韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 16집, 2003. 8. 67-80.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 16, Aug. 2003. 67-80.

# DGS 동적 기하 환경에서 종속성에 의한 함수 개념 학습

김 민 정 (서울대학교 대학원)
김 화 경 (서울대학교 대학원)

함수적 사고는 수학적 문제 해결에 있어 기본적인 사고이다. 함수적 사고에서는 변수 사이의 종속성 파악이 그 핵심이 된다. 이는 DGS 동적 기하의 동적(변화), 종속적(구성)이라는 특성에 잘 부합한다. 이에 우리는 동적 기하 환경에서 타당한 종속성 부여를 통해 primitive한 생성자를 알아보고, 이들의 조작과 역 조작, 합성 조작하는 과정을 통해 함수적 사고에 접근하는 방법을 연구해 보려 한다. 나아가 자취 기능을 이용함으로써 시각화를 통해 종속적 관계를 표현해 보고자 한다. 이것은 MicroWorld 환경에서 학습자가 스스로 대상을 구성하는 경험을 통해 함수적 사고를 자연스럽게 형성하도록 하는 것이 바람직하다는 관점에 바탕을 두고 있다.

## I. 도입

집합론은 수학에서 의사소통의 언어적인 역할을 하며, 다른 수학 분야에 기초가 되는 학문이다. 이러한 관점에서 볼 때 집합론에서 가장 중요한 개념이라고 할 수 있는 '관계'와 '함수'는 수학적 표현에서 기본이 된다고 할 수 있다. 이것은 수학 교육에서도 동일하게 적용된다. 독립 변수와 종속 변수 사이의 관계를 파악하는 함수적 사고의 개념은 학교 수학에서도 중요한 위치를 차지하고 있으며, Klein은 "함수적 개념은 단순히 하나의 수학적 방법이 아니라 수학적 사고의 심장이요 혼이다." 라고 함수적 사고의 중요성을 지적하고 있다. 함수적 개념은 두 변수 간의 종속 관계를 표현하는 것으로 볼 수 있기 때문에 불변성, 종속성이라는 요인이 바탕이 된다. Freudenthal(1973)은 변수의 지도에 대해 기호에 대한 알고리즘적 조작만이 아닌 변수의 개념적 이해를 위한 교육이어야 한다고 말하고 있다. 이러한 종속성, 불변성은 형식적인 함수로 지도되기 이전부터 일상생활에서 자연스럽게 경험하게 된다. 학습자와 친밀한 주변의 변화 현상의 경험이 함수적 개념 구성의 시발점이 될 수 있을 것이다. 그러한 경험으로부터 종속성과 불변성에 대한 심상을 구성하고, 점진적인 수학화 경험을 거쳐 최종적으로 집합 사이의 대응 관계로서의 현대적인 함수 개념에 이르며, 함수의 형식적인 표현을 구사할 수 있다. 그러나 일상적으로 경험하는 이런 상황을 함수적으로 해석할 수 있게 되려면 의식적인 함수적 사고의 경험이 필요하다(우정호, 1998). 함수 개념 지도에 대한 연구로 김남희(1997)는 학교 수학에서의 변수의 개념 지도 방법에 대하여 연구하였고, 심규선(1997)과 이종영(1994)은 컴퓨터 환경에서 변수 개념 지도가 가능함을 주장하고 있다. 이 글에서는 의식적인 함수적 사고의 경험을 제공하는 환경으로 동적 기하 소프트웨어(Dynamic Geometry Software; DGS)를 제시하고자 한다.

이는 단편적인 변수 개념 지도를 위한 DGS의 사용이 아니고, 학습자의 구성이라는 큰 틀의 연장선에 위치하는 부분이다(조한혁, 2003). 또한 이는 DGS를 MicroWorld에서 바라보는 시각이다(Abelson et al., 1980, Edwards, 1995, Noss et al., 1996, Wilensky, 1993). 우리는 Sherin(2002)이 주장한대로 MicroWorld적, 구성을 강조하는 입장에서 DGS를 바라보고자 한다. 즉, 이미 만들어진(ready made) 도형을 탐구하거나, 원하는 도형을 메뉴를 이용하여 작도하는 것이 아닌 조금 더 적극적인 구성을 강조하는 DGS를 의미한다.

DGS의 동적인 특징은 도형에 대한 다양한 예를 탐구해 볼 수 있는 측면이 있어 DGS는 수학적 실험이나 탐구의 역할을 한다(류희찬외, 2000). 그러나 DGS의 다른 특징인 점의 연결성과 종속성은 DGS에서는 대상의 구조를 결정짓게 된다. 즉, 점의 연결성에 의해 결정되는 그림에서는 점의 종속성, 불변성이라는 특성이 그림의 모양을 결정하는 핵심이다. 점의 종속관계로 구성되는 그림에서 그 관계를 의식화하지 못할 경우 끌기(dragging)를 실행하면 그림은 흐트러지게 되어 당황스러운 상황에 부딪치게 된다. 이는 지필 환경에서 정적(static)인 대상으로만 인식되던 기하적 대상물에 대해, 동적 기하 환경에서는 구성(construction), 조작(manipulation)할 수 있다는 특성에서부터 비롯된 것이다. 동적 기하에서 같은 도형이라는 의미는 기존의 지필 환경에서의 합동과는 다른 의미로 해석되어야 한다. 움직이지 않는 상태로 같은 그림이라 하더라도 끌기를 하면 다른 그림이 되는 경우가 있다. 반대로 다른 그림일 지라도 끌기를 통하여 같은 모양을 가질 수 있다. 이 경우에는 동형(isomorphism)이라는 새로운 개념을 알고 있어야 한다. 두 가지 경우 모두 그 도형의 구성 절차가 강조된다. 만들어진 결과(product)보다는 만들어지는 절차(process)가 중요함을 알 수 있다. 이는 기존 기하에서의 명제를 결정된 명제로 받아들이기보다는 명제함수(조한혁, 2003)로 파악하는 바람직한 일련의 과정의 전단계에 해당한다.

