

인벌류트 베벨기어 설계 기술에 관한 연구

조 성 철

충청대학 산업안전과

(2003. 7. 31. 접수 / 2003. 11. 12. 채택)

A Study on Technology for Involute Bevel Gear Design

Seong-Cheol Cho

Department of Safety Engineering, Chung Cheong College

(Received July 31, 2003 / Accepted November 12, 2003)

Abstract : Design method for involute bevel gears is developed. The developed gear design system can design the optimized gear that minimize the number of pinion teeth with face tooth. Method of optimization is MS(matrix search) which is developed from this study.

Design variables are pressure angle 20°, transmitted power, gear volume, gear ratio, allowable contact stress and allowable bending stress, etc. Gears design method developed this study can be applied to the plane, helicopter, printer, machine tools.

Key Words : gear design, contact ratio, face width, bending strength, contact stress, scoring

1. 서 론

베벨기어는 교차 축에 결합되어 회전되며, 특히 동력전달용 직선형 인벌류트 베벨기어는 타 베벨기어에 비해 설계와 제작이 쉽기 때문에 활용도가 높다.

이는 기어 박스 등에 내장되어 헬리콥터, 공작기계, 플로터, 건설기계 등에 동력 전달 요소로 사용되기 때문에 조립시 타 부품과 간섭을 피하도록 설계해야 한다.

기어 체적은 타 부품과 결합시 간섭방지를 위해 중요한 역할을 하며, 굽힘강도와 면압강도는 안전성과 내구성을 결정하는 중요한 인자이다.

기어 설계시 잇수가 적을수록 굽힘강도가 커지고 치폭이 넓을수록 면압강도는 커진다. 그러나 잇수가 지나치게 적으면 간섭이 일어나 파손 및 절손이 초래된다. 따라서 기어 설계시 기어의 체적과 강도, 최적 잇수를 산출하는 것은 매우 중요하다. 그러므로 이러한 문제를 해결하기 위해 Cockerham과 Waite¹⁾은 굽힘강도와 면압강도를 만족하는 기어설계 시스

템을 개발하였고, Savage와 Goy²⁾는 피니언의 지름을 변화시키면서 굽힘강도, 면압강도를 만족하는 기어의 최적 잇수에 대해 연구하였다.

Mark³⁾는 굽힘강도, 면압강도와 연관된 베벨기어의 전동오차 발생에 대하여 연구하였으며, Artes와 Pedrero⁴⁾은 베벨기어 설계를 위한 기어의 치형설계와 관련된 기어설계법을 분석하였다.

그러나 이들 연구는 거의 기어의 지름 변화나 베벨기어의 오차 해석에 국한되었고, 베벨기어 안전성의 중요 인자인 기어의 체적, 굽힘강도, 면압강도를 고려한 기어 설계에 대한 연구는 매우 미흡한 상태이다.

따라서 본 논문에서는 동력전달용 직선형 인벌류트 베벨기어를 대상으로 요구된 기어쌍의 체적 범위 내에서 물림률, 치폭, 접선속도 등을 만족시키며, 강도면에서도 안전하게 회전될 수 있도록, 간섭이 없는 피니언의 최적 잇수를 구하여 설계에 사용하고자 한다.

2. 설계 계산식

2.1. 구속조건을 위한 베벨 기어 설계식

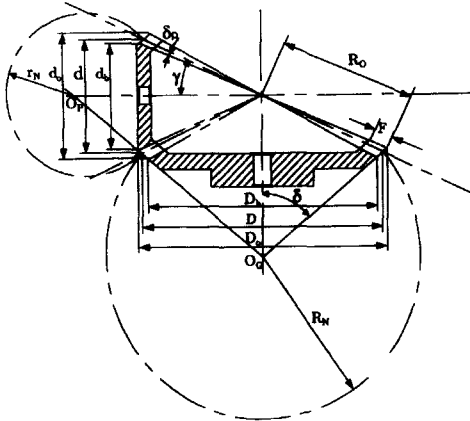


Fig. 1. Equivalent spur gear of bevel gear sets

2.1.1. 간섭방지를 위한 최소 잇수 계산식

베벨 기어는 Fig.1과 같이 상당 스피어 기어로 전개하여 설계가 이루어지며, 구속조건으로 사용할 피니언의 최소 잇수 계산식은 Cockerham¹⁾ 등이 산출한 식 (1)을 사용한다.

$$Z_{emin} = \left\lceil \frac{\frac{2a_2}{m_g}}{1 - \sqrt{\cos^2 \phi + \left(\frac{1}{m_g} + 1\right)^2 \sin^2 \phi}} \right\rceil \quad (1)$$

여기서 Z_{emin} 은 상당 스피어 기어의 최소 잇수, m_g 는 기어비, ϕ 는 압력각 a_2 는 기어의 어텐덤 비이다.

