

전달행렬법에 의한 변단면 곡선 상자형 거더교의 정적해석

Static Analysis of Curved box Girder Bridge
with Variable Cross Section by Transfer Matrix Method

김 용 희* 이 윤 영**
Kim, Yong-Hee Lee, Yoon-Young

Abstract

The state-of-art of curved box girder bridge with cross section design has advanced in various area. In these days, several analytical techniques for behaviors of curved box girder bridges cross section are available to engineers. The transfer matrix method is extensively used for the structural analysis because its merit in the theoretical background and applicability. The technique is attractive for implementation on a numerical solution by means of a computer program coded in Fortran language with a few elements. To demonstrate this fact, it gives good results which compare well with finite element method.

Therefore, this paper proposed the static analysis method of curved box bridge with cross section by transfer matrix method based on pure-torsional theory and the optimal span ratio /variable cross section ratio of 3 span continuous curved box girder bridge.

요 지

근래에 와서 도로교량의 형식 선정에서 미관에 대한 고려가 더욱 더 강조되는 추세 있으며, 미적으로 뛰어난 곡선교의 가설이 자연적으로 선호된다. 전달행렬법은 이론의 체계가 알기 쉽고, 응용범위가 넓은 점에서 구조해석법으로 범용성이 있는 것으로 주목되어 왔다. 전달행렬법에 의한 변단면 곡선 상자형교의 정적해석을 유한요소법과 비교하여 잘 일치함으로써 프로그램의 타당성을 검증하였다. 곡률반경과 중심각에 따른 해석 및 변단면 곡선식에 따른 지간비를 구하여 최적지간비와 변단면 비를 순수비틀이론에 의한 해석치를 분석하였다.

Keywords : cross sectional curved box bridge, transfer matrix method, pure-torsional theory
optimal span ratio /variable cross section ratio

핵심 용어 : 변단면 곡선 상자형교, 전달행렬법, 순수비틀이론, 최적지간비와 변단면 비

* 정희원, 경남대학교 토목환경학부 교수

** 정희원, 경남대학교 대학원 박사수료

E-mail : kyhee@kyungnam.ac.kr 055-249-2667

• 본 논문에 대한 토의를 2003년 9월 30일까지 학회로 보내 주시면 2004년 1월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

국내 산업의 발달로 인하여 교통수단의 대형화 및 중량화를 가져오고 도로선형에 따라 가설되는 최근의 교량은 구조와 형태가 점점 복잡 다양해지는 대도시의 교통상황을 개선하기 위한교량시설물로 사용되었고, 지역이 협소한 도심 내에서는 경제적 미관을 고려한 곡선 부재로 구성된 가장 대표적인 입체교차, 진입 램프 등의 시설물들이 빈번히 가설되고 있는 실정이다. 또한, 과거에 많은 곡선형 구조물들은 I형 거더와 콘크리트 슬래브의 합성 단면으로 건설되었으나, I형 거더는 비틀림에 대하여 매우 약하기 때문에 최근에는 비틀림 강성이 큰 상자형 단면을 사용하고 있다.

수평곡선 거더에 대한 정적인 해석은 Love⁽¹⁾에 의해서 처음 수행 되었고, 그 이후 1960년대 후반에 Wright⁽²⁾, Abdel-Samad⁽²⁾와 Robinson⁽²⁾이 BEF(Beam on Elastic Foundation) Analogy이론을 적용하여 상자형 거더를 해석하는 방법을 제안하였다. 이후 Pinjarkar⁽³⁾와 Chu⁽³⁾은 곡선 형 상자 거더에 적용할 수 있는 부채꼴 판(Sector Plate)과 원추형 셸 요소(Vertical Cylindrical Shell Element)로 분할하여 곡선형의 Fourier 급수로 전개한 변위함수를 이용한 유한대판법(Finite Strip Method)을 이용하였다. Shore⁽⁴⁾, Chaudhuri⁽⁵⁾, Ashwell⁽⁶⁾등은 유한요소법(Finite Element Method)을 이용하였으며, Nakai⁽⁷⁾, Komatsu⁽⁸⁾등은 전달행렬법(Transfer Matrix Method)을 이용하여 곡선형의 거동을 연구하였다. 변단면 곡선형 상자 거더교에 대한 비틀림 형상은 통상 단순 비틀림(Pure-torsion)을 고려한 휨(Bending)과 단순 비틀림과의 연성거동으로 취급하며 전달행렬법에 의해 교량 구조물의 역학적 특성을 해석하기 위해 대상으로 하는 교량 구조물의 역학적 거동인 휨, 비틀림 또는 축방향력 등의 연성 거동을 나타내는 미분 방정식의 풀이가 기초가 되고 있는데, 교량 구조물이 복잡한 연성 거동을 나타낼 때에는 엄밀해를 구하기가 곤란하지만, 라플라스 변환(Laplace Transformation)을 이용하여 일반적인 풀이를 용이하게 구할 수 있다. 또한, 전달행렬법에서는 적분 상수를 교량 구조물의 좌단의 모든 변위량과 단면력으로

나타났고, 격간행렬(Field Matrix)과 격점행렬(Point Matrix)을 통하여 교량 구조물 우단에 전달되며 우단의 경계조건에서 구조물 좌단의 변위량과 단면력을 구한다.

그러나, 곡선부재는 직선부재로 구성된 구조물에 비하여 해석 방법과 설계가 매우 복잡하여 우리나라의 교량설계 실무자들은 일본의 설계편람을 이용하고 있지만, 곡선교의 일반적인 거동에 대한 이해의 부족으로 인하여 과다설계를 초래하는 경우가 빈번하며 이를 해결하기 위한 노력은 다양하게 이루어지고 있다.

따라서, 본 연구에서는 전달행렬법에 의한 변단면 곡선상자형교의 정적해석을 유한요소법과 비교하여 프로그램의 타당성을 검증하였고, 곡률반경과 중심각에 따른 해석 및 변단면 곡선식에 따른 시간비를 구하여 최적시간비와 변단면 비를 순수비틀림이론에 의한 해석치를 분석하였다. 또한, 전달행렬법에 의한 변단면 곡선 상자형교의 정적 해석방법을 제시하여 보다 안정적이고 경제적인 실무 설계를 도출하는 데 그 목적을 두고 있다.