우리는 먼저 이 글을 통하여 DGS에서 점들의 종속성의 의미를 기하적으로 알아보고, 타당한 종속성에 대하여 논의하여 몇 가지 기본적인(primitive) 종속성 부여 방식을 이끌어내려 한다. 이 후, primitive한 생성자(generator)를 통한 학생 스스로의 종속성 부여가 변수 및 함수적 사고를 하는 중요한 접임을 논의하려 한다. 이 글은 이러한 연구의 시작으로 변수 및 함수적 사고를 기하적 관점에서 살펴보려 할 것이며, 이는 MicroWorld를 통하여 스스로 구성하여 의미를 만드는 과정을 통하여 자연스럽게 형성하는 것이 바람직하다는 관점에 바탕을 두고 있다.

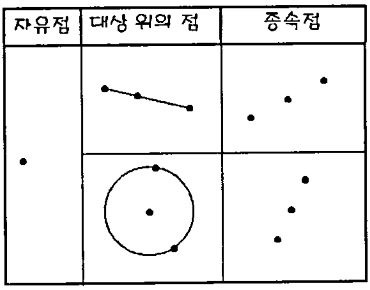
## Ⅱ. DGS에서의 종속성

DGS가 가지는 중요한 특징 중의 하나가 '종속성'을 가진다는 것이다. 동적 기하 환경에서 점에 종속성을 부여하는 명령어의 방식은 크게 세 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째, 기존의 GSP나 Cabri등에서 사용하는 메뉴방식이다. 이는 메뉴를 사용하여 간편하게 명령을 내릴 수 있으며 사용이 쉽다는 장점이 있다. 하지만 완성된 그림의 구성 절차를 파악하기 힘들며 위계적 절차에 대한 파악이 어렵

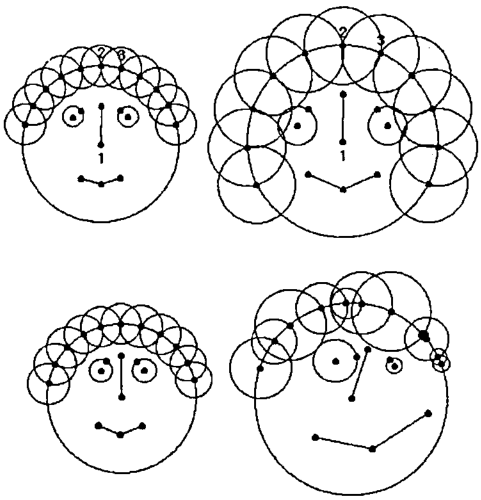
다. 또한 절차에 대한 간소화가 어렵다. 다음으로 Logo, Boxer(diSessa, 2000) 등의 마이크로 월드에서 사용하는 언어적 명령이 있다. 이는 만들어가는 절차를 강조하고 수정이 쉽다는 측면에서 강점을 가진다. 그러나 명령을 익숙하게 하는 데에는 어려움이 있을 수 있어 조기에 명령을 도입하는 시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 마지막으로 우리가 사용하려는 새로운 명령 체계인 마우스 클릭 순서(click sequence)를 이용하여 명령을 내릴 수 있다. 이는 쉬우면서도 절차가 강조되는 새로운 명령어 방식이다. 단점은 구체적인 숫자를 입력하기 어려운 면이 있으며, 메뉴 방식에 비하여 명령어가 어려운 점을 지적할 수 있다. 하지만 새로운 동적 기하의 디자인 측면에서 이는 절차적 이해를 돕는 바람직한 방법으로 고려할 만하다. 이에 JavaMAL MicroWorld를 이용하여 마우스 클릭 순서를 통하여 점에 종속성을 부여하는 타당한 방식을 논하고자 한다.