또한 베벨기어는 직교축으로 회전할 때 피니언의 inner end에서 디텐덤이 최대 디텐덤 보다 클 때 발생하기 때문에 간섭방지를 위해 Long and shot addendum³⁾ 방식을 사용하며, Fig. 1을 토대로 계산된 식 (2)와 식 (3)을 사용한다.

$$b_{p,i} = b_p - 0.5 F \tan \delta_p \quad (2)$$

$$b_{p,Max} = R_o \tan \gamma \sin^2 \phi_t \quad (3)$$

여기서 $b_{p,i}$ 는 피니언의 inner end에서 디텐덤, $b_{p,Max}$ 는 피니언의 inner end에서 최대 디텐덤, b_p 는 피니언의 평균 디텐덤, F 는 치폭, δ_p 는 피니언의 디텐덤각, γ 는 피니어의 피치각, ϕ_t 는 내단에서 축직각 압력각, R_o 는 기어의 내단 원주거리이다.

2.1.2. 물림률

물림률이 커지면 회전은 원활하게 이루어지나 잇

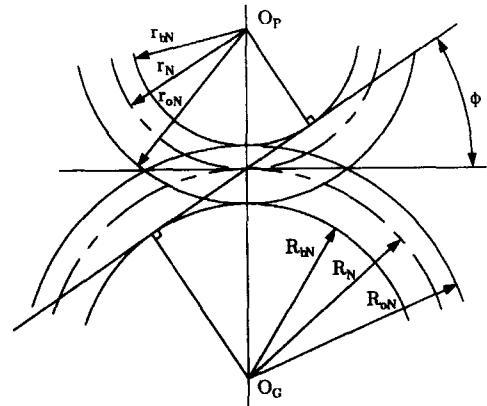


Fig. 2. Structure of contact ratio

수가 많아져서 이의 크기가 작아지고, 결국 강도가 약해진다.

물림률은 기어가 강도를 만족하며 간섭을 일으키지 않고 안전하게 회전하기 위해 필요하며 Fig.2를 근거로 계산된 물림률식^{5,7,9)}은 식 (4)와 (5)이다.

$$m_p = \frac{\cos \phi (\cos^2 \psi + \tan^2 \phi)}{P_n} \left\{ \sqrt{r_{oN}^2 - r_{bN}^2} - r_N \sin \phi + \sqrt{R_{oN}^2 - R_{bN}^2} - R_N \sin \phi \right\} \quad (4)$$

$$m_o = \sqrt{m_p^2 + m_f^2} \quad (5)$$

여기서 m_p 는 축직각 물림률, m_o 는 수정 물림률, ψ 는 스파이럴 각, P_n 는 치직각 원주피치, R_o 는 외단 원주거리, r_{bN} , R_{bN} 는 각각 피니언, 기어 치직각 단면 기초원, r_{oN} , R_{oN} 은 피니언과 기어 치직각 단면 이끝 원이다.

2.1.3. 굽힘 강도식

굽힘강도식은 기어가 회전할 때 이의 부러짐을 계산하기 위하여 사용하였으며, 이뿌리의 압축응력, 이뿌리 필렛에서의 응력집중, 물리고 있는 이 사이의 하중 부담을 고려하여 유도된 수식^{5,7,9)}을 사용한다.

$$S_t = \frac{2000 T_p K_a}{K_v} \frac{1.0}{F d m} \frac{K_s K_m}{K_x J_p} \quad (6)$$

여기서 S_t 는 굽힘응력, K_a 는 사용계수, K_s 는 치수 효과계수, K_m 은 하중분포계수, K_v 는 동하중계수, J 는 형상계수, F 는 치폭, T_p 는 피니언 작용토크, K_x 는

크라우닝 계수, d 는 피니언의 피치원 지름, m 은 모듈이다.

