. 연구 내용 분석

1. 공식 암기위주의 반

초등학생들은 소수의 덧셈과 곱셈 문제와 같이 공식을 외우기 쉽고 자주 대하는 계산문제는 매우 잘하고 있으나 계산문제를 제외한 응용문제에는 매우 저조한 정답률을 보였다. 또한 각 반 6명 중에서 2~3명(41%)은 공식을 이용하는 계산문제에서는 90%이상의 문제해결력을 보였지만 문장제 문제나 생활 속의 수학 문제에서 정답률이 20%에 가까웠다.

2. 개념과 스키마를 위주로 학습한 반

교사와 학습자간의 스키마와 스키마 사이의 간격이 줄어들어 수학에 흥미를 느끼고 스스로 배운 지식을 구성하여 수동적이 아닌 능동적인 자세로 수학에 접근함으로써 문장제 문제나 생활 속의 수학문제 또한 여러 가지 방법으로 해결해 나가는 것을 볼 수 있었다.

V. 결 론

수학은 추상적인 학문이다. 그러므로 개념이 형성되는 과정과 그 개념들이 모여서 어떠한 형태의 스키마를 형성하는지 알아야할 필요가 있다. 스키마는 개념과 개념들이 두 개 이상 모여서 이루어진 개념의 구성체이다. 그렇기에 개념에서 기호(공식)를 떼어내어 의미를 생각하지 않고 잘 형성된 습관에 따라 기호를 조작함으로써 이루어진 틀에 박힌 자동적인 수행은 스키마의 형성과 이해를 하는데 아무런 도움을 주지 못한다. 그러나 많은 학생들이 개념을 이해하고 또 하나, 둘씩 개념들을 모아 자기 스스로구성하고 연결해 가면서 문제를 해결하기보다는 단순히 암기한 공식에 따라 의미가 거의

없는 기호의 조작만을 연습하기 때문에 수학에 대한 흥미와 수학의 필요성을 느끼지 못하고 있을 뿐만이 아니라, 수학의 힘 또한 느끼지 못하고 있다.

이에 본 연구자는 이러한 문제점이 초등학교 영재아들이 가지고 있는 수학적 개념과 이 개념들의 구성체인 스키마를 형성하는데 있어서 개념과 개념사이의 연결고리에 문제점이 있다고 보고, 소수의 이해에 대하여 초등학교 3학년 영재아들을 연구한 결과, 개념들 사이의 연결고리가 잘 연결되지 않으면 이해보다는 암기를 하려고 하는 성향이 나타나 수학에 흥미를 잃어 금방 지루해했고, 그 반면에 연결고리가 자연스럽게 연결되었을 때에는 수학에 흥미를 느끼고 고학년의 수학내용, 문장제 문제, 생활 속의 수학문제 까지도 스스로 파악하고 다양한 방법으로 해결하려는 성향이 나타났다. 이것은 각 개념들의 원리를 교사가 학습자들에게 자세히 제공해 줌으로써 동화와 조절작용이 일어나 근본적인 원리를 이해하고 그로 인해 창의적인 생각을 할 수 있게 되었기 때문이다.

스키마를 이용한 수업은 학습자들로 하여금 조직화되고 추상화된 수학을 능동적으로 구성하게 함으로써 수학의 원리와 필요성을 동시에 느끼게 해 준다. 스키마는 학습자들이 진정한 의미의 수학 학습을 할 수 있도록 도움을 주는 교차연결고리이고 수학을 관계적으로 이해하는데 커다란 영향을 준다. 또한 스키마를 이용한 수업은 학습자들이 틀에 박힌 자동적인 수행을 멈추고 기호에 의미를 부여하여, 응용력과 창의력을 갖게 되어, 수학이 재미있고 유익하다는 것을 느낄 수 있게 할 것이다.

참 고 문 헌

라병소 (1999), 수학 학습에서의 관계적이해를 위한 스키마 구성에 관한 연구, 단국대학교 박사학위논문.

R. Skemp 지음 · 황우형 옮김, 수학 학습심리학, 민음사.

이상덕 · 김성숙 · 김화수 (2002), 수학의 관계적이해를 위한 스키마식 수업모델 제시, 한국수학교육학회.

이상덕 · 김화수 (2003), 스키마와 스키마 사이의 간격이 초등학교 3학년 영재아의 수학의 관계적이해에 미치는 영향, 한국수학교육학회.

Bransford, J. D.; Franks, J. J.; Vye, N. J. & Sherwood, R. D. (1986). *New approaches to instruction: Because wisdom can't be told*. Paper presented at the Conference on Similarity and Analogy, University of Illinois.

Brown, J. S.; Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, **18(1)**, pp.32-42.

Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1973.

Freudenthal, H. (1962). Logical analysis and critical survey In : Report on the relations between arithmetic and algebra, ed. H, Freudenthal Subcommission ICMI. Groningen, Wolters.

Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism Might Be in Mathematics Education. *PME-XI ; Program,* pp.3-27.

Perkins, D. N. & Salomon, G. (1988). Teaching for transfer. *Educational Leadership* **46(1)**, pp.22-32.

Rerfetto, G. A.; Bransford, J. D.; Franks, J. J. (1983). Constraints on access in a problem-solving context. *Memory and Cognition* **11**, pp.24-31.

Van Haneghan, J. P.; Barron, L.; Young, M.; Williams, S., Vye, N. & Bransford, J. (1992). The Jasper series: An experiment with new ways to enhance mathematical thinking. In D. F. Halpern (Ed.), *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics* pp.15-38, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive Activity. In C. Janvier(ED.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* pp.3-17, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Von Glasersfeld, E. (1991a). *Radical Constructivism in Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers.

Whitehead, A. (1929). *The aims of education,* Cambridge, MA: harvard University Press.