信賴性應用硏究
제3권, 제1호, pp. 1-12, 2003

Barlow-Wu Type 연속구조에서의 시스템 구성부품의 중요도

김진백*, 이기원**, 이승민**

* AKO 테크(주) 기획관리본부, ** 한림대학교 통계학과

Importance of System Components for Barlow-Wu Type Continuum Structure Functions

Jin Baek Kim*, Kee-Won Lee**, Seung Min Lee**

* Planning & Management Team, AKO Technology, Inc.
** Department of Statistics, Hallym University

Abstract

A continuum structure function(CSF) is a non-decreasing mapping from the unit hypercube to the unit interval. A Barlow-Wu type CSF is a CSF whose behaviour is modeled by its underlying binary structure, which is based on the multistate structure functions suggested by Barlow and Wu(1978). As the measures of importance of a system component for a Barlow-Wu type CSF, the structural and reliability importance of a component at system level α $(0< \alpha <1)$ are defined and their properties are deduced. Computational results are discussed as well for illustrative purpose.

1. 서론

신뢰성 이론에서의 중요한 문제중의 하나는, 주어진 복잡한 시스템에서 시스템 신뢰성과 부품 신뢰성과의 연관관계를 규명하는 것이며, 이는 주로 구조함수의 연구를 통하여 이루어지고 있다. 구조함수는 주어진 복잡한 시스템의 운용상태를 표현하는 수리모형으로서, 각 부품의 상태와 시스템 상태와의 관계를 규정하는 함수이다. 시스템을 구성하는 모든 부품의 집합을 $C=\{1,2,\cdots,n\}$이라 할 때, 각 부품의 상태는 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$로 표현된다. 구조함수에 관한 고전적 이론은 주로 이항변수들의 이항함수로서의 구조함수에 관한 것이다. *이항구조함수* $\phi:\{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$는 각 변수에 관한 비감소함수로서, $\phi(\mathbf{0})=0$, $\phi(\mathbf{1})=1$을 만족하며, 만약

$$\min_{1\le i\le n} \max_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n} [\phi(1_i, \boldsymbol{x})-\phi(0_i, \boldsymbol{x})]=1$$

이면, 즉 모든 부품 $i\in C$가 시스템 ϕ에 관하여 *유관(relevant)*하면, ϕ는 *coherent* 하다고 한다. 이 때, $(\alpha_i, \boldsymbol{x})$는 $(x_1,\cdots,x_{i-1},\alpha,x_{i+1},\cdots,x_n)$을 뜻한다. 이항구조에서의 시스템과 각 부품은 기능하거나, 기능하지 않는 두 상태로서만 구별된다. 그러나, 실제의 응용상황에서는 시스템과 그 구성부품들은 완벽하게 기능하는 상태에서부터 전혀 기능하지 않는 상태까지에 여러 중간단계를 거칠 수 있으며, 이러한 경우의 시스템과 부품들의 관계를 보다 적절하게 묘사하기 위하여 여러종류의 구조함수가 제안되었다. Barlow and Wu(1978)는 내재된 이항구조를 통하여 정의되는 다상태구조함수들에 관한 결과를 발표하였으며, Borges and Rodrigues(1983)은 이러한 다상태구조함수를 규정하는 특성화 규정조건(Axioms of Characterization)에 관한 결과를 발표하였다. *연속구조함수(continuum structure function; CSF)* $\gamma: \Delta \mapsto [0,1]$는 단위초입방체 Δ $(=[0,1]^n)$에서 정의된, 각 변수에 관한 비감소함수로서 $\gamma(\mathbf{0})=0$, $\gamma(\mathbf{1})=1$을 만족한다. Baxter(1984)는 내재된 이항구조를 갖는 다상태 구조함수의 일반화로서 Barlow-Wu 연속구조함수를 제안하고 이의 일반적 성질에 관하여 연구하였으며, Griffth(1997), Kim and Baxter(1987), Mak(1989)등은 이러한 Barlow-Wu 연속구조함수의 특성화 규정조건에 관한 결과를 발표하였다. 특히, Lee(2003)의 특성화 규정조건은 연속성조건을 필요로 하지 않으므로, 연속구조함수에는 물론 다상태구조함수에도 직접 적용될 수 있다. 네트워크 시스템의 분석에는 그래프이론이 주로 사용되고 있다. 최근 들어, Lee and Park(2001)등을 비롯한 많은 저자들이 그래프로 표현되는 네트워크 시스템의 신뢰성을 보다 효율적으로 계산할 수 있는 알고리즘을 제안하였으며, Jung *et al.*(2001)등은 네

트워크 시스템에서의 구성부품(링크)의 중요도에 관한 결과를 발표하였다. 주어진 시스템에서, 각 구성부품의 중요도에 관한 척도는 시스템을 설계하고 성능을 분석하거나, 수리보전정책등 시스템의 제반 관리정책을 결정하는데 있어 중요한 도구중의 하나이다.