어떤 명령 방식을 사용하든 여러 도형을 구성하는데 기본이 되는 대상은 점, 선, 원으로 볼 수 있다. 여기서 선의 경우에는 두 점을 이어서 만들어지게 되며, 원은 두 점이 주어진 경우 한 점을 중심으로 하고 다른 점을 원 위의 점으로 해서 구성하거나, 세 점이 주어진 경우 원 위에 세 점이 존재하도록 하는 원이 만들어진다. 다시 말하면 다른 대상을 구성하는 기본 요소가 되는 선과 원도 점에 의해 결정되는 개념으로 볼 수 있다. 또한 DGS적 측면에서 동적인 면을 함께 고려한다면 DGS에서 가장 기본이 되는 것은 '점'으로 볼 수 있다. 이렇게 선과 원이 점에 의해 결정된다는 것은 선과 원 역시 점에 종속적임을 나타낸다. 또한 점들 사이에도 종속성을 볼 수 있다. 이것은 동적 기하 환경에서 점이 움직일 수 있는 '자유도'에 의한 것이다. JavaMAL 환경에서 생각해 보면 자유도에 따른 종속성은 크게 세 가지로 나누어 생각해 볼 수 있다. 첫째는 완전한 자유점이다. 화면 위의 아무 위치에나 찍을 수 있으며 어떤 위치로도 끌기가 가능하므로 완전히 제약이 없는 점이다. 화면위에 마우스 왼쪽 더블 클릭(double click)으로 생성되며, 이 점은 파란색의 초기값을 갖도록 지정되어 있다. 둘째는 대상 위에서만 움직일 수 있는 점이다. 원 위에서나 선분 위에서 움직일 수 있는 점이다. 대상 위에서는 자유롭게 움직일 수 있지만 그 대상을 벗어날 수 없다는 제약을 받게 된다. 대상위에 마우스 왼쪽 더블 클릭으로 생성된다. 이 점은 빨간색의 초기값을 갖는다. 마지막으로 그 자체는 움직일 수 없는 점이 있다. 예를 들면 대상 간의 교점이나, 중점, 대칭점 등이다. 이 점들은 그 점 자체를 따로 움직이는 것은 불가능하며 그 점이 종속된 다른 점을 이동시킴에 따라 움직이게 된다. 각각의 생성 방식에 따라 다른 명령어가 부여되며, 검은색의 초기값을 갖도록 설정되어 있다. 이 세 가지 중에서 학교수학에서 다루는 함수적 개념과 가장 근접한 것은 세 번째로 볼 수 있다. 두 개의 변수에(임의의 두 점) 대해 함수값(두 점으로 이루어지는 해당 종속점)이 하나로 지정되기 때문이다. 이때 함수값에 해당되는 점은 하나로 결정되며, 독립 변인에 따라 그 값이 변하게 된다.

<표 1> 자유점과 종속점

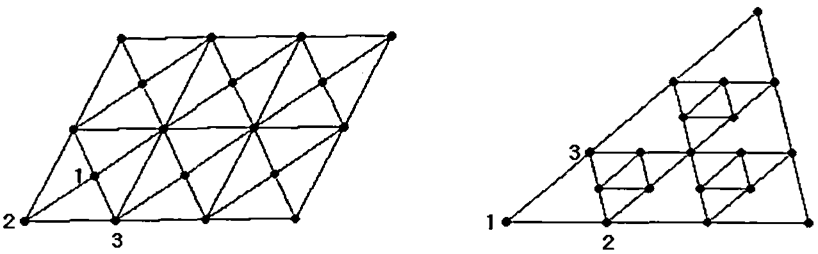



Colette Leborde와 Bernard Caponi(Goldenberg et al., 1998, 재인용)는 종속성의 기반으로 동적 기하에서 대상을 기하적 대상(geometric object), 모양(figure), 그림(drawing)의 세 가지로 분류하고 있다. 그림(drawing)은 점을 움직였을 때 따로 각 점들이 독립적으로 움직임으로써 구조가 흐트러지는 대상이고, 모양(figure)은 점의 종속성에 의해 그림의 구조가 보존되는 대상이다. 이 둘을 비교하여 종속 개념을 인식하는 방법으로 Healy et al.(1994)은 마우스 드래그를 통하여 흐트러지지 않도록 하는 mess-up을 제안했다. 독립 변인에 해당하는 점을 움직임에 따라 종속 변인에 해당하는 점까지 동시에 움직이며, 이러한 상황에서도 그림의 구조는 유지가 되도록 하려면 종속성을 제대로 부여해야 하며, 종속 개념을 인식하고 사용해야 한다. <그림 1>은 '사람 얼굴'을 만들어 놓은 것으로 한쪽은 흐트러지지 않는 그림으로 일정한 모양으로 변하는 경우이고 아래쪽은 모양이 흐트러져서 만든 의도와 다르게 움직인다. 이를 통하여 올바른 점들의 종속성 부여가 동적 기하에서 원하는 것을 얻을 수 있는 핵심임을 파악할 수 있다.



<그림 1> 사람 얼굴

Mess-up을 통해 '그림 자체의 보존'의 개념보다 '그림의 구조 보존'의 개념을 인지하고 한 점이 어떤 점에 의해 종속성을 제한 받는지를 생각하여 구조가 보존되는 기하 그림을 그릴 수 있다. <그림 2>는 보다 수학적이고 기하적인 대상이다. 여기서 주목할 점은 하나의 함수에 의해, 초기값이 변화됨에 따라 만들어지는 함수값 전체의 집합을 끌기로 모두 나타낼 수 있다는 것이다. 즉, 지필환경에서의 하나의 그림은 특정한 대표값(representative)이지만 동적 기하에서의 대상은 그 자체가 자유점의 움직임에 따른 함수의 치역으로 파악될 수 있다. 이를 통하여 구성 절차에 따른 기하적 대상의 동치 관계를 생각해 볼 수 있다.