2.1.4. 면압 강도식

면압 강도식은 기어가 회전할 때 이의 마모상태를 계산하기 위하여 사용하며, 이의 집중하중과 물리고 있는 이 사이의 하중분담 효과등을 반영하여 계산된 수식^{5,7,9)}을 사용한다.

$$S_c = C_p C_b \sqrt{\frac{2000 T_D C_a}{C_v} \left(\frac{T_p}{T_D}\right)^2 \frac{1}{F d^2} \frac{C_s C_m C_{xc} C_f}{I}} \quad (7)$$

여기서 S_c 는 접촉응력, C_p 는 탄성정수계수, C_b 는 응력조정상수, T_D 는 기어의 작용 토크, C_a 는 사용계수, C_s 는 치수계수, C_m 은 하중분담계수, C_f 는 표면상태계수, C_{xc} 는 크라우닝계수, I 는 형상계수, C_v 는 동하중계수이다.

2.1.5. 응력 계산식

응력은 이 절손과 파손에 대한 안전상태를 검사하기 위해 사용하였으며 계산식^{5,7,9)}은 다음과 같다.

$$S_{ta} = \frac{K_L}{K_T K_X} S_{at} \quad (8)$$

$$S_{ca} = \frac{C_L C_H}{C_T C_R} S_{ac} \quad (9)$$

여기서 굽힘강도에 대한 수명계수 K_L , 온도계수 K_T 와 신뢰도계수 K_R 이고, 면압강도에 대한 수명계수 C_L , 경도비계수 C_H , 온도계수 C_T , 신뢰도계수는 C_R 이다.

2.2. 베벨기어의 목적함수

기어를 설계할 때는 대개 AGMA, JGMA, KS등에서 제시하는 변수들을 기초자료로 사용한다. 그러나 기어설계시 기어의 지름, 모듈, 치폭, 잇수, 체적 등은 기어가 회전중에 받는 부하나 회전속도, 시스템의 크기 등에 따라 변하기 때문에 사용목적에 따라 적합한 값을 결정하여 설계해야 한다.

기어설계시 모듈을 크게 하면 기어 이의 굽힘강도는 증가하나 잇수가 적어져 이와 이 사이에 간섭발생의 원인이 되고, 물림률이 작아지므로 원활한 회전을 저해하는 원인이 된다. 한편 잇수가 많으면

물림률이 증가하여 원활한 회전을 할 수 있지만 이의 크기가 작아져 굽힘강도가 약해진다. 또한 치폭이 크면 이의 면압강도는 커지나 기어의 체적이 커져 타 부품과 간섭 발생이 쉽고, 재료비가 비싸진다. 따라서 설계시 이 변수들을 잘못 결정하면 생산비가 증가하고, 운전중에 간섭이 발생하여 이의 절손 및 파손의 원인이 된다.

본 연구는 기어설계시 이러한 모순을 해결하기 위해 요구되는 기어체적 범위내에서 면압강도, 굽힘강도 등 구속조건을 만족하는 피니언의 최적 잇수를 산출하는 목적함수를 구성하였으며, 목적함수는 기어 쌍의 체적을 근거로 유도하였다.

베벨기어는 상당스피기어로 전개하여 설계가 이루어지기 때문에, 상당스피 피니언의 피치원 지름 d_e 와 상당스피 기어의 피치원 지름 D_e , 그리고 치폭 F 를 이용하여 기어 쌍의 체적 V_b 을 구하였다.

$$V_b = \frac{\pi}{4} (d_e^2 + D_e^2) F \quad (10)$$

식 (10)의 체적 계산식에 모듈식 (11)과 기어비식 (12), 치폭 식 (13)를 대입하여 피니언의 최적잇수를 구하는 목적함수 계산식 (14)를 유도하였다.

$$m_m = \frac{d_e}{Z_{pe}} \Rightarrow d_e = m_n Z_{pe}, \quad D_e = m_n Z_{De} \quad (11)$$

$$m_g = \frac{Z_{De}}{Z_{de}} \Rightarrow Z_{De} = m_g Z_{de} \quad (12)$$

$$F = K m_n \quad (13)$$

$$Z_{pemin} = \sqrt{\frac{4V_b}{\pi K (m_g^2 + 1) m_n^3}} \quad (14)$$

여기서 Z_{pe} 와 Z_{De} 는 각각 상당스피 피니언 잇수와 기어의 잇수, m_n 는 베벨기어의 치직각 모듈, K 는 베벨기어의 치폭계수, m_g 는 기어비이다.

2.3. 구속조건

구속조건은 기어의 회전에 중대한 영향을 미치는 피니언의 잇수, 물림률, 기어쌍의 체적, 치폭, 접선속도, 굽힘강도, 면압강도 등으로 하였으며, 설계의 유효조건, 기어가 결합된 축의 힘이나 전동오차로

인하여 발생하는 진동 등의 설계변수들은 만족하는 것으로 가정하였다.