본 논문에서는, CSF 함수군 내에서, Barlow-Wu CSF 함수군을 포함하여 내재 이항구조를 갖는 CSF 함수군을 구별하고, 이러한 함수로 표현될 수 있는 시스템에서의 각 구성부품의 중요도, 특히 구조적 및 신뢰성 중요도를 정의하여, 그 성질을 규명하며, 또한 수치 예를 통하여 규명된 성질을 확인하고자 한다.

2. Barlow-Wu type CSF

주어진 연속구조함수에서, 각 부품이나 시스템의 상태는 $[0,1]$의 구간내에서 임의의 값을 취할 수 있다. 정해진 α $(0<\alpha<1)$에서, 각 부품이나 시스템의 상태가 $[0,\alpha)$의 경우 기능하지 않는 상태, $[\alpha,1]$의 경우 기능하는 상태로 간주하면, 상태 α 에서의 CSF는 이항구조로서 설명될 수 있다. 주어진 $\boldsymbol{x}\in\Delta$, $i\in C$, α $(0<\alpha<1)$에 대하여, $I_\alpha(x_i)$는 $\{x_i\geq\alpha\}$의 지시함수(indicator)이며, $\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x}) = (I_\alpha(x_1), I_\alpha(x_2), \cdots, I_\alpha(x_n))$을 나타낸다.

Definition 1. 주어진 CSF γ 에서,

$$\gamma(\boldsymbol{x}) \geq \alpha \quad \text{iff} \quad \phi(\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x}))=1, \qquad \boldsymbol{x}\in\Delta,\ 0<\alpha<1,$$

가 성립하는 이항구조함수 ϕ가 존재하면, γ 는 *BW-type* (*Barlow-Wu type*) 이라 한다.

Baxter and Lee(1989a)는 다상태 내재구조를 갖는 F-type CSF 함수군을 제시하였으며, BW-type CSF 함수군은 이러한 F-type CSF 함수군에 포함된다. 또한, BW-type CSF 함수군은 Baxter(1984)에서의 Barlow-Wu CSF 함수군을 포함하며, 만약 내재된 이항구조 ϕ가 coherent이면, 두 함수군은 서로 일치한다. Lee(2003)는 주어진 CSF γ가 조건 (*B1: For all* α $(0<\alpha<1)$, *if* $\gamma(\boldsymbol{x})\geq\alpha$, *then* $\gamma(\alpha\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x}))\geq\alpha$)을 만족하면, Δ에서의 연속함수임을 보였다.

Lemma 1. BW-type CSF γ 는 Δ 에서의 연속함수이다.

Proof. 벡터 $\boldsymbol{x}$ 의 i 번째 요소를 $[\boldsymbol{x}]_i$ 혹은 x_i로 표시하자. 모든 $i\in C$ 에서,

$I_\alpha([\alpha\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x})]_i)=1 \Leftrightarrow [\alpha\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x})]_i \geq \alpha,$

$$\Leftrightarrow \ [\ \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})]_{i} = I_{\alpha}(x_{i}) = 1$$

이므로, $\boldsymbol{I}_{\alpha}(\alpha\, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})$ 이다. 또한, 모든 α $(0< \alpha <1)$에 대하여,

$\gamma(\boldsymbol{x}) \geq \alpha \Leftrightarrow \phi(\boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) = 1$, BW-type CSF의 정의에 의하여,

$\Leftrightarrow \phi(\boldsymbol{I}_{\alpha}(\alpha\, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x}))) = 1$, 위에서 $\boldsymbol{I}_{\alpha}(\alpha\, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})$ 이므로,

$\Leftrightarrow \gamma(\alpha\, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) \geq \alpha$

가 성립하므로, γ 는 조건 *B1*을 만족하며, 따라서 Δ 에서의 연속함수이다.

Lemma 2. BW-type CSF γ 에서, $\gamma(\boldsymbol{x}) = \alpha$이면, $x_i = \alpha$인 부품 i $(\in C)$가 존재한다.

