◎ 논 문

Fractional Step 방법과 Compact Padè 차분화를 이용한 원형 실린더 주위의 난류 유동해석

정 상 희[*1], 박 금 성[*2], 박 원 규[*3]

Turbulent Flow Analysis of a Circular Cylinder Using a Fractional Step Method with Compact Padè Discretization

S. H. Chung, K. S. Park and W. G. Park

Recent numerical simulation has a tendency to require the higher-order accuracy in time, as well as in space. This tendency is more true in LES and acoustic noise simulation. In the present work, the accuracy of a Fractional step method, which is widely used in LES simulation, has been increased to the fourth-order accurate compact Padè discretization. To validate the present code, the flow-field past a cylinder was simulated and compared with experiment. A good agreement with experiment was achieved.

Key Words: 나비어-스톡스 방정식(Navier-Stokes equation), 스마고린스키 모델(Smagorinsky model), 컴팩트 파데 방법(Compact Padè scheme), 다단계 스텝 방법(Fractional step Method)

1. 서 론

근래 컴퓨터의 발달과 수치 알고리즘의 발달에 힘입어 연구개발의 시간 및 비용을 절감하기 위해 전산유체역학에 의한 유체 유동특성에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 더욱 정확한 수치해석을 위해서는 유체의 난류 유동특성에 대한 연구가 필수적이며, 현재 LES(Large Eddy Simulation)와 DNS(Direct Numerical Simulation)에 대한 연구가 활발히 진행되고 있는 추세이다. 그러나 LES 난류해석의 경우, 기본 유동 계산 코드의 정확도와 강인성이 향상되어 있어야 원하는 고정도의 LES 난류해석이 가능해진다.

본 연구에서는 시간상으로는 2차의 정확도를 가지며 공간상에서는 4차의 정확도를 가지는 유동해석 코드를 개발하기 위한 기초 연구를 수행하였다. 이를 위해 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 4단계 Fractional step 방법[1,2]을 적용하고, 공간상에서 Compact Padè scheme[3]을 적용하였다. 그리고 LES 난류연구의 초기 단계인 현 연구에서는 난류모델로써 간단한 표준 Smagorinsky model[4]을 적용하였다. 비정상 상태의 문제를 해결하기 위해 적용한 Fractional step 방법은 기존의 SIMPLE방법에 비해서 압력과 속도항를 분리하여 풀게되므로 뛰어난 시간절감 효과를 가져올 수 있다. 그리고 모든 일차 및 이차 편미분항이 4차 정확도를 가지게 하기 위해 적용한 Compact scheme은 중간 격자점에 대한 정보를 얻기 위해 좌우 또는 상하 방향으로 3개

* 2003년 06월 16일 접수

*1 학생회원, 부산대학교 대학원 기계공학과
*2 학생회원, 부산대학교 대학원 기계공학과
*3 정회원, 부산대학교 기계공학부

의 격자점을 사용해 Thomas algorithm을 이용함으로써 효율적으로 4차 정확도를 가지는 알고리즘이다.

2. 지배 방정식및 수치해석 기법

2.1 지배 방정식

3차원 비정상상태 비압축성 점성유동의 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식을 무차원화한 후 일반 좌표계로 변화하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial q}{\partial \tau}+\frac{\partial E}{\partial \xi}+\partial\frac{F}{\partial \eta}+\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi}+\frac{\partial F_v}{\partial \eta}+\frac{\partial G_v}{\partial \zeta} \quad (1)$$

여기서 q는 유동벡터이며 E, F, G는 대류항이고, E_v, F_v, G_v는 점성항을 의미한다.

2.2 수치해석 방법

2.2.1 네단계 Fractional Step Method

Navier-Stokes 방정식인 식(1)을 풀기위해 Kim과 Moin[1], Choi와 Moin[2]에 의해 사용된 4단계 Fractional step 방법을 이용하였다. 1단계에서는 연속방정식을 제외한 운동량 방정식을 종속변수(u,v,w)에 대해서 시간에 대해 전개한다. 여기서 *단계는 중간 단계속도를 의미하며, 이때 운동량 방정식에서 압력항은 계산에서 제외된다.