<그림 2> 기하적 도형

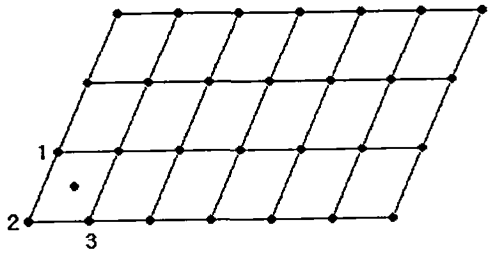
이제 점에 종속성을 부여하는 타당한 원리를 알아보고 이를 통하여 마우스 클릭 순서를 이용한 명령어 부여 방식에 대하여 알아보도록 하자.

## Ⅲ. 종속성 부여

동적 기하 환경에서 점이 가장 기본이 된다는 것은 이미 위에서 언급했다. 기본적인 기하 도형이든, 혹은 종속점이든 자유점에 대한 함수값이 된다. 종속점을 생성하는 기본적인 명령을 정하고 그러한 기본 명령으로부터 다른 명령을 함수로 구성할 것이다. 그렇다면 어떤 종속성 부여 명령을 기본 명령으로 정하는 것이 적절할 것인가? 이에 De Villier(1993)의 연구는 고려해 볼 만하다. De Villier는 변환(transformation)이 학교 수학을 관통하는 핵심이라고 주장하고 있다. 변환은 동적 기하의 동적(dynamic)인 측면과 부합한다. 즉, 기존의 지필 환경에서 변환을 강조하는 것은 시각적인 표현의 문제로 인해 지도상 어려움을 야기할 수 있지만 동적 기하의 동적인 측면에서 접근을 한다면 도움이 될 수 있다는 것이다. 그렇다면 변환을 통하여 종속성을 부여하는 방법은 무엇인가? 학교 기하 교육에 사용될 수 있는 유클리드 변환은 크게 세 가지로 나누어 볼 수 있다. 평행이동과 회전이동, 대칭이동이 그것이다. 그러나 평행이동과 회전이동을 명령어로 도입하기 위해서는 구체적인 수가 주어져야 한다. 즉, 평행이동은 어떤 방향으로 얼마 만큼인가의 수가 필요하며, 회전이동 또한 회전각의 크

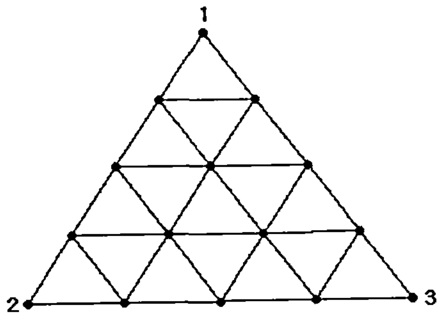
기라는 수가 필요하다. 이는 마우스 클릭 순서를 이용한 방법에는 적절치 않다. 이에 우리는 두 가지의 대칭이동(점대칭, 선대칭)이라는 종속성 부여를 통한 새로운 점의 구성에 사용하려고 한다. 여기서 평행 변환과 회전 변환을 제외하고 생각하는 방식이 명령어의 한계로 생각할 수 있을 것이다. 하지만 이는 언어적 명령어[1]의 추가를 통하여 보다 보완될 수 있을 것이다.

이제 대칭점을 이용하여 종속점을 여러 개 생성하여 연결한 <그림 3>를 살펴보자. 이 그림의 특징은 주어진 삼각형 123을 확장시켜 나가고 있다는 점이다. 즉, 대칭 변환을 통하여 주어진 삼각형과 같은 모양의 삼각형을 붙여 나가고 있는 것이다. 즉, 주어진 도형의 확장이다. 변환을 통한 새로운 점의 구성은 도형의 확장이라는 측면을 가지고 있다.




<그림 3> 확장형

그렇다면 주어진 도형을 줄여나가는 방법은 무엇일까? 줄여나간다는 것은 두 점이 이루고 있는 선분을 분할한다는 것으로 자연스럽게 두 점의 중점을 생각해 볼 수 있다. 마우스 클릭 순서를 이용하여 두 점의 중점 명령을 도입할 수 있다는 것이다.[2] 아래 <그림 3>은 중점을 이용한 도형을 줄여나가는 방법이다.




<그림 4> 축소형

1) 구체적인 수치가 필요한 상황에서는 부가적으로 각도점, 측도점 등의 언어적 명령을 추가할 수 있다.

2) 중점은 대칭점에서 대칭의 중심을 변인으로 종속점을 만드는 과정의 역으로 살펴볼 수 있지만 명령어 부여 방식은 별도가 필요하다.

사용한 대칭점과 중점 명령을 사용하여 제한적인 평행변환, 회전변환, 대칭변환 된 모양을 표현해 낼 수 있으며 언어적 명령이 보충될 경우 해당되는 크기만큼의 평행, 회전 변환을 정확히 표현하는 것도 가능하다. <표 2>는 기본 명령어를 정리한 것이다.

<표 2> 기본 명령어

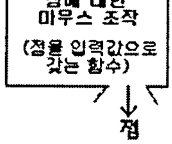
| 도형의 변화 | 기본 명령어 |
|---|---|
| 확장 | 변환(점대칭, 선대칭) |
| 축소 | 중점 |

기본적인 명령어로 대칭과 중점을 이용하여 이 두 가지로부터 종속점을 구성해 보도록 한다. 여기서 염두에 둘 것은 이러한 독립과 종속의 정의가 기하에서 독립 변수와 종속 변수의 역할을 하고 있다는 것이다. 학생들이 직접 종속성을 부여하고, 보다 나아가 자유점과 종속점 사이의 관계를 파악하여 동적 기하에서 변수 개념을 익히도록 구성하는 것이다. 점을 움직여보면서 점의 변화에 따른 전체의 변화를 파악하는 것이 핵심이다.