Proof. 역으로, $\gamma(\boldsymbol{x}) = \alpha$ 이나, 모든 부품 i 에 대하여 $x_i \neq \alpha$ 인 벡터 $\boldsymbol{x}$가 존재한다고 가정하자. 이 때, $\varepsilon = \min_{i\in C} |x_i - \alpha|$, $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ 이라 정의하면, 모든 $i \in C$ 에서, $x_i < \alpha$ 이면 $x_i < \alpha'$ 이며, $x_i > \alpha$ 이면 $x_i \geq \alpha'$ 이므로, $\boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_{\alpha'}(\boldsymbol{x})$ 임을 알 수 있다. 또한, $\gamma(\boldsymbol{x}) = \alpha$ 이므로, $\phi(\boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) = 1$ 인데, 위에서 $\boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_{\alpha'}(\boldsymbol{x})$ 이므로, $\phi(\boldsymbol{I}_{\alpha'}(\boldsymbol{x})) = 1$ 이다. 따라서, $\gamma(\boldsymbol{x}) \geq \alpha'$ $(> \alpha)$이며, 이는 $\gamma(\boldsymbol{x}) = \alpha$ 임에 모순이므로, Lemma의 결과가 성립함을 알 수 있다.

Corollary 1. BW-type CSF γ 에서, μ 는 R^n에서의 Lebesque measure 라 할 때, 모든 $\alpha \in (0,1]$에 대하여 $\mu\{\boldsymbol{x} \in \Delta \mid \zeta(\boldsymbol{x}) = \alpha\} = 0$ 이다.

Proof. 정해진 $\alpha \in (0,1]$에서, $A_i = \{\boldsymbol{x} \in \Delta \mid x_i = \alpha\}$라 할 때, $\mu(A_i) = 0$ 이며, Lemma 2에 의하여, $\{\boldsymbol{x} \in \Delta \mid \zeta(\boldsymbol{x}) = \alpha\} \subset \cup_{i\in C} A_i$ 이므로, Corollary의 결과가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

Definition 2. BW-type CSF γ 에서, 상태 $\alpha \in (0,1]$에서의 부품 i 의 *구조적 중요도* $S_i(\alpha)$는 아래와 같다.

$$S_i(\alpha) \ = \ \mu\,\{\, \boldsymbol{x} \in \Delta \mid \ \phi(1_i, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x})) \ > \ \phi(0_i, \boldsymbol{I}_{\alpha}(\boldsymbol{x}))\,\}.$$

BW-type CSF γ에서의 구조적 중요도 $S_i(\alpha)$는 내재된 이항구조 ϕ를 통하여 정의되며, 이항구조에서의 구조적 중요도와는 달리, 시스템의 상태 α에 따라 변함을 알 수 있다. $S_i(\alpha)$ 는, 상태 α에서, 부품 i의 작동여부가 시스템의 작동여부를 결정하는 상태벡터들의 Δ 에 관한 상대비율로서 해석될 수 있다.

Theorem 1. BW-type CSF γ 의 구조적 중요도 $S_i(\alpha)$ ($i \in C$)에 관하여 다음이 성립한다.

(i) $S_i(\alpha)=0$, $\alpha\in(0,1)$ $\Leftrightarrow$ i 는 내재 이항구조 ϕ에 무관부품이다.

(ii) $S_i(\alpha)=1$, $\alpha\in(0,1)$ $\Leftrightarrow$ i 는 내재 이항구조 ϕ에 유일한 유관부품이다.

Proof. (i) 부품 i가 ϕ에 관하여 유관부품이면, $\phi(1_i, \boldsymbol{z}) > \phi(0_i, \boldsymbol{z})$ 가 성립하는 이항벡터 $\boldsymbol{z}$가 존재한다. 주어진 $\alpha\in(0,1)$에서, $W_i=\{\boldsymbol{x}\in\Delta \mid I_\alpha(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{z}\}$라 하고, $z_j=1$ 이면 $a_j=1-\alpha$, $z_j=0$ 이면 $a_j=\alpha$ 라 할 때, $\mu(W_i)=\prod_{j\neq i} a_j$ 로 표시될 수 있다. 그런데, $S_i(\alpha)\geq\mu(W_i)$ 이며, $\alpha\in(0,1)$에서 $\mu(W_i)>0$ 이므로, $S_i(\alpha)>0$ 이다. 역으로 부품 i가 ϕ에 관하여 무관 부품이라 가정하고, 주어진 $\alpha\in(0,1)$에서, $V_i=\{\boldsymbol{x}\in\Delta \mid \phi(1_i, \boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x}))>\phi(0_i, \boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x}))\}$라 하자. 만약 $V_i\neq\emptyset$이면, 이는 부품 i가 ϕ에 무관임에 모순이다. 왜냐하면, $\boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x})$는 이항벡터이며, 부품 i가 ϕ에 무관이면 모든 이항벡터 $\boldsymbol{z}$ 에 대하여 $\phi(1_i, \boldsymbol{z})=\phi(0_i, \boldsymbol{z})$ 가 성립하기 때문이다. 따라서, $V_i=\emptyset$ 이므로 $S_i(\alpha)=\mu(V_i)=0$ 임을 얻을 수 있다.