2. 휨-순수비틀림에 의한 전달행렬법

2.1 해석상의 가정

변단면 곡선형 상자 거더교의 해석방법은 휨과 순수 비틀림의 거동에 기초를 두고 있으며, 연립미분방정식을 라플라스 변환을 이용할 때 가정은 다음과 같다.

- ① 재료는 탄성체로서 균질이고 등방성이며 Hooke의 법칙을 적용한다.
- ② 지점상에는 강성의 격벽(Diaphragm)있는 것으로하며 기타 보강재를 무시하고 분할된 요소의 횡단면 변형은 격벽에 의해 충분히 방지되어 있으므로 각 요소는 휨과 순수비틀림을 받는 봉부재로 거동한다.
- ③ 해석에서 휨과 순수비틀림의 연성거동을 고려하며 휨-비틀림의 영향은 무시하고 단순 비틀림이론에 의한다.
- ④ 변위의 연속조건과 단면력의 평형조건은 상자 거더 단면 중심축을 고려한다.

2.2 기호

Fig. 1에서 곡률반경 R_D , 중심각 Φ , 부재의 길이 l 인 격간 k 에 대한 것이고 이러한 축 위에 작용하는 변위 및 단면력을 표현하였다.

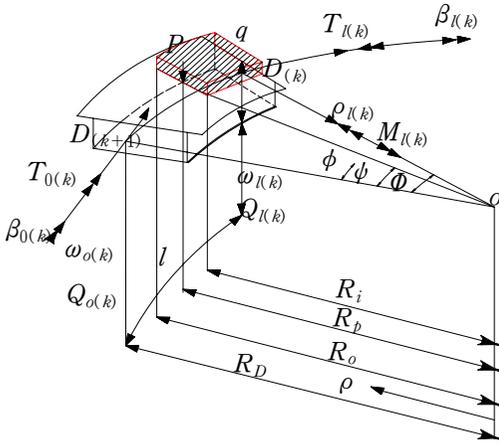


Fig. 1 좌표계와 단면력, 변위량

P : 집중하중 q : 등분포 하중

ω : 처짐 β : 단면의 회전각

ρ : 지연각 M : 휨 모멘트

T : 비틀림 모멘트 Q : 전단력

2.3 곡선형 박스 거더의 평형방정식

Fig. 2와 같이 제 k 번째 곡선부재에 등분포하중 q 및 분포 토크 m 이 작용 했을 때 그 미소 요소 $dl_k = R_D d\phi_k$ 이고 힘의 평형방정식은 식(1), (2)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_k}{d\phi_k} + T_k &= Q_k R_{Dk} \\ \frac{dT_k}{d\phi_k} &= M_k \\ \frac{dQ_k}{d\phi_k} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

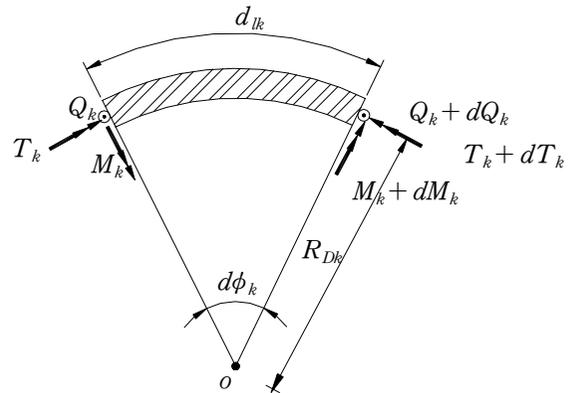


Fig. 2 미소 요소에 생기는 단면력

식 (1)에 의하여 모멘트(M_l)를 구하기 위한 미분 방정식은 식 (2)와 같이 된다.

$$\frac{d^2 M_k}{d\phi_k^2} + M_k = 0 \quad (2)$$

격간 k 에서 우단에 있어서의 단면력은 식 (3)과 같고 모멘트(M_l)는 식 (4)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} M_{l(k)} &= M(\phi_k) \\ T_{l(k)} &= T(\phi_k) \\ Q_{l(k)} &= Q(\phi_k) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$M_{lk} = M_{0k} \cos \Phi_k - T_{0k} \sin \Phi_k + Q_{0k} R_{Dk} \sin \Phi_k \quad (4)$$

식 (3)에 의하여 비틀림 모멘트(T_l)를 구하기 위한 미분 방정식은 식 (5)로 되고 비틀림 모멘트(T_l)는 식 (6)과 같이 된다.

$$T_k = Q_k R_{Dk} - \frac{dM_k}{d\phi_k} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{lk} &= M_{0k} \sin \Phi_k - T_{0k} \cos \Phi_k \\ &+ Q_{0k} R_{Dk} (1 - \cos \Phi_k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Fig. 3에서는 임의의 요소에 발생하는 변위량으로 나타났고, 전단 중심에 대한 휨강도 EI , 순수 비틀림 강성도 GK 로 나타났으며 변위와 단면력과의 관계는 식 (7)이 된다.

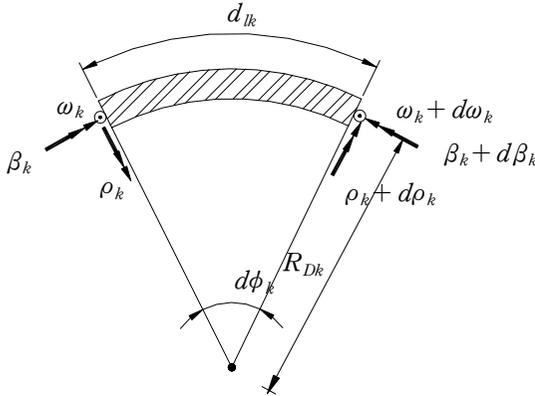


Fig. 3 미소 요소에 생기는 변위량

$$\left. \begin{aligned} E_k I_k \left(\frac{d\rho_k}{dl_k} + \frac{\beta_k}{R_{Dk}} \right) &= -M_k \\ G_k J_k \left(\frac{d\beta_k}{dl_k} + \frac{\rho_k}{R_{Dk}} \right) &= -T_k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

식 (7)에서 지연각 (ρ_k)은 식 (8)과 같이 된다.

$$\rho_k = -\frac{d\omega_k}{R_{Dk} d\phi_k} \quad (8)$$

지연각 (ρ_k)은 식 (7)~(8)에 의하여 식 (9)와 같고 라플라스 변환 하여 풀이하면 식 (10)이 된다.