피니언의 잇수 결정은 식(15)와 같이 목적함수로 계산한 피니언의 잇수 Z_{pe} 이 물림률 제한조건을 만족하는 최소잇수 Z_{emin} 보다 많도록 하였다.

$$Z_{emin} < Z_{pe} \quad (15)$$

물림률 m_p 는 일반적으로 설계에 사용되는 한계 물림률 값(m_{input}) 1.4보다 크도록 하였다.

$$m_{input} \leq m_p \quad (16)$$

기어 쌍의 체적은 기어가 사용되는 시스템의 타 부품과 간섭을 피하기 위하여 구속하였으며, 식 (17)와 같이 계산된 체적 Vol 이 제한 입력값 Vol_{max} 보다 작도록 하였다.

$$Vol \leq Vol_{max} \quad (17)$$

치폭 F 를 결정하는 치폭계수 K 는 식(18)과 같이 최소값 Low 와 최대값 Up 의 범위 내에서 정해지도록 하였다.

$$Low \leq K \leq Up \quad (18)$$

식 (19)의 접선속도 V_t 는 데이터로 입력되는 입력 값 V_{tmax} 보다 작도록 제한하였다.

$$V_t \leq V_{tmax} \quad (19)$$

굽힘강도는 식 (20)에서와 같이 사용굽힘강도가 한계굽힘강도보다 작거나 같도록 구성하였다. 사용 굽힘응력(S_t)을 계산하여 사용굽힘강도로 사용하였고, 식 (8)의 한계굽힘응력(S_{ta})보다 작거나 같게 제한했다.

$$S_t \leq S_{ta} \quad (20)$$

면압강도의 한계값 결정은 면압강도 제한조건식 이 사용면압강도(S_c)가 한계면압강도(S_{ca})보다 작거나 같도록 식 (21)과 같이 구성하였다.

$$S_c \leq S_{ca} \quad (21)$$

베벨기어는 직교 축으로 회전하기 때문에 이의 inner end에서 디텐덤이 최대 디텐덤보다 클 때 간섭이 발생하므로 식 (22)로 제한한다.

$$b_{p_i} \leq b_{pmax} \quad (22)$$

이와 같이 식 (15)~식 (22)을 이용하여 목적함수 값을 구하기 위한 구속조건으로 사용하였다.

3. 설계시스템 구성

3.1. 설계를 위한 최적화

기어 쌍의 최적 잇수를 구하기 위해 Fig. 3의 matrix방법을 구성하여 사용하였으며, O는 목적함수를 만족하는 값이고, X는 불만족한 값을 뜻한다.

여기서 열은 KS에서 사용하는 모듈들이고 행은 치폭계수이다. 열의 구성은 맨 왼쪽이 가장 작은 모듈 값이고 오른쪽으로 가면서 큰 값을 취한다. 치폭계수는 윗쪽이 최소 값이고, 아래로 내려감에 따라 증가 값이 된다.

검색은 최소치폭에 대해 구속조건을 만족하는 목적함수인 최소체적에 대한 모듈을 구하는 것으로부터 시작한다. 먼저 맨 윗쪽의 최소치폭을 취하고 맨 왼쪽의 작은 모듈부터 오른쪽으로 가면서 차례로 목적함수식에 대입하면서 구속조건을 만족하는 최소체적 값인 목적함수 값을 찾는다. 이와 같이 1행에 대한 가능해가 구해지면 다음 행에 대하여 앞행과 같은 방법으로 검색을 하여 제 2행의 치폭계수와 구속조건을 만족하는 최소체적에 해당하는 모듈

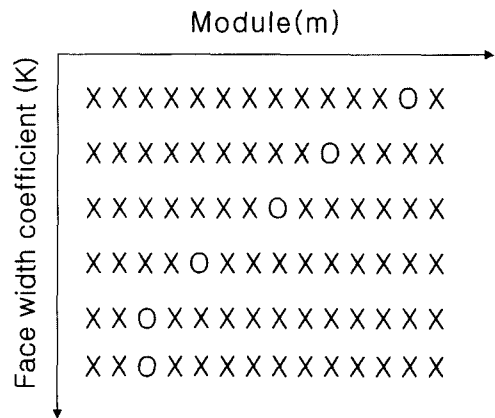


Fig. 3. Search method of face width coefficient, module for minimum gear set volume.

을 찾는다. 이렇게 모든 행과 열에 대한 검색을 수행하여 모든 행에 대한 목적함수 값을 찾는다. 모든 행의 목적함수 값이 구해지면 이 값들 중에서 가장 작은 목적함수 값을 취하고, 이 목적함수를 계산하는데 사용한 치폭계수와 모듈을 설계에 사용하였다.