(ii) 부품 i가 내재 이항구조 ϕ에 유일한 유관부품이라 하면, $\phi_\gamma(\cdot_i, \boldsymbol{z})=1 \Leftrightarrow z_i=1$ 이므로, $S_i(\alpha)=\mu(\Delta)=1$ 임을 얻을 수 있다. 역으로, 부품 i가 내재 이항구조 ϕ에 유일한 유관부품이 아니라고 가정하자. 부품 j ($j\neq i$)가 시스템에 유관하다고 하면, $\phi(1_j, \boldsymbol{z})=1$ 이며 $\phi(0_j, \boldsymbol{z})=0$ 인 이항벡터 $\boldsymbol{z}$ 가 존재한다. 이 때, $z_i=1$ 이라 하면 $\phi(0_i,1_j, \boldsymbol{z})$ $(=1)\leq\phi(1_i,1_j, \boldsymbol{z})$ 이며, $z_i=0$ 이라 하면 $\phi(1_i,1_j, \boldsymbol{z})=0\geq\phi(0_i,1_j, \boldsymbol{z})$ 임을 얻을 수 있다. 즉, 어느 경우이든 부품 i 의 상태에 관계없이 시스템의 상태가 일정한 벡터 $(\cdot_i, \boldsymbol{z})$가 존재한다. 따라서, $W_i=\{\boldsymbol{x}\in\Delta \mid \boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{z}\}$ 라 할 때, $S_i(\alpha)\leq 1-\mu(W_i)$ 이며, $\mu(W_i)>0$ 이므로, $S_i(\alpha)<1$ 임을 얻을 수 있다.

Example 1. 아래와 같이 $[0,1]^2$ 에서 정의된 BW-type CSFs γ_1과 γ_2에서, 부품 i 의 구조적 중요도 $S_i(\alpha)$ ($0<\alpha<1$)는 다음과 같다.

(i) $\gamma_1(x_1,x_2)=\min(x_1,x_2)$ 이라 하면, $S_i(\alpha)=1-\alpha$, $i=1,2$ 임을 알 수 있다.

(ii) $\gamma_2(x_1,x_2)=x_1$ 이라 하면, $S_1(\alpha)=1$, $S_2(\alpha)=0$ 임을 알 수 있다.

3. 신뢰성 중요도와 그 성질

Birnbaum(1969)은 이항구조함수 ϕ에서의 부품 i 의 신뢰성 중요도로서, $\boldsymbol{Y}$가 부품의 상태를 나타내는 이항 확률변수라 할 때,

$$I(i) = P\{\phi(1_i, \boldsymbol{Y}) - \phi(0_i, \boldsymbol{Y}) = 1\}$$

를 제시하였다. 이를 이용하여, BW-type CSF에서의 각 부품의 신뢰성 중요도는 내재 이항구조를 통하여 다음과 같이 정의될 수 있다.

Definition 3. BW-type CSF γ 에서, 상태 $\alpha \in (0,1]$에서의 부품 i 의 *신뢰성 중요도* $R_i(\alpha)$는 아래와 같다.

$$R_i(\alpha) \;=\; P\{\; \phi(1_i, \boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{X})) > \phi(0_i, \boldsymbol{I}_\alpha(\boldsymbol{X}))\;\}.$$

BW-type CSF γ 에서, 확률변수 $X_1, \cdots, X_n$가 서로 독립이며, 각각 $U[0,1]$을 따른다면, 신뢰성 중요도 $R_i(\alpha)$는 구조적 중요도 $S_i(\alpha)$와 일치한다. 또한, BW-type CSF γ 에서, $X_1, \cdots, X_n$가 서로 독립이며, 각각 단위구간의 support를 갖는 절대연속(absolutely continuous)의 확률변수라 하면, Thoerem 1 에 의하여, 다음 결과가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

Corollary 2. BW-type CSF γ 에서, 상태벡터 $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립이며, 각각 단위구간의 support를 갖는 절대연속의 확률변수라 하면 다음이 성립한다.