제 1단계 : 운동량 방정식을 *단계에 대해 푼다.

$$\frac{1}{\Delta t}(\bar{q}^{*}-\bar{q}^{n+m})+\frac{\partial}{\partial \xi}\bar{E}^{n+m}+\frac{\partial}{\partial \eta}\bar{F}^{n+m}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\bar{G}^{n+m} = \frac{\partial}{\partial \xi}\bar{E}_v^{n+m}+\frac{\partial}{\partial \eta}\bar{F}_v^{n+m}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\bar{G}_v^{n+m} \quad (2)$$

제 2단계 : **단계에 대해서 보정속도 관계식을 푼다.

$$\frac{u_i^{**}-u_i^{*}}{\Delta t}=\nabla p^{n} \quad (3)$$

제 3단계 : n+1단계의 압력에 대한 Poisson 방정식을 푼다.

$$\nabla^2 p^{n+1}=\frac{\nabla\cdot u^{**}}{\Delta t} \quad (4)$$

제 4단계 : n+1 단계의 속도값을 구한다.

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{**}}{\Delta t}=-\nabla p^{n+1} \quad (5)$$

여기서 식(2)에서 m=0이면 외재적 방법이 되며, m=1/2이면 내재적 방법의 Crank-Nicolson 방법이 된다. 본 연구에서는 m=0인 외재적 방법을 채택하였다. 압력에 대한 Poisson 방정식인 식(4)는 Cartesian 좌표계에서는 일반적으로 HSMAC 방법[5]을 이용해서 풀지만, 이것을 일반 좌표계에서 그대로 적용하면 수렴성과 정확도가 떨어지게 된다. 본 연구에서는 압력에 대한 Poisson 방정식을 일반 좌표계로 변환한 후 ADI 방법을 이용하여 풀었다. 특히 원형 실린더와 같이 유동 박리가 발생하는 복잡한 유동장에서는 ADI 방법이 HSMAC 방법에 비해 정확도가 우수하다.

2.2.2 압력에 대한 Poisson 방정식

Fractional Step 방법의 제3단계는 압력에 대한 Poisson 방정식이며, 식(4)를 일반 좌표계로 나타내면 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}+\frac{\partial B}{\partial \eta}+\frac{\partial C}{\partial \zeta}\right)p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{U-\xi_t}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{V-\eta_t}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{W-\zeta_t}{J}\right)\right] \quad (6)$$

여기서

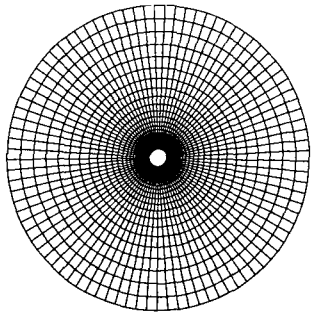


Fig. 1 Cross-sectional Grid

$$A=(\nabla\xi\cdot\nabla\xi+\nabla\xi\cdot\nabla\eta+\nabla\xi\cdot\nabla\zeta)/J$$

$$B=(\nabla\eta\cdot\nabla\xi+\nabla\eta\cdot\nabla\eta+\nabla\eta\cdot\nabla\zeta)/J$$

$$C=(\nabla\zeta\cdot\nabla\xi+\nabla\zeta\cdot\nabla\eta+\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta)/J$$

이며 U, V, W는 반분 속도성분(contravariant velocity)를 의미한다. 위 식(6)을 $\xi-$, $\eta-$, $\zeta-$ 방향으로 3단계로 차분화 하여 ADI 방법을 이용하여 풀었다.

2.2.3 Compact Padè scheme

본 연구에서는 영역에 대한 수치해석의 정확도를 높이기 위해 Lele[3]가 제안한 4차/6차 정확도의 Compact Padè 방법을 식(2)-(5)의 공간상에 대한 편미분항에 적용하였는데, 임의의 함수 f에 대한 일차 편미분 f'을 Compact scheme에 의해 얻어진 값이라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\alpha f'_{j-1}+f'_j+\alpha f'_{j+1}$$

$$=a\frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\triangle x}+b\frac{f_{j+2}-f_{j-2}}{4\triangle x} \qquad (7)$$

여기서 만약 α=1/4, a=3/2, b=0으로 택하면 4차 정확도가 되며, α=1/3, a=14/9, b=1/9를 택하면 6차의 정확도를 가지는 Compact scheme이 된다.

2차 편미분에 대해서는 다음의 관계식이 성립한다.