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \rho_k}{R_{Dk}^2 d\phi_k^2} + \frac{\rho_k}{R_{Dk}^2} \\ &= -\frac{1}{E_k I_k} \frac{dM_k}{R_{Dk} d\phi_k} + \frac{1}{R_{Dk}} \frac{T_k}{G_k J_k} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_{lk} &= -\beta_{0k} \sin \phi_k + \rho_{0k} \cos \phi_k \\ &+ M_{0k} R_{Dk} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k) - \frac{1}{E_k I_k} \sin \phi_k \right\} \\ &+ T_{0k} \left\{ \frac{R_{Dk}}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \cdot \sin \phi_k \right. \\ &\quad \left. + Q_{0k} R_{Dk}^2 \left\{ \frac{1}{G_k J_k} (1 - \cos \phi_k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \phi_k \sin \phi_k \right\} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

또한, 회전각 (β_k)은 식 (8)에 의하여 식 (11)과 같이 되고, 라플라스 변환하여 풀이하면 식(12)와 같이 된다.

$$\beta_{lk} = \int_0^{\phi_k} R_{Dk} \left(-\frac{T_k}{G_k J_k} + \frac{\rho_k}{R_{Dk}} \right) d\phi_k + C_1 \quad (11)$$

여기서, $C_1 : \beta_{0k} \cos \phi_k$

$$\begin{aligned} \beta_{lk} &= \beta_{0k} \cos \phi_k + \rho_{0k} \sin \phi_k \\ &- M_{0k} R_{Dk} \left\{ \frac{\phi_k}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \phi_k \sin \phi_k \right. \\ &+ T_{0k} R_{Dk} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k) - \frac{1}{G_k J_k} \sin \phi_k \right\} \\ &- Q_{0k} R_{Dk}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

또한, 처짐 ω_k 은 식 (8)에 의하여 식 (13)과 같고 풀이하면 식 (14)와 같이 된다.

$$\omega_{lk} = -\int_0^{\phi_k} R_{Dk} \rho_k d\phi_k + C_2 \quad (13)$$

여기서, $C_2 : \omega_{0k}$

$$\begin{aligned}
\omega_{lk} = & \omega_{0k} - \beta_{0k} R_{Dk} (\cos \phi_k - 1) - \rho_{0k} R_{Dk} \sin \phi_k \\
& + M_{0k} R_{Dk}^2 \left\{ \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \right. \\
& \cdot \left(\cos \phi_k + \frac{\phi_k}{2} \sin \phi_k \right) - \frac{1}{E_k I_k} \cos \phi_k \\
& \left. - \frac{1}{G_k J_k} \right\} - T_{0k} \left\{ \frac{R_{Dk}^2}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) \right. \\
& \cdot (\sin \phi_k - \phi_k \cos \phi_k) \left. \right\} - Q_{0k} R_{Dk}^3 \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k J_k} \right) (\phi_k \cos \phi_k - \sin \phi_k) \right. \\
& \left. + \frac{1}{G_k J_k} (\phi_k - \sin \phi_k) \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

2.4 무차원화

전달행렬법에서는 격간행렬과 격점행렬을 여러번 곱하므로 각요소에 생긴 차원이 상이하게 다르기 때문에 오차가 발생한다. 계산 정밀도 향상을 도모하기 위해 변위, 단면력 및 하중항에 대한 식 (15)와 같이 무차원화(Non-dimensionalization)를 사용 하였다.

$$\left. \begin{aligned}
\omega &= \omega^* \frac{P_c R_c^3}{E_c I_c}, & \beta &= \beta^* \frac{P_c R_c^2}{E_c I_c} \\
\phi &= \phi^* \frac{P_c R_c^2}{E_c I_c}, & M &= M^* P_c R_c \\
T &= T^* P_c R_c, & Q &= Q^* P_c
\end{aligned} \right\} \tag{15}$$

여기서,

P_c, R_c, E_c, I_c : 무차원 기준량

$a_k = \frac{G_k K_k}{E_k I_k}, g_k = \frac{E_c I_c}{E_k I_k}$: 무차원 매개변수

2.5 격간행렬

격간행렬은 식 (4)~(14)를 식(15)로 무차원하여 식(18)과 같이 행렬로 표시된다. 또한, 제 k 격간의 좌단의 상태 벡터를 y_{0k}^* 로 나타냈고, 우단의 상태 벡터를 y_{lk}^* 로 나타냈으며 식 (16)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
y_{0k}^* &= \{ \omega_{0k}^*, \beta_{0k}^* \rho_{0k}^*, M_{0k}^*, T_{0k}^*, Q_{0k}^* 1 \} \\
y_{lk}^* &= \{ \omega_{lk}^*, \beta_{lk}^* \rho_{lk}^*, M_{lk}^*, T_{lk}^*, Q_{lk}^* 1 \}
\end{aligned} \tag{16}$$

식 (16)을 다시 정리하면 식 (17)과 같이 표현된다.