## Ⅳ. DGS를 이용한 함수적 개념과 함수적 사고

### 1. 합성 함수와 역함수

양의 가변성과 종속성은 수학화 되기 전 경험되며 변량 사이의 종속 관계 역시 정신적 대상이 되어 합성할 수도 있고 역으로 조작할 수도 있다. 이것이 바로 함수에서 합성함수와 역함수에 대한 자연스러운 정신적 작용이다. 그렇다면 DGS 상에서의 함수적 사고를 어떤 측면으로 볼 수 있을 것인가? 이제부터 앞에서 언급한 중점과 대칭점을 기본함수로 하는 함수 관계를 생각해보자. 이 함수는 점을 대칭점이나 중점 모두 임의의 두 점에 대해 결정되는 하나의 점으로 볼 수 있다. 위에서 말한 중점, 대칭점 만드는 명령을 기본 함수로 인식하면 이 두 함수의 합성으로 여러 가지 종속점을 만들 수 있으며 기하적 대상을 만들 수 있다.




<그림 5>

이런 방법으로 DGS 상에서 함수를 정의하게 되면 역함수와 항등함수는 역조작, 반복조작의 자연스러운 정신적 작용으로부터 연결될 수 있다. 임의의 점 $A$에 점 $B$와의 중점을 찍는 조작($f$)으로 $M$을 생성하고 다시, $M$에 대해 점 $C$의 대칭점을 찍는 조작($g$)으로 원래의 점 $A$를 출력하게 된다. 이 과정은 두 primitive function의 합성으로 원래의 점으로 돌아오게 되므로 이 두 조작(중점, 대칭점)을 역조작으로 인식할 수 있으며 이는 역함수의 관계를 포함하고 있다. 또한 $f$, $g$에 의해 생성된 새로운 점과 임의의 점들에 대해 마우스 조작을 반복함으로써 생성되는 점들은 함수의 합성을 통해 산출되는 값의 집합으로 볼 수 있다. 두 점이 주어진 경우에 대해서만 이러한 합성을 적용하게 되면 합성함수의 치역은 일직선에 만들어지게 되지만, 주어진 점이 세 개 일 경우 이러한 합성 조작을 통해 함수로써 여러 가지 사각형을 분류, 정의 할 수도 있다. 예를 들면 $A$, $B$, $C$ 세 점이 주어진 경우, $A$와 $B$의 중점($f$)을 생성하고, 그 점에 대해 점 $C$를 대칭시킴($g$)으로써 생성되는 점을 $D$라 하면 사각형 $ABCD$는 평행사변형이다. 이처럼 주어진 점이 여러 개일 경우 이러한 합성 조작을 통해 결과물들을 분류하고, 구조화하는 학습으로도 연결될 수 있으며 이것은 도형에서 길이, 각을 중심으로 규정하는 방식과는 다르게 동적, 관계적 특성을 이용해 새롭게 도형을 정의하게 해준다. 이것은 기본 함수를 이용해 여러 가지 방법으로 합성함으로써 새로운 점들을 만들어 나가는 과정과, 자유점을 움직여보면서 불변성을 파악해 나가는 과정으로 나누어 생각할 수 있다. 전자에 해당하는 것이 함수의 구성과 관련된 절차적 측면이라면, 후자에 관계된 것은 함수에서 중요한 독립변수에 따른 종속 변수의 변화, 즉 종속적 측면이라고 할 수 있다. 특히 두 조작이 구성적 절차는 다르더라도, 독립 변인의 변화에 따라 항상 같은 종속 변인을 생성해 낸다면 두 조작을 같은 조작으로 인식할 수 있다는 측면에서 서로 다르게 표기된 두 함수식이 정의역에 따라 동일한 함수가 될 수 있음을 인지하는데 도움이 될 수 있을 것이다.

**2. 기하적 대상에 대한 함수적 사고의 의미**

이와 같이 DGS 환경 내에서 점의 대응 관계를 하나의 함수적 관계로 볼 수 있다. 그런데 이렇게 함수적 사고의 대상으로 기하를 다루는 것은 어떤 의미를 가질 수 있는가? 함수적 사고에는 알고리즘적 측면과 변수의 임의적 측면을 생각할 수 있다. 전자는 함수의 구성과 관련 있으며 후자는 독립변인의 변화와 관련이 있다. DGS 상에서는 점의 대응관계를 이용한 기본 함수의 합성을 통해 함수를 절차적으로 구성해 나가는 과정을 거치며 드래그를 통한 점의 이동이나, 임의의 점에 대한 조작을 통해 독립 변수의 변화적 측면을 거치게 된다. 이것은 나아가 기하 명제의 함수적 인식으로 이어질 수 있다. 즉 $x+2<5$ 를 만족하는 $x$ 들의 집합을 부등식의 해라고 하듯이, 기하에서도 '이 도형 ($A$)은 어떤 성질 ($B$)을 만족한다.' 는 식의 접근과는 방향을 달리 하여 '어떤 성질 ($B$)을 만족하는 점들'로 어떤 도형 ($A$)을 구성할 수 있다는 접근이다. 이는 기존의 방식에 대한 역방향적인 접근으로, 주어진 함수에서의 치역을 만족하는 정의역 찾기의 과정으로 받아들일 수 있을 것이다. 실제로 학생들이 범하는 오류 중 하나가 '정삼각형은 이등변삼각형이다.' 는 것과 같은 선언적인 명제이