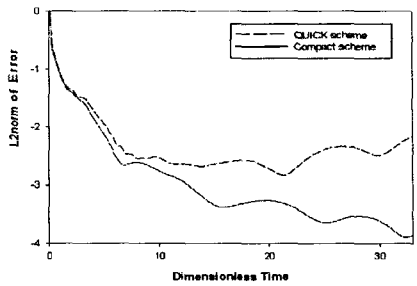


Fig. 2 Convergence History of QUICK and Compact Scheme

$$\alpha f''_{j-1}+f''_j+\alpha f''_{j+1}$$

$$=a\frac{f_{j+1}-2f_j+f_{j-1}}{\triangle x^2}+b\frac{f_{j+2}-2f_j+f_{j-2}}{4\triangle x^2} \qquad (8)$$

여기서 f''는 Compact scheme에 의해 구해진 2차 편미분 값이 되며, α=1/10, a=6/5, b=0으로 택하면 4차 정확도가 되며, α=2/11, a=12/11, b=3/11를 택하면 6차의 정확도가 된다. 이때 Compact scheme을 적용하기 위해서는 경계에서의 특별한 처리가 필요한데, 여기에서 발생한 오차가 유동의 내부 영역으로 확대되어 들어가지 않으면서 전체적으로 원하는 정확도를 유지하는 수치적 처리가 필요하게 된다. 본 연구에서는 Shang[6]의 4차/5차의 편향 차분화와 low-pass spatial filter를 도입하였다.

2.3 난류모델, 초기 및 경계조건

난류모델로 표준 Smagorinsky[4] 모델을 적용하였으며, 초기조건은 자유 유동 조건을 부여하였으며 난류변동성분은 난수(random number)를 발생시켜 자유유동조건에 더하였다. 경계조건은 유입경계에 있어서 자유 유동 조건을 부여하였고, 유출 경계의 경우는 속도는 Compact scheme의 수치 정확도를 유지하기 위한 외삽과 압력은 $p=p_\infty$로 부터 구하였다. 고체 표면에서는 점착 조건(no slip)과 압력에 대해 Neumann 조건을 부과하였는데 이것 역시 Compact scheme에 의한 4차 정확도를 유지하도록 하였다. 원형 실린더의 z방향 실린더(축 방향)로는 주기적 조건을 적용하였다.

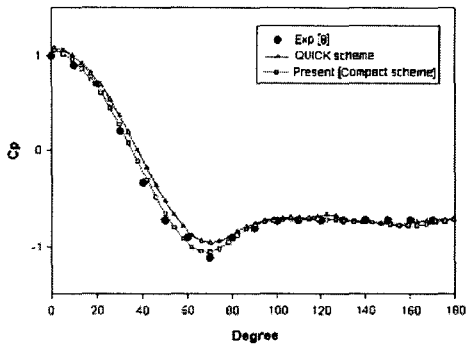


Fig. 3 Comparision of Surface Pressure at Re=2,800

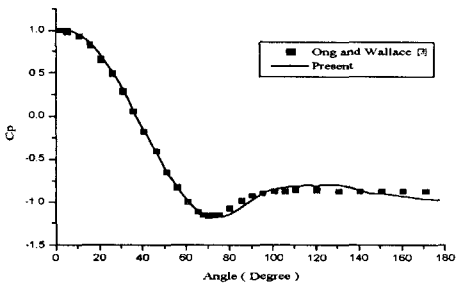


Fig. 4 Pressure Coefficient on the Cylinder Surface

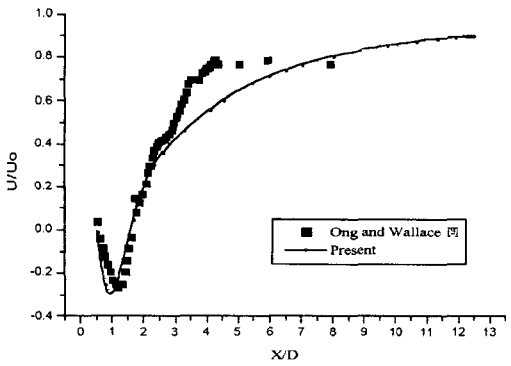
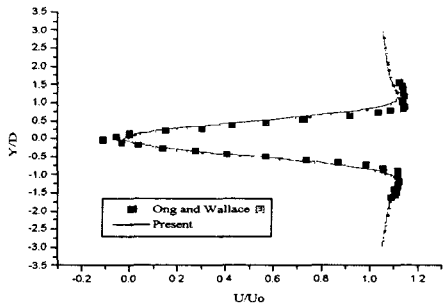
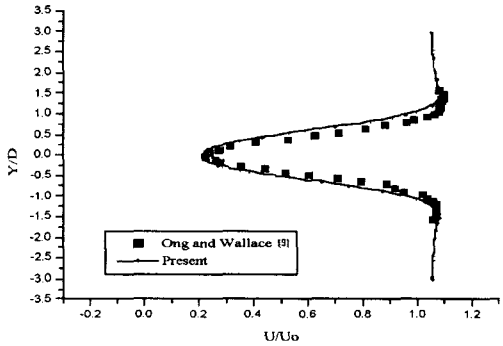