$$y_{lk} = F_k^* y_{0k}^* \tag{17}$$

여기서,

F_k^* : 격간행렬

$$F_k^* =$$

$$\begin{bmatrix}
1 & a_{1,2}^* & a_{1,3}^* & a_{1,4}^* & a_{1,5}^* & a_{1,6}^* & a_{1,7}^* \\
0 & \cos \phi_k & \sin \phi_k & a_{2,4}^* & a_{2,5}^* & a_{2,6}^* & a_{2,7}^* \\
0 & -\sin \phi_k & \cos \phi_k & a_{3,4}^* & a_{3,5}^* & a_{3,6}^* & a_{3,7}^* \\
0 & 0 & 0 & \cos \phi_k - \sin \phi_k & a_{4,6}^* & a_{4,7}^* & \\
0 & 0 & 0 & \sin \phi_k & \cos \phi_k & a_{5,6}^* & a_{5,7}^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{6,7}^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$a_{1,2}^* = \frac{R_{Dk}}{R_c} (1 - \cos \phi_k) = a_{5,6}^*$$

$$a_{1,3}^* = -\frac{R_{Dk}}{R_c} \sin \phi_k = -a_{4,6}^*$$

$$\begin{aligned}
a_{1,4}^* &= \frac{g_k}{2a_c} \left(\frac{R_{Dk}}{R_c} \right)^2 \{ (1 + a_k) \phi_k \sin \phi_k \\
&+ 2 \cos \phi_k - 2 \} = -a_{3,6}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,5}^* &= \frac{1 + a_c}{2a_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c} \right)^2 \\
&\cdot (\phi_k \cos \phi_k - \sin \phi_k) = a_{2,6}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,6}^* &= \frac{g_k}{2a_c} \left(\frac{R_{Dk}}{R_c} \right)^3 \{ (a_k - 1) \sin \phi_k \\
&- (a_k + 1) \phi_k \cos \phi_k \}
\end{aligned}$$

$$a_{2,4}^* = -\frac{1+\alpha_c}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \phi_k \sin \phi_k = -a_{3,5}^*$$

$$a_{2,5}^* = \frac{1}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \{(\alpha_k - 1) \sin \phi_k - (\alpha_k + 1) \phi_k \cos \phi_k\}$$

$$a_{3,4}^* = \frac{1}{2\alpha_c} g_k \left(\frac{R_{Dk}}{R_c}\right) \{(1 - \alpha_k) \sin \phi_k - (\alpha_k + 1) \phi_k \cos \phi_k\}$$

기초미분방정식 식 (3), (7)에서 격간행렬 및 격점 행렬에서는 등분포 연직하중 (q), 등분포 토크 (m), 집중하중 (p), 선하중 (p_0)은 모두 전단중심에 작용하는 것으로 취급한다.

$$\frac{dQ_k^*}{d_k \psi} = \int_{R_{IN}}^{R_{OUT}} P_0 \delta(\phi_k - \psi_k) d_k \rho \quad (19)$$

$$\frac{dQ_k^*}{d_k \psi} = \int_{R_{IN}}^{R_{OUT}} q \rho_k U(\phi_k - \psi_k) d\rho_k \quad (20)$$

$$\frac{d^2 M_k^*}{d\psi_k^2} + M_k^* = \frac{P_0}{R_{Dk}} L_{Dk} \delta(\phi_k - \psi_k) \quad (21)$$

$$\frac{d^2 M_k^*}{d\psi_k^2} + M_k^* = q L_{Dk} U(\phi_k - \psi_k) \quad (22)$$

$$L_{Dk} = \frac{R_{Dk}}{2} (R_{OUTk}^2 - R_{INk}^2) \quad (23)$$

$$L_{Dk} = \frac{1}{3} (R_{OUTk}^3 - R_{INk}^3) \quad (24)$$

Fig. 4에서 하중이 재하될 경우 평형조건은 식 (19), 식 (21)과 같고, Fig. 5의 평형조건은 식 (20), 식 (22)와 같이 표현된다. 또한, Fig. 6, Fig. 7과 같은 하중 재하 상태에서 평형조건식은 식 (23), 식(24)과 같이 표현된다. 이러한 조건식에 의하여 구한 특수해는 격간행렬의 제 7렬제 $f_{i,7}^*$ ($i=1\sim 6$)의 하중항으로 표시되고 Table 1, Table 2와 같이 표현된다.

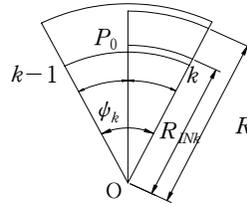


Fig. 4 반경방향선하중

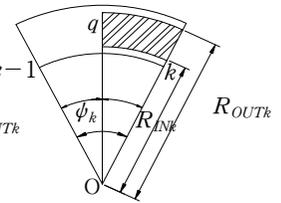


Fig. 5 부분등분포하중

Table 1 반경방향선하중 (p_0)

하중항	산정식
$a_{1,7}^*$	$\frac{P_0 R_{Dk} g_k}{2 P_c R_c^3 a_k} [L_{Dk} (a_k + 1) \{(\sin(\phi_k - \psi_k) - (\phi_k - \psi_k) \cdot \cos(\phi_k - \psi_k))\} + 2(L_{Dk} - L_{Dk}) \sin(\phi_k - \psi_k)]$
$a_{2,7}^*$	$\frac{P_0 g_k}{2 P_c R_c^2 a_k} [-L_{Dk} (a_k + 1) \{(\sin(\phi_k - \psi_k) - (\phi_k - \psi_k) \cdot \cos(\phi_k - \psi_k))\} + 2(L_{Dk} - L_{Dk}) \sin(\phi_k - \psi_k)]$
$a_{3,7}^*$	$\frac{P_0 q k}{2 P_c R_c^3 a_k} [-L_{Dk} (a_k + 1) (\phi_k - \psi_k) \cdot \sin(\phi_k - \psi_k) + 2 L_{Dk} (1 - \cos(\phi_k - \psi_k))]$
$a_{4,7}^*$	$\frac{P_0 L_{Dk}}{P_c R_c R_{Dk} a_k} \sin(\phi_k - \psi_k)$
$a_{5,7}^*$	$\frac{P_0}{P_c R_c R_{Dk}} (L_{Dk} - L_{Dk} \cos(\phi_k - \psi_k))$
$a_{6,7}^*$	$\frac{P_0 L_{Dk}}{P_c R_{Dk}^2}$