다. 그 원인 중 하나로 볼 수 있는 것은 기하 단원에서 교과서에 제시되는 전형적인, 정적인 그림으로 도형을 파악하는 것에 익숙해진 학생들이 좀 더 다양하고 일반적인 경우를 쉽게 생각해 내지 못한다는데 있다. 이런 상황에서 기하의 동적인 특성을 부각시켜 함수적 사고와 결부시켜 보는 것은 기하 학습에 새로운 접근이 될 수 있다.

다음으로 동적 기하를 함수적 측면에서 다루는 것은 monster(Goldenberg et al., 1998)를 어떻게 볼 것인가 하는 문제에 있어서도 하나의 관점을 제시할 수 있다. 분수 함수 $y=\frac{x+1}{(x-1)(x+3)}$ 의 경우에는 1 과 $-3$ 에서는 함수가 정의되지 않는다. 또 불연속 함수 중에서는 함수값과 극한값이 다른 경우가 존재한다. 이처럼 동적 기하의 상황을 함수로 인식하게 될 경우 monster라는 특이한 결과를 자연스러운 방법으로 해석할 수도 있다. 즉, 함수적 접근으로 동적기하 상황에서 일어날 수 있는 혼란을 극복할 수도 있다는 것이다. 따라서 함수적 사고의 대상으로 기하를 다루는 것은 여러 면에서 의미를 가진다.

이제 실제로 DGS 상에서 종속성에 의한 함수의 학습의 구체적인 방안을 제시해 보고자 한다. 이는 동적인 점의 자취를 이용하여 그 모양과 크기를 알아보는 방향으로 전개하도록 하겠다.

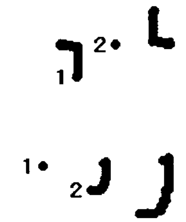
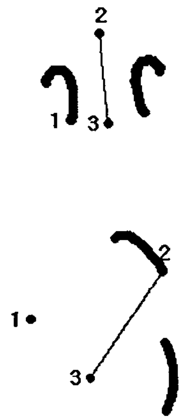
## V. 동적 기하에서 자취를 이용한 함수 학습

일반적으로 함수관계를 기술하는 직접적 패턴에는 함수표, 그래프, 함수식, 소유격 패턴의 언어 등이 있다. 이 중에서 함수의 그래프는 변화되는 양들의 관계를 시각적으로 표시해 줌으로써 변화를 전체적으로 파악하는데 용이한 특성이 있다. 동적 기하에서 그래프의 역할을 수행하는 것이 자취(trace)라고 할 수 있다. 이러한 맥락에서 Jahn(2000)과 Schumann et al.(1997)은 DGS에서 자취의 역할을 강조하고 있다. 자취는(locus) 다른 대상 $A$의 움직임에 따른 어떤 대상 $B$의 움직임의 흔적(trace)이다(Kortenkamp, 1999). 우리는 여기서 자유점 $A$에 움직임에 따른 종속점 $B$의 자취에 주안점을 둘 것이다.

동적 기하에서 자취란 점이 움직이는 흔적을 나타내는 것으로 Javamal에서는 점의 색과 같은 색의 굵은선[3]으로 표시된다. 이는 드래그를 통한 움직임의 흔적을 나타내는 동시에 자유점의 움직임에 따라 나타나는 종속점의 변화를 시각적으로 보여준다. 즉, 자유점과 종속점의 관계를 파악할 수 있는 열쇠인 셈이다. 이는 독립 변인(자유점)에 따른 종속 변인(종속점)의 변화를 그린 함수의 그래프 개념으로 생각할 수도 있다. 우선 앞에서 정의한 세 가지 명령어를 이용하여 만든 점의 자취를 나타내 보면 <표 3>과 같다.

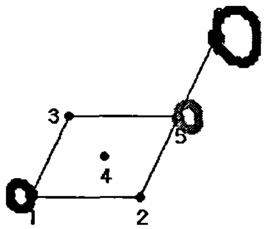
3) 실제로 이는 반응 속도에 따라 점의 속도의 개념을 나타낼 수 있다.

<표 3>

| 점대칭 | 선대칭 | 중점 |
|---|---|---|
|  |  |  |

이제 우리는 이러한 primitive한 명령어들을 정의하고 이 들 사이의 점의 종속성에 따른 움직임을 파악한 후, primitive 명령어를 통한 도형을 구성하고 이 구성한 방식의 하나하나의 절차를 따라서 종속점들을 움직임을 제대로 파악하게 된다. 이 때, 점대칭점을 종속시키는 변인은 두 개의 자유점으로 이 둘의 움직임에 따른 종속점의 변화를 알아야 하고, 선대칭도 같은 방법으로 종속점의 변화를 알아야 한다. 또한, 점대칭과 중점의 역의 관계도 파악해야 한다.