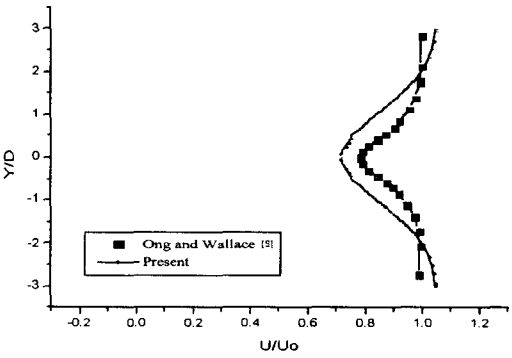
Fig. 5 Comparison of the time-averaged $U/\ U_\infty$ in the Symmetry Plane



(a) at x/D=1.54



(b) at x/D=2.02



(c) at x/D=6.

Fig. 6 Comparison of the Time-average $U/\ U_\infty$ with Experiment

3. 결과 및 고찰

본 연구에서 사용된 수치해석 코드를 Re=2,800의 3차원 원형 실린더 주위의 유동장에 대한 계산으로 검증을 시도하였다. Fig. 1은 101×85×18으로 구성되어 있는 격자의 형상을 나타낸 그림이며 $\triangle x^+ \simeq \triangle y^+ \simeq 5$이다. Fig. 2는 실린더 주위 유동장에 대한 시간의 경과에 따른 QUICK scheme[7]과 본 연구에 대한 Compact scheme의 수렴성을 비교한 것으로 Compact scheme의 수렴율이 뛰어남을 알 수 있다. Fig. 3은 실린더 표면의 압력계수를 Wille에 의한 실험[8]과 QUICK방법 그리고 Compact

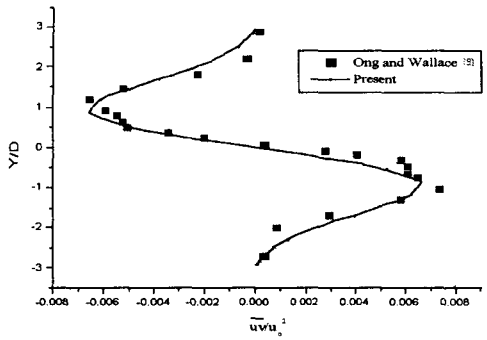


Fig. 7 Comparison of the Time-averaged Reynolds Stress with Experimentat x/D=6.0

Table 1. Lift and drag coefficient of the flow past the circular cylinder

		Cd	Cl
Koike et al. [11]		1.47 ±(0.21)	0 ±(1.30)
Cox et al. [12]		1.56 ±(0.19)	0 ±(1.45)
Present	Single grid	1.43 ±(0.14)	0 ±(1.14)
	Chimera grid	1.44 ±(0.17)	0 ±(1.28)

scheme에 의한 방법을 비교한 것으로, Compact scheme에 의한 표면 압력계수가 QUICK 방법보다 실험값에 근접하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 4은 Re=3,900일 때 실린더 표면주위의 시간평균에 의한 압력계수를 나타낸 것으로 실험결과[9]와 비교하였는데 이것 역시 실험치와 비교적 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

Fig.5는 실린더 뒤쪽 재순환 영역에서 y=0의 유동 단면을 따라 시간평균 속도성분의 자유 유동속도에 대한 비를 나타낸 것으로, 실험값과 비교할 때 비교적 잘 일치하나 x/D값이 3과 6사이에서 다소 차이가 나는데 이것은 O-격자계가 중심에서 멀어질수록 Cell 크기가 점점 커짐에 따라 와류의 이송현상을 정확히 계산할 수 없는 문제점과 표준 Smagorinsky 난류모델의 계수가 상수로 운동에 관계없이 일정함으로써 생기는 문제로 기인한 것으로 판단된다.

Fig. 6에서는 재순환 영역 후류의 특정 위치에서 U/U_∞의 시간 평균에 대한 분포를 나타낸 것으로 실린더 후미에 근접한 유속의 변화가 심한 영역에서는 대체로 잘 일치하고 있으나 유동의 후류방향으로 갈수록 진행방향의 중앙단면에서 다소 차이를 볼 수가 있다. 이것은 실린더 재