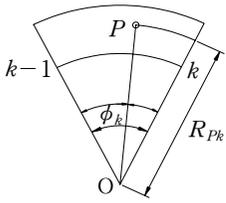


Fig. 6 집중하중

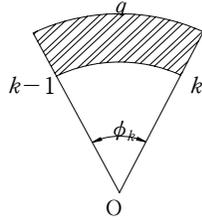


Fig. 7 등분포하중

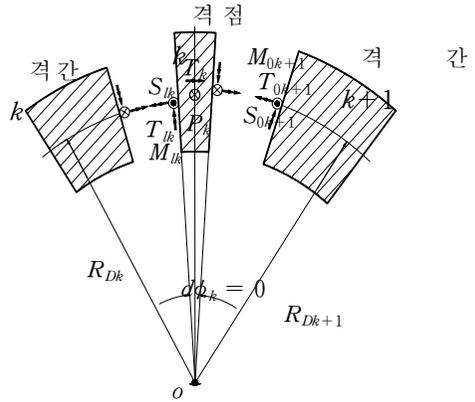


Fig. 8 격점에 작용하는 단면력

2.6 격점행렬

Fig. 8의 절점 k 와 $k+1$ 의 변위에 대한 적합조건과 단면력의 평형조건을 고려하면 식(25)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} w_{lk+1} &= w_k - \frac{R_{Dk+1} - R_D}{R_C} \beta_l, \quad \beta_{lk+1} = \beta_k \\ \rho_{lk+1} &= \rho_k, \quad M_{lk+1} = M_k, \quad S_{lk+1} = S_k - P_k \\ T_{lk+1} &= T_k - \frac{R_{Dk+1} - R_D}{R_C} S_{lk}^* - T_k^* \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

식 (25)를 행렬의 형태로 표현하면, 격점 k 에 있어서 격점행렬은 식 (26)과 같이 된다.

식 (26)에서 하중항 T_k^* 및 P_k^* 는 각각 격점 k 에 작용하는 비틀림하중 및 집중하중으로서 격점 k 의 우단과 격점 $k+1$ 의 좌단에 있어서 관계식은 식 (27)와 같이 표현된다.

Table 2 부분등분포하중 (q)

하중항	산정식
$a_{1,7}^*$	$\frac{qR_D, kqk}{2P_c R_c^3 a_k} [L_{Dk}(\alpha_k + 1) \cdot \{2 - (\phi_k - \psi_k) \sin(\phi_k - \psi_k) - 2 \cos(\phi_k - \psi_k) + L_{Dk}(2 - (\phi_k - \psi_k)^2)\}]$
$a_{2,7}^*$	$\frac{P_0 R_D, kqk}{2P_c R_c^3 a_k} [L_{Dk}(\alpha_k + 1) \{(\phi_k - \psi_k) \cos(\phi_k - \psi_k) - \sin(\phi_k - \psi_k) + 2L_{Dk} \{-\sin(\phi_k - \psi_k) + (\phi_k - \psi_k)\}\}]$
$a_{3,7}^*$	$\frac{P_0 R_{Dk} q_k}{2P_c R_c^3 a_k} [L_{Dk}(\alpha_k + 1) \{(\phi_k - \psi_k) \cos(\phi_k - \psi_k) - \sin(\phi_k - \psi_k) + 2L_{Dk} \{-\sin(\phi_k - \psi_k) + \phi_k - \psi_k\}\}(\phi_k - \psi_k)]$
$a_{4,7}^*$	$\frac{qL_{Dk}}{P_c R_c} \{1 - \cos(\phi_k - \psi_k)\}$
$a_{5,7}^*$	$\frac{q}{P_c R_c} \{L_{Dk}(\phi_k - \psi_k) - L_{Dk} \sin(\phi_k - \psi_k)\}$
$a_{6,7}^*$	$\frac{qL_{Dk}}{P_c R_{Dk}} (\phi_k - \psi_k)$

$$P^*(k) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{R_{Dk+1}-R_D}{R_C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -T_k^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P_k^* \quad (26)$$

$$y_{lk+1}^* = P_k^* y_{lk}^* \quad (27)$$

여기서,

$$y_{0k}^* = \{ \omega_{0k}^*, \beta_{0k}^*, \rho_{0k}^*, M_{0k}^*, T_{0k}^*, Q_{0k}^* \}^T$$

$$y_{lk+1}^* = \{ \omega_l^*, \beta_l^*, \rho_l^*, M_l^*, T_{lk}^*, Q_{lk}^* \}^T$$

격점 k 의 우단과 $k+1$ 격점의 좌단의 상태 벡터는 식 (17)와 식 (24)로부터 격간행렬 F_k^* 와 P_k^* 를 식 (25)와 같이 순차적으로 곱하여 구할 수 있다.

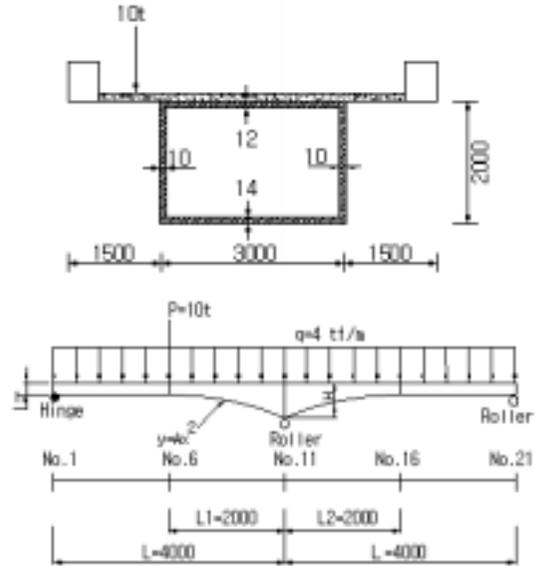
$$y_{lk+1} = P_k F_k P_{k-1} F_{k-1} P_{k-2} \cdots F_2 P_1 F_1 y_{L,1} \quad (25)$$

3. 프로그램의 검증

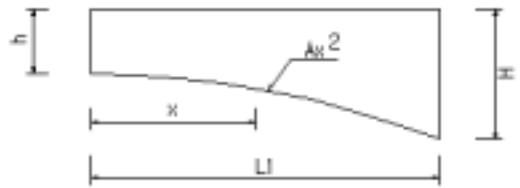
3.1 해석 모델

Fig. 9 a), b), c)는 AASHTO11)의 곡선교 시방서에서 최소 곡률 반경을 100feet (30.48m)로 제한되어 있으므로 $R=40m$, $L=80m$, $E=2.1 \times 10^6 tf/m^2$, $\nu=0.3$ 인 2경간 연속 변단면 곡선 부재를 사용하여 곡선 상자형교의 프로그램을 검증하였다.