(i) $R_i(\alpha) > 0, \;\alpha \in (0,1) \;\Leftrightarrow\; i$ 는 내재 이항구조 ϕ 에 유관부품이다.

(ii) $R_i(\alpha) = 1, \;\alpha \in (0,1) \;\Leftrightarrow\; i$ 는 내재 이항구조 ϕ 에 유일한 유관부품이다.

Kim and Baxter(1987)는, 일반적인 CSF ξ 에서, $U_\alpha = \{\boldsymbol{x} | \xi(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$의 boundary와 Δ의 diagonal과의 교집합인 *key vector* $\boldsymbol{\delta}_\alpha$를 설정하여, $\boldsymbol{\delta}_\alpha$가 항상 존재하며 unique함을 보이고, $\boldsymbol{\delta}_\alpha$를 사용하여 상태 $\alpha \in (0,1]$에서의 부품 i 의 신뢰성 중요도를

$$R_i^{KB}(\alpha) \;=\; P\{\xi(\boldsymbol{X}) \geq \alpha \mid X_i \geq \delta_\alpha\} - P\{\xi(\boldsymbol{X}) \geq \alpha \mid X_i < \delta_\alpha\}$$

로 정의하였다. BW-type CSF γ 에서는, key vector $\boldsymbol{\delta}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}$ 이며, 이 경우 $R_i(\alpha)$는 $R_i^{KB}(\alpha)$ 와 일치하므로,

$$R_i(\alpha) \;=\; P\{\gamma(\boldsymbol{X}) \geq \alpha \mid X_i \geq \alpha\} - P\{\gamma(\boldsymbol{X}) \geq \alpha \mid X_i < \alpha\}$$

로 변환될 수 있다. 또한, $X_1, \cdots, X_n$이 서로 독립이며, 각각 단위구간의 support를 갖는 절

대연속의 확률변수라 할 때, $P_X = P \circ X^{-1}$, $A_{ai} = \{ x \in \Delta \mid x_i \geq a \}$, $f_i(a) = P_X(U_a \cap A_{ai}) / P_X(A_{ai})$와 $g_i(a) = P_X(U_a \cap A^c_{ai}) / P_X(A^c_{ai})$로 정의하면, $R_i(a) = f_i(a) - g_i(a)$로 표현될 수 있다. (Baxter and Lee(1989b) 참조)

Theorem 2. BW-type CSF γ 에서, 상태벡터 $X_1, \cdots, X_n$ 이 서로 독립이며, 각각 단위 구간의 support를 갖는 절대연속의 확률변수라 하면, $R_i(a)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$)는 $(0,1)$에서 연속이다.

Proof. $U_a' = \{ x \in \Delta \mid \gamma(x) > a \}$, $U_a'' = U_a - U_a'$, $A'_{ai} = \{ x \in \Delta \mid x_i > a \}$ 이며, $\{a_m\}$은 극한값 a를 갖는 실수의 단조수열이라 할 때, Baxter and Lee(1989)의 Theorem 3.1과 유사한 방법으로, $P_X(A_{ai})$, $P_X(U_a)$와 $P_X(U_a \cap A_{a_i})$가 각각 a에 대하여 연속임을 보일 수 있다. 우선, $P_X(A_{ai})$의 경우, $a_m \uparrow a$ 이면, $A_{a_m i} \downarrow A_{ai}$ 이므로, $P_X(A_{a_m i}) \downarrow P_X(A_{ai})$이다. 만약 $a_m \downarrow a$ 이면, $P_X(A_{a_m i}) \uparrow P_X(A'_{ai})$ 이며, x는 절대연속이므로, $P_X(A_{a_m i}) = P_X(A_{ai}')$ 를 얻을 수 있다. 따라서 $P_X(A_{ai})$는 a에 관하여 연속이다. 다음은 $P_X(U_a)$에 대하여, $a_m \uparrow a$ 이면 $U_{a_m} \downarrow U_a$ 이므로 $P_X(U_{a_m}) \downarrow P_X(U_a)$ 이고, $a_m \downarrow a$ 이면 $U_{a_m} \uparrow U_a'$ 이므로 $P_X(U_{a_m}) \uparrow P_X(U_a')$ 이다. 그러나 $P_X(U_a'') = 0$ 이므로 $P_X(U_{a'}) = P_X(U_a)$ 이다. 따라서 $P_X(U_a)$는 a에 관하여 연속이다. 마지막으로, $P_X(U_a \cap A_{ai})$에 대하여, $a_m \uparrow a$ 이면 $U_{a_m} \cap A_{a_m i} \downarrow U_a \cap A_{ai}$ 이므로, $P_X(U_{a_m} \cap A_{a_m i}) \downarrow P_X(U_a \cap A_{ai})$이며, $a_m \downarrow a$ 이면 $U_{a_m} \cap A_{a_m i} \uparrow U_a' \cap A_{ai}'$ 이므로 $P_X(U_{a_m} \cap A_{a_m i}) \downarrow P_X(U_a' \cap A_{ai}')$ 이다. 이제, $P_X(U_a' \cap A_{ai}') = P_X(U_a \cap A_{ai})$ 임을 보이고자 한다. 먼저, $U_{a'} \cap A_{ai}' \subset U_a \cap A_{ai}$ 이므로 $P_X(U_a' \cap A_{ai}') \leq P_X(U_a \cap A_{ai})$ 이다. 또한,