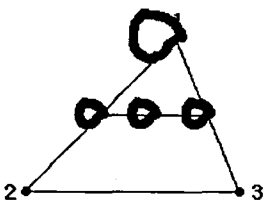
이제 함수적 개념과 관련하여 DGS 상에서 자취의 탐구는 크게 다음과 같이 이루어질 수 있다. 첫 번째의 경우는 주어진 함수에 대한 함수값을 산출하는 과정으로 구성한 종속점의 움직임을 추측하고 정당화하는 과정이고, 두 번째의 경우는 제시된 함수값을 산출하도록 하는 함수를 구성해내는 과정으로 주어진 자취의 변형을 만들어 내기 위한 구성 방법을 알아내는 것이다. 이 두 가지는 역방향의 활동으로 볼 수 있다. 함수에서의 독립변인의 변화에 따른 종속값 변화 탐구, 함수의 구성이라는 함수의 두 가지 측면에 부합하는 활동이 될 수 있다. 자취와 결부시켜서 활동을 생각해보자. 종속점의 자취는 그 종속점을 결정한 자유점의 움직임에 의해 결정된다. 이것은 종속점과 자유점에 자취 기능을 설정하여 움직여 보면 알 수 있다. 이 경우 두 자취는 비슷한 모양으로 만들어지게 되지만 방향과 크기 비에 있어서 조금씩 차이가 난다. 대칭점에 의한 종속점은 독립 변인의 자취와 반대방향을 나타내게 되며 중점에 의한 종속점은 독립 변인의 자취와 비교해 그 크기가 이다. 따라서, 이 두 가지 기본 함수의 합성으로 방향과 크기에 변화가 생기는 자취를 그리게 함으로써 동일한 조작이 여러 번 반복됨에 따라 어떤 규칙으로 변하는지에 대한 형태 파악을 할 수 있다. 자취를 이용하여 자유점과 종속점의 움직임을 파악할 때 강조되어야 할 것이 어떤 것인지 알아보도록 하자. 우선 <그림 8>을 살펴보도록 하자.




<그림 6>

점 1의 움직임에 따른 점 6의 움직임을 설명하는 문제이다. 이 문제의 해결의 핵심을 살펴보도록 하자. 일단 점 1의 점 4에 대한 대칭점인 점 5의 움직임을 기본 명령어의 움직임으로 예상하고, 점 2의 점 5에 대한 대칭점으로 점 6을 파악하고 점 5의 움직임에 따른 점 6의 움직임을 알아내게 된다. 이러한 흐름에서 강조되어야 할 것은 무엇인가? 결국 자유점(점 1)의 움직임에 따른 종속점의 움직임을 파악하는 과정은 그 종속성이 부여되는 각각의 절차를 파악하여 각 단계의 primitive 한 종속성의 움직임을 파악하고 이를 연결하는 과정인 것이다.

그렇다면 모든 구성된 상황은 이러한 일련의 선형성을 가지고 있을 것인가? 하지만 조금 복잡한 경우가 생기게 된다. 두 점에 의하여 결정되는 종속점에서 두 점이 동시에 움직이는 경우이다. <그림 9>는 그 간단한 예이다. 이러한 문제는 어떻게 설명할 수 있을 것인가? 기본 명령의 움직임의 단계를 거쳐 가는 것은 위의 예와 동일하지만 두 점이 동시에 움직이므로 상대적 속도에 대한 개념을 가지고 있어야 한다. 하지만 우리의 기본 명령어는 모양의 변화가 심하지 않으므로 그 모양을 예측하고 크기의 변화만을 고려하면 되기 때문에 문제가 좀 쉬워질 수 있다. 즉, 이러한 유형에서도 강조되어야 할 것은 역시 각각의 기본적 구성 절차인 것이다.




<그림 7>

이렇게 여러 단계의 종속점이 생기는 경우, 여러 종속점 중 최종적 종속점에 자취의 기능을 설정하고 초기의 독립변인을 움직여 주면서 자취를 탐구하는 과정에서는 그 둘의 관계를 바로 파악하는 것이 쉽지 않은 일이다. 중간에 합성 과정을 통해 그 둘의 관계를 맺어주는 매개 변수가 숨어있기 때문이다. 매개변수는 이차적인 독립변수라고 할 수 있는데 그것은 종속변수이지만 그 외형은 독립

변수로서 구조를 결정하는 역할을 한다. 초기 점이 $a_0$ 이고 조작 $f_1$ 에 의해 $a_1$ 이 생기고 다시 조작 $f_2$ 을 하는 과정을 거쳐 결국 만들어진 $a_n$ 이 있다고 하자. $a_0$ 을 움직임에 따라 $a_n$ 의 자취가 나타나는 것은 합성함수 $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ 에 의한 것이며 여기에는 $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{n-1}$ 이라는 매개변수들이 작용하고 있다. $a_0$의 움직임에 따른 $a_n$의 자취 변화를 시각화함으로써 여러 변수의 동시적인 움직임에서 우선 두 변수에만 주목할 수 있다. 그리고 중간에서 관여한 매개 변수가 최종적인 종속점의 변화에 어떤 영향을 미쳤는지 탐구해 볼 수 있다. 이처럼 자취가 변수의 변화를 시각화 한다는 장점을 이용해 형식적인 식을 이용하지 않고도 독립변인과 종속 변인의 관계를 인지할 수 있다. 물론 이러한 함수적 관계를 형식적으로 표현할 수 있는 단계로 나아가는 것이 그 이후의 과제가 되겠지만, 함수적 관계에 대한 경험의 결여로 학습자 스스로가 자신의 언어로 그것을 규정하지 못한 상태에서 형식적인 조작만이 이루어진다는 것은 의미가 없다. 자취를 이용해 변화를 탐구하고, 역으로 원하는 변화를 이끌도록 제한 요인을 구성해 나가는 활동을 통해 종속성을 경험하게 하는 일은 이러한 점에서 의미를 가질 수 있다.