Table 3~5에서 변단면 곡선 상자형교를 프로그램의 검증을 위해 유한요소법과 비교한 결과 1%미만의 차이가 나타났고, 이러한 차이는 유한요소법의 특성인 행렬의 중첩원리가 아닌 행렬의 순차적인 곱에 의한 차이라고 판단된다.

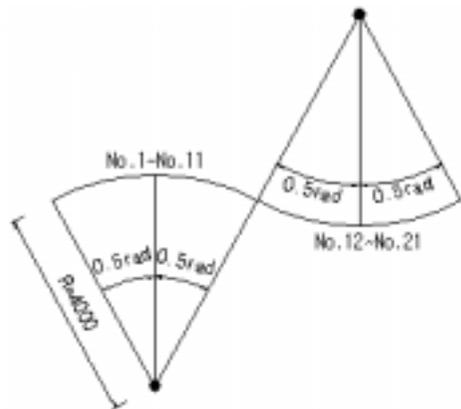


a) 곡선 상자형교 단면



$$A = \frac{H-h}{(L)^2} : \text{변단면 이차항 계수}$$

b) 곡선 상자형교 측면도와 하중상태



c) 곡선 상자형교의 평면도

Fig. 9 2경간 해석 모델 곡선 상자형교

Table 3 처짐의 비교

	유한요소법	전달행렬법	차이(%)
NO.1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-
NO.6	0.2243884E+00	0.2232578E+00	0.50641
NO.11	0.0000000E+00	0.1216637E-14	-
NO.16	0.1704356E+00	0.1697885E+00	0.38112
NO.21	0.0000000E+00	0.4505357E-14	-

Table 4 회전각의 비교

	유한요소법	전달행렬법	차이(%)
NO.1	-0.2268841E-01	-0.2238743E-01	-
NO.6	0.5801381E-02	0.5794911E-02	0.11165
NO.11	0.2487126E-02	0.2477084E-02	0.40539
NO.16	-0.5807231E-02	-0.5795881E-02	0.19583
NO.21	0.1832651E-01	0.1822750E-01	-

Table 5 비틀림각의 비교

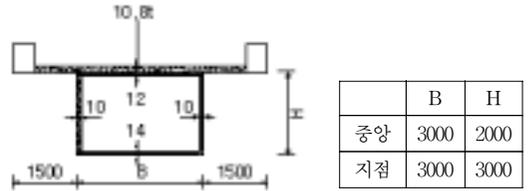
	유한요소법	전달행렬법	차이(%)
NO.1	0.0000000E+00	0.0000000E+00	-
NO.6	-0.1323634E-01	-0.1313551E-01	0.76761
NO.11	0.0000000E+00	-0.7603978E-16	-
NO.16	0.1124812E-01	0.1116207E-01	0.77091
NO.21	0.0000000E+00	-0.4704961E-16	-

따라서, 변단면의 경우는 물론 보의 지지조건이 어떤 경우라도 쉽게 적용할 수 있고, 전달행렬법에 의한 구조 해석이 유한요소법에 비해 차지하는 기억용량이 매우 적으므로 소형 컴퓨터를 사용하여도 쉽게 계산이 가능하다.

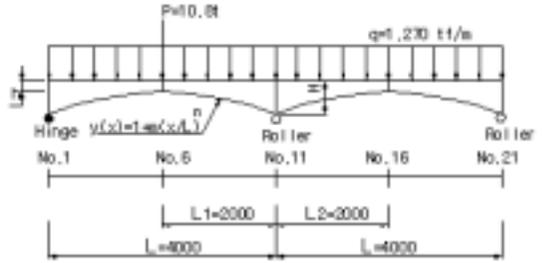
4. 수치해석 및 결과분석

4.1 곡률반경에 따른 곡선 상자형교의 해석

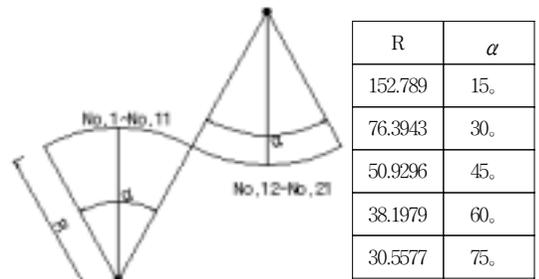
변단면 곡선 상자형교의 부재 길이는 곡률반경과 중심각의 곱으로 표현되므로 Fig. 10과 같이 곡률이 일정한



a) 변단면 곡선 상자형교의 단면



b) 변단면(m=1,n=2) 곡선 상자형교의 측면도



c) 변단면 곡선 상자형교의 평면도

Fig. 10 2경간 연속 변단면 곡선 상자형교

2경간 연속 상자형교에 대하여 부재길이 L=80m로 고정시켰다. 중심각의 변화에 따라 곡률 반경이 변하는 경우에 대하여 DL-24 하중을 재하시켜 해석하였다.

변위와 단면력에 대한 결과값은 Fig. 11~14에 나타났으며, 지간은 일정하게 하였고 곡률반경이 변화되는 경우 중심각이 커짐에 따라 곡률반경이 작아지므로 각 변위와 단면력 결과값이 커진다. 각 절점에서의 최대 값으로 R=152.788m, $\alpha = 15$. 일 경우에 비교해서 R=30.557m, $\alpha = 75$. 경우의 처짐은 30.11%, 회전각은 30.33%, 비틀림각은 80.53%, 비틀림모멘트는 80.02% 증가값을 나타냈다.