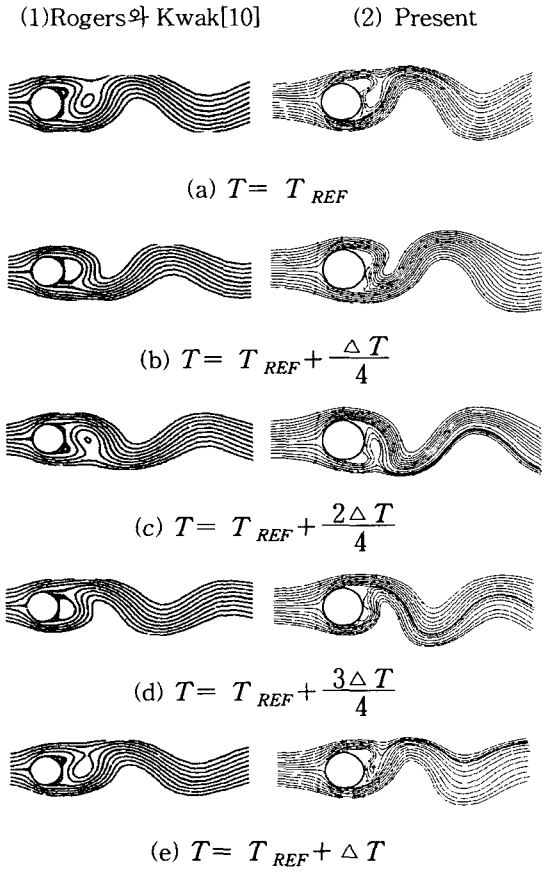


Fig. 8 Instantaneous Streamline past the Cylinder

순환 영역을 거치고 난 뒤 진행방향으로 갈수록 후류 중심축 부근의 평균속도 회복이 제대로 이루어 지지 않았기 때문이며 이것 역시 표준 Smagorinsky 모델의 한계로 여겨진다.

Fig. 7은 Reynolds stress 중 전단응력에 대한 x/D=6.0 에서의 시간평균 계산결과를 나타내고 있으며, 비교적 실험결과와 잘 일치하는 결과를 보여주고 있다.

Fig. 8는 본 연구로 계산된 비정상상태의 실린더 주위의 유동장의 유선을 한 시간 주기에 대해 네등분으로 하여 보여 주는 것으로 Rogers와 Kwak[10]의 연구 결과와 비교하였으며 서로 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있고, Table 1은 타 연구자의 결과와 본 연구결과의 비정상 상태의 공력계수를 비교한 것으로 역시 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다..

4. 결 론

본 연구에서는 Compact Padè 유한 차분화를 이용한 고차 정확도의 Fractional step 방법의 알고리즘을 적용한 수치해석 코드를 개발하였다. Compact Padè 유한 차분화를 적용하여 수치해의 정확도를 공간상에서 4차까지 향상시켰다. 개발된 코드를 검증하기 위해 실린더 유동에 적용하여 실험과 비교하였으며 만족할 만한 결과를 얻었다.

후 기

본 연구는 한국과학재단이 지원하는 목적기초연구사업(지방대학 우수과학자 지원연구)의 일환으로 수행되었다.

참고문헌

[1] Kim, J. and Moin, P., "Application of a Fractional Ftep Method in Incompressible Navier-Stokes Equation," J. Comp. Phys., Vol.59, (1985), pp.308-323.

[2] Choi, H. and Moin, P., "Effects of the Com- putational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," J. Comp. Phy., Vol.113, (1994), pp.1-4.

[3] Lele, S.K., "Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution," J. Comp. Phys., Vol. 103, (1992), pp.16-42.

[4] Smagorinsky, J., "General Circulation Experiments With the Primitive Equations," Monthly Weather Review, Vol.91, (1963), pp 91.

[5] Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Phys. Fluids, Vol.8, (1965), pp. 2182-2189.

[6] Shang, J.S., "High-Order Compact Difference Schemes For Time-Dependent Maxwell Equations," J. Comp. Phys, Vol.153, (1999), pp.312.

[7] Leonard, B.P., "A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.19, (1979), pp.59-98.

[8] Wille, R., "Karman Vortex Streets", Advances in Applied Mechanics, Vol.6, (1960), pp.273-287.

[9] Ong, L. and Wallace, J., "The Velocity Field of the Turbulent Very Near Wake of a Circular Cylinder," Exp. Fluids, Vol.20, (1994), pp.441-453.

[10] Rogers, S.E. and Kwak, D., "Upwind Differencing Scheme for the Time-Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations," AIAA Journal, Vol.28, (1990), pp.253-262.

[11] Koike, H., Ishihara, K., Goto, T., and Takano, Y., "Analysis of Aeroacoustic Source Distribution by Means of Numerical Simulation," J. JSME(B). Vol.62, (1996), pp.160-165. (in Japanese).

[12] Cox, J. S., Rumsey, C. L., Brentner, K. S., and Younis, B. A., "Computation of Sound Generated by Viscous Flow Over a Circular Cylinder," NASA TM 110339, (1997).