$$P_X(U_a \cap A_{ai}) = P_X((U_a' \cup U_a'') \cap (A_{ai}' \cup A_{ai}''))$$
$$\leq P_X(U_a' \cap A_{ai}'') + P_X(U_a' \cap A_{ai}'') + P_X(U_a'' \cap A_{ai}') + P_X(U_a'' \cap A_{ai}'')$$

이며, 마지막 세항들의 값은 모두 0이므로, $P_X(U_a \cap A_{ai}) \leq P_X(U_a' \cap A_{ai}')$ 임을 얻을 수 있다. 따라서 $P_X(U_a' \cap A_{ai}') = P_X(U_a \cap A_{ai})$ 이므로, $P_X(U_a \cap A_{ai})$항 역시 a에 관하여 연속이다.

Definition 4. BW-type CSF γ 에서, $\phi_\gamma(z) = 1 \Rightarrow (\Leftarrow)$ $z_i = 1$ 이면, 부품 i 는 시스템에 관하여 직렬(병렬) 연결되어 있다고 한다.

BW-type CSF γ 에서, 부품 i 가 시스템에 관하여 직렬(병렬)연결되어 있다고 하면, 모든 $\alpha\in(0,1]$에 대하여 $\boldsymbol{x} \in U_\alpha \Rightarrow(\Leftarrow)\ x_i \geq \alpha$ 이 성립하며, 이는 $U_\alpha \subset(\supset)A_{\alpha i}$ 로 대체할 수 있다. 또한, 정의에 의하여, $\phi(0_i, \mathbf{1})=0(\ \phi(1_i, \mathbf{0})=1)\ \Leftrightarrow$ 부품 i 는 시스템에 관하여 직렬(병렬)연결이 성립함을 알 수 있다.

Theorem 3. BW-type CSF γ 의 구조적 중요도 $R_i(\alpha)$ $(\ i\in C)$에 관하여 다음이 성립한다.

(i) $\lim_{\alpha\to 1} S_i(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{부품 } i \text{ 가 시스템에 병렬연결인 경우}\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

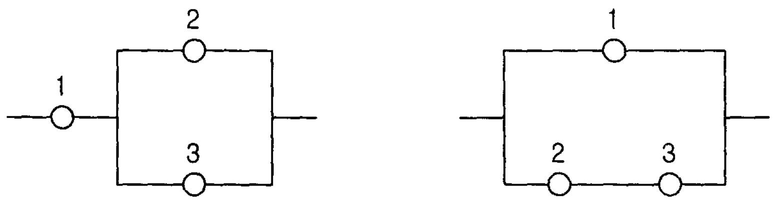
(ii) $\lim_{\alpha\to 0} S_i(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{부품 } i \text{ 가 시스템에 직렬연결인 경우}\\ 0, & \text{그 외의 경우}\end{cases}$