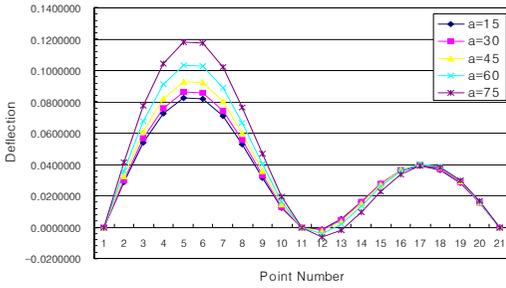


Fig. 11 곡률반경에 따른 처짐 비교

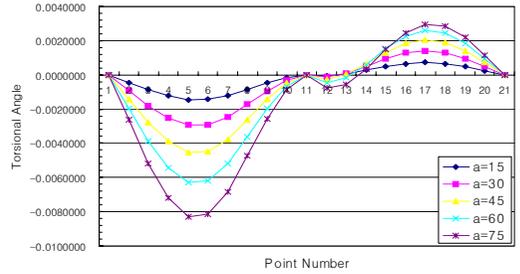


Fig. 13 곡률반경에 따른 비틀림각 비교

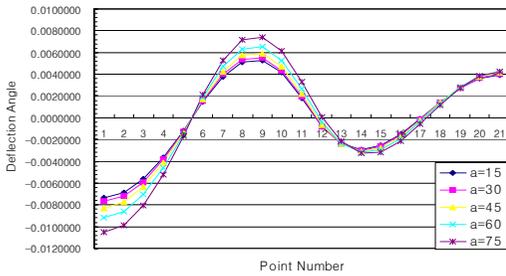


Fig. 12 곡률반경에 따른 회전각 비교

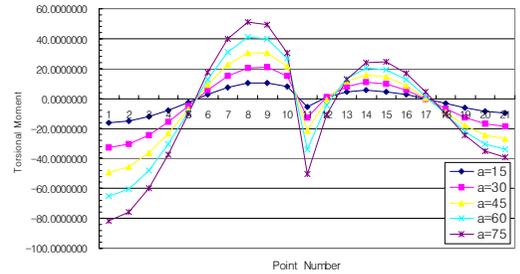
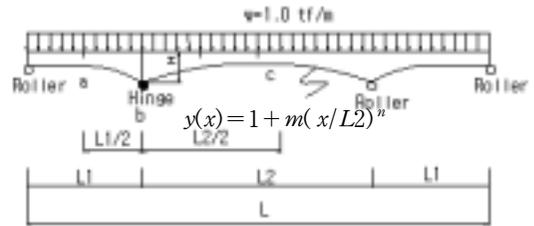


Fig. 14 곡률반경에 따른 비틀림모멘트 비교

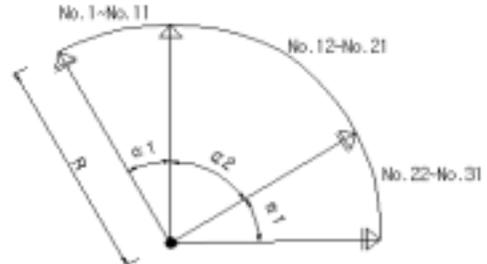
또한, 곡률반경과 중심각은 비틀림각과 비틀림에 지배적인 값으로 나타났으며 곡선 상자형교의 설계 시 곡률반경과 중심각에 따른 영향은 고려되어야 할 것으로 판단된다.

4.2 최적 지간비와 변단면비에 대한 곡선 상자형교의 해석

Fig. 15 a), b)에서 좌우 대칭의 3경간 곡선 상자형교는 $R=152.789\text{m}$ 이고, Table 6에서 중심각 α_1, α_2 이며 1경간 a 지점의 축경간 길이 L_1 , 2경간 c 지점의 중앙경간 길이 L_2 로 표현하였다. 또한, 기준 단면의 부재 높이는 2.5m 부재의 폭은 3m , 상하부 플랜지는 각각 $t_{uf}=12\text{mm}$, $t_{df}=14\text{mm}$ 이고, 웨브는 $t_w=10\text{mm}$ 를 사용하였다. 전 구간에 걸쳐 단위 등분포하중 ($q=1\text{tf/m}$)을 재하하여 해석하였다.



a) 단면 변화에 따른 3경간 곡선 상자형교 측면도



b) 단면 변화에 따른 3경간 곡선 상자형교 평면도

Fig. 15 단면 변화에 따른 3경간 곡선 상자형교

Table 6 변단면 구간의 지간비($f=L_2/L_1$)

지간비	α_1	α_2	L_1, L_3	L_2
f=1.00	15°	15.00°	40m	40m
f=1.20	15°	18.00°	40m	48m
f=1.30	15°	19.50°	40m	52m
f=1.40	15°	21.00°	40m	56m
f=1.50	15°	22.50°	40m	60m
f=1.60	15°	23.40°	40m	64m
f=1.70	15°	25.50°	40m	68m
f=1.80	15°	27.00°	40m	72m
f=1.90	15°	28.50°	40m	76m
f=2.00	15°	30.00°	40m	80m

Fig. 15 a)에서 3경간 곡선 상자형교의 설계에서는 측경간 a지점과 중앙경간 c지점의 정모멘트에 의한 응력과 지점부 b지점에서의 부모멘트에 의한 응력의 차이가 적을수록 합리적인 설계이므로 Fig. 16~18에서 등단면과 직선 변단면 및 포물선 변단면이 있는 각 지점에서의 응력차가 최소가 되는 지간비 및 변단면 비를 구하였다.

Fig. 16에서 지간비(f)가 증가 함에 따른 측경간의 응력(f_a)은 감소하는 반면 중앙 경간의 응력(f_c)은 증가를 보인다. 또한, 측경간 a지점과 중앙 경간 c지점의 응력이 같아지는 지점은 두 개의 선이 교차하는 지점이고, 이 지점을 최적 지간비라할 수 있으며 본 연구에서 최적 지간비는 1:1.300:1로 판단된다.

Fig.17에서 변단면 비는 지간비가 증가함에 따른 측경간과 지점부의 변단면비(β)는 증가하지만 중앙경간과 지점부의 변단면비는 감소하는 경향을 나타냈다. 또한, 3경간 곡선 상자형교의 포물선일 때 최적 변단면비(β)는 측경간과 중앙경간의 비가 1:1.240:1인 경우에는 $\beta=1.48$ 이며 직선일 때 변단면비(β)는 측경간과 중앙경간비가 1:1.241:1인 경우에는 $\beta=1.51$ 의 최적 변단면비를 얻을 수 있다.