## Ⅵ. 결 론

변수 개념은 동적 기하에서 중요한 개념이다. 즉, 자유점과 그에 종속되는 점들의 관계와 움직임은 하나의 변수 개념이다. 마우스의 드래그가 하나인 관계로 마우스 조작을 통하여 경험할 수 있는 변수는 일변수로 볼 수 있다. 이러한 접근은 점을 이용하여 동적 기하을 이용한 함수 개념 학습의 가능성을 보여준다. 우리는 여기서 동적 기하에서 점에 종속성을 부여할 수 있는 타당한 방법을 살펴보았고, 이러한 방식으로 종속점을 스스로 구성하여 그 종속점의 성질을 탐구하는 학습과, 주어진 성질을 만족하도록 종속점을 부여하는 두 가지 접근을 통하여 함수 개념의 학습을 알아보았다. 이는 함수란 대수에서만 한정되는 개념이 아니며 일상생활 보다 구체적으로 동적 기하에서도 일어나는 현상임을 알 수 있었다. 학교 수학에서 함수 개념 접근은 수식에 의해 형식적으로 이루어짐으로써 함수적 사고가 일상의 사고에서 자연스럽게 이어질 수 있음을 인지하지 못하게 한다. 동적 기하 환경에서 동적인 특성과 함수에서의 변수는 잘 부합할 수 있으며, 따라서 수식이 아닌 기하적 대상을 이용해 함수 개념 학습에 앞서 함수적 사고를 경험할 수 있도록 도움을 줄 수 있다. 요약하면, 동적 기하는 하나의 MicroWorld로써 학습자에게 의미 있는 경험을 통해 수학 교육에서 변수와 관련한 실제적, 의식적 경험을 제공함으로써 함수적 사고에 유용하게 작용할 수 있다.

수학교육의 목표가 되는 것 중 하나가 수학 내·외적인 현상들을 함수로 조직할 수 있는 함수적 사고 능력 및 태도를 개발하는 것이다. 다양한 실제적 변화 현상 가운데에서 종속 관계를 인식하고 그런 동적인 종속 관계를 구성해 보는 활동 경험을 하여 이를 내면화하여 규칙성을 발견하고 여러 가지 방법으로 표현하는 풍부한 경험을 통해 점진적인 수학화 과정을 거칠 수 있으며 이로써 함수 개념의 본질을 형성하고 함수적 사고의 발달을 기대할 수 있게 될 것이다.

# 참 고 문 헌


김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 대학원 교육학 박사 학위 논문.

류희찬 · 유공주 · 조민식 (2000). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색, 대한수학교육학회 논문집 **10(1)**, pp.139-159, 서울: 대한수학교육학회.

심규선 (1997). 교육용 프로그래밍 언어 Mal을 이용한 함수개념 지도, 서울대학교 대학원 교육학 석사학위 논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

이종영 (1994). 프로그래밍 경험을 통한 변수 개념지도, 대한수학교육학회 논문집 **4(1)**, pp.207-224, 서울: 대한수학교육학회.

조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(2)**, pp. 177-191, 서울: 한국수학교육학회.

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry*, Cambridge, MA : MIT Press.

De Villiers, M. (1993). Transformations : A golden thread in school mathematics, *Spectrum* **13**, pp.11-18.

diSessa, A. (2000). *Changing Minds*, Cambridge, MA : MIT Press.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representation. In diSessa, A.; Hoyles, C.; Noss, R. & Edwards, L.(Eds.), *Computers and exploratory learning*. Berlin : Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht : Reidel.

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry?, In R. Lehrer & D. Chazan(Ed), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, pp.351-368, NJ: Lawrence Erlbraum Associates, Publishers.

Healy, L.; Hoelzl, R.; Hoyles, C. & Noss, R. (1994). Messing up, *Micromath* **10(1)**, pp.14-16.

Jahn, A. P. (2000). New tools, new attitudes to knowledge : the case of geometric loci and transformations in Dynamic Geometry Environment, *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp.1-91.

Kortenkamp U. (1999). *Foundation of Dynamic Geometry,* Thesis of doctor of Technical sciences at the Swiss Federal Institute of Technical Sciences.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings,* Dordrecht, Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and Using Loci with Dynamic Geometry Software, In J. R. King & Schattschneider, D. *Geometry turned on! Dynamic Software in Learning,* *Teaching, and Research*, pp.79-88, The Mathematical Association of America.

Sherin, B. (2002). Representing Geometric Constructions As Programs : A Brief Exploration, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1), pp.101-115.

Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics - Building concrete relationship with mathematical knowledge*, Thesis of doctor of philosophy at the Massachusetts Institute of Technology.