Proof. (i) $U_\alpha^{1_i}=\{(\cdot\ _i, \boldsymbol{x}) \mid \gamma(1_i, \boldsymbol{x})\geq\alpha\}$, $U_\alpha^{0_i}=\{(\cdot\ _i, \boldsymbol{x}) \mid \gamma(0_i, \boldsymbol{x})<\alpha\}$ 라 할 때, CSF γ는 비감소함수이므로 $U_\alpha^{1_i} \supset U_\alpha^{0_i}$ 이며, 신뢰성중요도는 $R_i(\alpha)=P(U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i})$ 로 표시될 수 있다. 또한, $L_{\alpha i}=\{(\cdot\ _i, \boldsymbol{x}) \mid x_j<\alpha,\ j\neq i\}$ 라 하면, $\lim_{\alpha\to 1} L_{\alpha i}=1$ 임을 알 수있다. 만약, 부품 i 가 시스템에 병렬연결되어 있다면, $\boldsymbol{x}\in L_{\alpha i}$에 대하여 $\gamma(1_i, \boldsymbol{x})\geq\alpha$ 이며 $\gamma(0_i, \boldsymbol{x})<\alpha$ 이므로 $\boldsymbol{x}\in U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i}$ 이다. 즉, $L_{\alpha i} \subset U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i}$ 임을 알 수 있다. 따라서, $P(L_{\alpha i}) \leq P(U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i})=R_i(\alpha)$ 이며, $1=\lim_{\alpha\to 1} P(L_{\alpha i}) \leq \lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha) \leq 1$ 이므로, $\lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha)=1$ 임을 알 수 있다. 만약, 부품 i가 시스템에 병렬연결되어 있지 않다면, $\gamma(1_i, \boldsymbol{x})<\alpha$ 이므로 $L_{\alpha i} \subset (U_\alpha^{1_i})^c \subset (U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i})^c$ 이다. 따라서, $1=\lim_{\alpha\to 1} P(L_{\alpha i}) \leq \lim_{\alpha\to 1} (1-R_i(\alpha)) \leq 1$ 이므로 $\lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha)=0$ 임을 알 수 있다.

(ii) $U_{\alpha i}=\{(\cdot\ _i, \boldsymbol{x}) \mid x_j\geq\alpha,\ j\neq i\}$라 정의하면 $\lim_{\alpha\to 0} U_{\alpha i}=1$ 임을 알 수 있다. 만약, 부품 i 가 시스템에 직렬 연결되어 있다면, $\boldsymbol{x}\in U_{\alpha i}$ 에 대하여 $\gamma(1_i, \boldsymbol{x})\geq\alpha$ 이며 $\gamma(0_i, \boldsymbol{x})<\alpha$ 이므로 $\boldsymbol{x}\in U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i}$ 이다. 즉, $U_{\alpha i} \subset U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i}$ 임을 알 수 있다. 따라서, $P(U_{\alpha i}) \leq P(U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i})=R_i(\alpha)$ 이며, $1=\lim_{\alpha\to 1} P(U_{\alpha i}) \leq \lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha) \leq 1$ 이므로 $\lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha) = 1$ 임을 알 수 있다. 만약, 부품 i 가 시스템에 직렬 연결되어 있지 않다면, $\gamma(0_i, \boldsymbol{x})\geq\alpha$ 이므로 $U_{\alpha i} \subset (U_\alpha^{1_i}-U_\alpha^{0_i})^c$ 이다. 따라서, $1=\lim_{\alpha\to 1} P(U_{\alpha i}) \leq \lim_{\alpha\to 1} (1-R_i(\alpha)) \leq 1$ 이므로 $\lim_{\alpha\to 1} R_i(\alpha)=0$ 임을 알 수 있다.

4. 수치 예제

그림 1의 (가), (나)의 내재된 이항구조를 갖는 BW-type CSF를 각각 γ_1, γ_2라 할 때, 그 구조함수는 각각 $\gamma_1(\boldsymbol{x}) = \min(x_1, \max(x_2, x_3))$, $\gamma_2(\boldsymbol{x}) = \max(x_1, \min(x_2, x_3))$로 표현될 수 있다.



(가) γ_1 의 경우 (나) γ_2 의 경우

<그림 1> 내재 이항구조의 diagrams

이 때, 확률변수 X_1, X_2, X_3가 서로 독립이며, 각각 $U[0,1]$을 따른다고 하면, γ_1에서의 각 부품의 신뢰성 중요도는 다음과 같다.

$R_1(\alpha) = 2(1-\alpha)-(1-\alpha)^2 = (1-\alpha)^2.$

$R_2(\alpha) = R_3(\alpha) = \alpha(1-\alpha).$

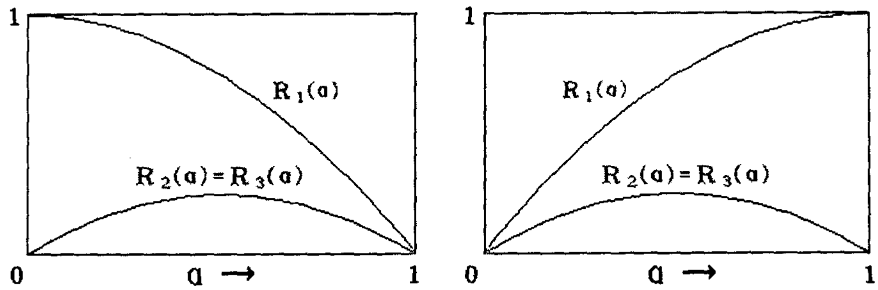
또한, γ_2의 경우 역시 위와 유사한 과정을 거쳐, 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$R_1(\alpha) = \alpha(2-\alpha).$