따라서, 연속 곡선 상자형교에서 중앙지점부에 변단면비를 두면 등단면의 경우에 비해서 경간 중앙부의 모멘트는 감소하고 중앙 지점부의 부모멘트가 증가하지만 변단면에 의한 단면계수가 커지므로 응력은 감소하여 설계시 유리하다.

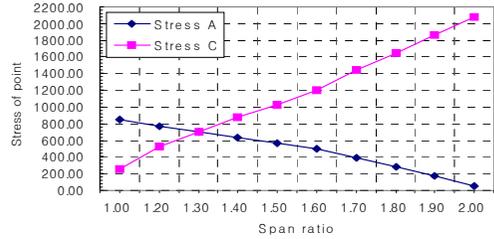


Fig. 16 등단면 3경간 곡선 상자형의 지간비와 응력

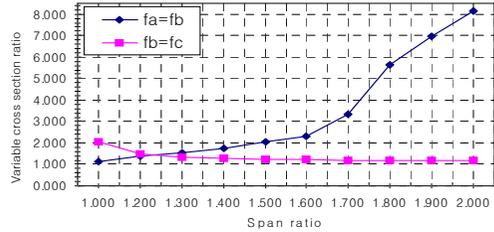


Fig. 17 포물선 3경간 곡선 상자형의 지간비와 변단면 비

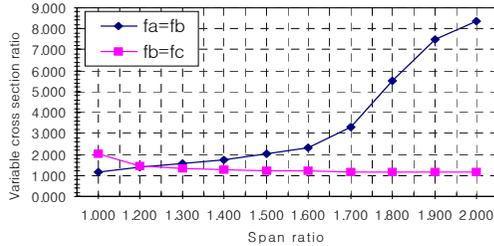


Fig. 18 직선 3경간 곡선 상자형의 지간비와 변단면 비

5. 결론

본 연구에서는 곡선 상자형교의 평형 방정식으로부터 구한 미분방정식을 라플라스 변환하여 격간행렬과 절점의 연속 조건식을 고려한 격점행렬을 이용한 전달행렬법을 사용하여 연속 곡선 상자형교에 대하여 해석하였다. 프로그램에 따른 해석을 분석한 결과 다음과 같다.

- 1) 본 연구에서 작성한 전달행렬법에 의한 프로그램은 유한요소법과 비교하여 1% 이내의 차이를 나타냈고, 이 차이는 유한요소법의 특성인 행렬의 중첩원리가 아닌 순차적인 행렬의 곱에서 비롯된 것으로 판단되며 프로그램의 신뢰성이 검증되었다.

- 2) 전달행렬법은 일반적인 구조 해석법인 유한요소법에 비하여 차지하는 기억용량이 상당히 적으며, 또한, 등단면인 경우 멱함수(Power Law)로 쉽게 해석이 가능하고 소요 시간이 적게 든다.
- 3) 곡률반경과 중심각은 비틀림각과 비틀림에 지배적인 값으로 나타났으며, 곡선 상자형교의 설계 시 곡률반경과 중심각에 따른 영향은 고려되어야 할 것으로 판단된다.
- 4) 등단면 곡선 상자형교 측경간과 중앙경간의 응력이 같아지는 지점은 두 개의 선이 교차되는 지점이고, 이 지점을 최적 기간비라할 수 있으며 본 연구에서 최적 기간비는 1:1.300:1로 나타났다.
- 5) 포물선일 경우 변단면비(β)는 측경간과 중앙경간비가 1:1.240:1인 경우에는 $\beta=1.48$ 이고, 직선일 경우 측경간과 중앙경간비가 1:1.241:1인 경우에는 $\beta=1.51$ 의 최적 변단면비를 얻을 수 있다.

감사의 글

본 연구는 경남대학교 학술논문게재 연구비에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th ed., Dover, 1927.
2. Richard N. Wright, Abdel-samad, Robinson., "BEF Analogy for Analysis of Box Girders", Journal of the structural Division, ASCE, Vol.94, No. ST7, 1968, pp1719~1743.
3. Chu, K.H., Pinjarkar, S.G., "Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges", Journal of the structural Division, ASCE, Vol.97, No. ST10, 1971, pp2481~2501.

4. Rabisadeh, R.O. and S. Shore., "Dynamic Analysis of Curved Box Girder Bridges", Journal of the structural Division, ASCE, No. ST9, 1975, pp1899~1912.
5. Chaudhuri, S.K., "Dynamic Response of Horizontally Curved I-Girder Highway Bridges Due to a moving Vehicle", Ph.D. Thesis, Univ. of Pennsylvania, 1975.
6. Ashwell, d.g. and R.H. Gallagher eds., Finite Elements for Thin Shell and Curved Members", John Willey and Sons, New York, 1976.
7. Hiroshi Nakai, Chai Hong Yoo, "Analysis and Design of Curved Steel Bridges", McGraw-Hill Book Company, pp9-168.
8. Komatsu., Konisi., "Three Dimensional Analysis of Curved Girder with Thin-walled Cross Section", International Association for Bridge and Structural Engineers, Zurich, Germany, 1965.
9. Chaudhuri, S.K. and S. Shore., "Thin-walled Curved Beam Finite Element", Journal of the Engineering Mechanics, ASCE, Vol.103, 1977, pp921~939.
10. Heins, C.P., "Bending and Torsional Design in Structural Members", Lexington Books, D.C. Heath and Company, 1975.
11. AASHTO, "Guide Specification for Horizontally Curved Highway Bridges", 1988.
12. 이우현, 전준태, "전이행렬법에 의한 연속곡 선형의 해석에 관한 연구", 대한토목학회 1992년 학술발표회 개요집, 1992, pp203~206.
13. 이우현, "컴퓨터를 이용하는 구조물의 매트릭스 해석과 최적설계에 관하여", 대한토목학회, Vol20, 1972.
14. 성재덕, 강영중, 유철수, "수평 곡선보의 단면 회전구속", 한국강구조학회 학술발표 논문집, 1994, pp59~66.
15. 방명석 역, "강교설계의 기초", 건설도서, 1993, pp320~332.
16. 成岡昌夫, 遠田良喜, "傳達マトリックス法", 培風館, 1970, pp1~44

(접수일자 : 2003년 6월 23일)