$R_2(\alpha) = R_3(\alpha) = \alpha(1-\alpha).$

이 때, 각 부품의 상태는 $U[0,1]$을 따르므로, $R_i(\alpha)$는 구조적 중요도로 해석될 수도 있다. 또한, X_1, X_2, X_3는 서로 독립이며, 각각 단위구간의 support를 갖는 절대연속의 확률변수이므로, Theorem 2에 의하여, $R_i(\alpha)$ $(i=1,2,3)$는 $(0,1)$에서 연속임을 알 수 있다. BW-type CSF γ_1의 경우, 각 부품은 시스템에 유관이므로, 그림 2 에서 보는 바와 같이, 모든 $\alpha \in (0,1)$에 대하여 $R_i(\alpha) > 0$ $(i=1,2,3)$이다. 또한, 부품 1은 시스템에 직렬 연결되어 있으므로 $\lim_{\alpha \to 0} R_i(\alpha) = 1$ 이며, 나머지 부품에서는 $\lim_{\alpha \to 0} R_2(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} R_3(\alpha) = 0$ 이다. 또한, 시스템에 병렬로 연결되어있는 부품은 없으므로, $\lim_{\alpha \to 1} R_i(\alpha) = 0$ $(i=1,2,3)$이다. BW-type CSF γ_2의 경우 역시 각 부품은 시스템에 유관이므로, 모든 $\alpha \in (0,1)$에 대하여 $R_i(\alpha) > 0$ $(i=1,2,3)$이며, 시스템에 직렬로 연결되어있는 부품은 없으므로, $\lim_{\alpha \to 0} R_i(\alpha) = 0$

$(i=1,2,3)$이다. 또한, 부품 1은 시스템에 병렬로 연결되어 있으므로 $\lim_{a\to 1} R_1(a)=1$ 이며, 나머지 부품에서는 $\lim_{a\to 0} R_2(a)=\lim_{a\to 0} R_3(a)=0$ 이다.



(가) γ_1 의 경우　　　　(나) γ_2 의 경우

<그림 2> 신뢰성 중요도 $R_i(a)$, $i=1,2,3$

참고문헌

[1] Barlow, R. E. and Wu, A. S. (1978). Coherent systems with multi-state components, *Mathematics of Operations Research,* vol. 3, 275-281.

[2] Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multi-component system in *Multivariate Analysis-II,* ed. P. R. Krishnaiah, Academic Press, New York, 581-592.

[3] Baxter, L. A. (1984). Continuum structures I, *Journal of Applied Probability,* vol. 21, 802-815.

[4] Baxter, L. A. and Kim, C. (1987). Reliability importance for continuum stucture functions, *Journal of Applied Probability,* vol. 24, 779-785.

[5] Baxter, L. A. and Lee, S. M. (1989a). Structure functions with finite minimal vector sets, *Journal of Applied Probability,* vol. 26, 196-201.

[6] Baxter, L. A. and Lee, S. M. (1989b). Further properties of reliability importance for continuum structure functions, *Probability in the Engineering and Informational*

Sciences, vol. 3, 237-246.

[7] Borges, W. de S. and Rodrigues, F. W. (1983). Axiomatic characterization of continuum structure functions, *Mathematics of Operations Research,* vol. 8, 435-438.

[8] Griffth, W. S. (1997). A note on the characterization of the Barlow and Wu continuum structure functions, *Operations Research Letters,* vol. 21, 65-67.

[9] Jung, G. M., Park, D. H. and Lee, S. M. (2001). Importance Analysis for Capacitated Network Systems, *International Journal of Reliability and Applications,* vol. 2, no. 1, 73-80.

[10] Kim, C. and Baxter, L. A. (1987). Axiomatic characterizations of continuum structure functions, *Operations Research Letters,* vol. 6, 297-300.

[11] Lee, S. M. (2003). On the characterization of continuum structure functions, *Operations Research Letters,* vol. 31, 268-272.

[12] Lee, S. M. and Park, D. H. (2001). An Efficient Method for Evaluating Network-Reliability with Variable Link-Capacities, *IEEE Transactions on Reliability,* vol. 50, no. 4, 374-379.

[13] Mak, K. (1989). A note on Barlow-Wu structure functions, *Operations Research Letters,* vol. 8, 43-44.