3.2. 설계 모듈 구성

베벨기어 설계를 위해 본 연구에서 구성한 모듈은 중앙관리모듈, 기어설계모듈, 평가모듈이다.

중앙관리모듈은 설계자에 의하여 기어의 종류와 공구의 제원, 설계조건들이 입력되면 이 데이터를 입력받아 설계모듈에 제공하고 기어설계모듈에서 설계된 설계값들을 평가모듈로 보내주는 역할을 한다.

기어설계모듈은 설계를 위한 데이터가 입력되면 그 입력값에 따라 설계가 수행된다. 설계의 입력자료는 설계 데이터인 피니언의 회전수, 입력동력, 기어비가 입력된다. 설계변수로는 기어재료의 허용굽힘응력, 허용면압응력, 최대접선속도, 한계 물림률 등이 입력된다. 가공 공구의 제원은 랙의 어텐덤 비, 랙의 디텐덤 비, 랙의 에지반경(edge radius of rack), 기준 피치원 상에서의 압력각이 입력된다. 이와 같이 입력값이 입력되면 본 논문에서 제시된 최적화 방법에 따라 구속조건을 만족하는 목적함수를 구하기 위한 최적화를 수행한다. 최적화 수행에서 구해진 피니언의 최소잇수, 모듈, 치폭계수, 기어 쌍의 체적 등을 이용하여 기어의 설계에 필요한 피치원 지름과 기초원 지름, 이끝원 지름, 치폭, 기어의 잇수 등과 같은 설계변수를 계산하도록 구성하였다.

평가모듈의 구성은 요구 조건과 설계수행 후의 결과 값인 피니언의 최적 잇수, 물림률, 한계 체적, 치폭, 접선속도와 기어의 이에서 발생하는 사용굽힘강도와 접촉하는 치면에서 발생하는 사용면압강도 값과 비교함으로써 설계조건에 만족하면 설계를 수행하고 만족하지 않을 때는 재 설계하도록 중앙관리 모듈에 정보를 제공한다.

4. 설계결과 및 고찰

결과 및 고찰은 본 연구에서 사용한 구속조건 식 (15)~(22)을 만족하면서 최적화 식 (14)를 이용하여 기어를 설계하였을 때, 기어가 회전시 파손되지 않고 안전하게 강도를 만족하는지 판정하기 위하여 수행하였다.

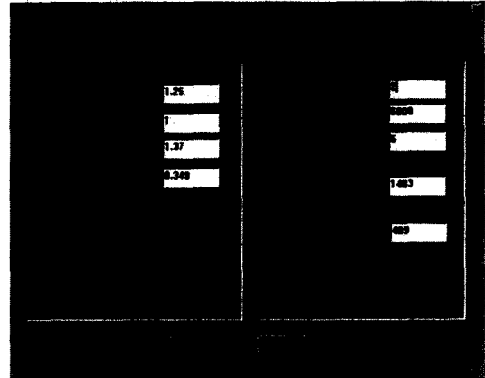


Fig. 4. Input data of bevel gear design

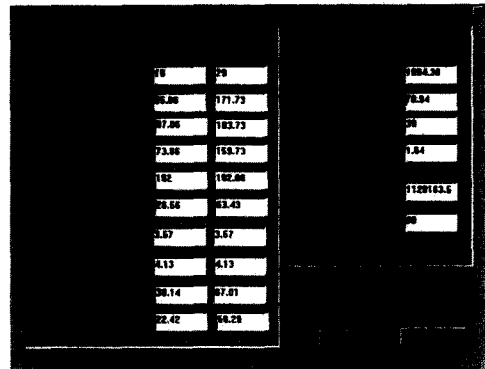


Fig. 5. Results of bevel gear design at gear ratio 2

기어쌍의 체적을 $4740 \times 10^3 (\text{mm}^3)$ 으로 구속한 상태에서 Fig. 4에서와 같이 공구 제원과 요구조건인 기어비 2, 피니언의 회전수 6000rpm, 입력동력 5kW일 때 설계를 수행하였다. 설계수행 결과 Fig. 5에서 보는 바와 같이 굽힘강도에 있어서 식 (8)에 의해 계산된 한계굽힘응력이 526.54MPa, 설계후의 사용응력은 약 70.94MPa이므로 설계 후의 사용응력이 455.6MPa 작으므로 굽힘강도는 설계범위 내에서 설계가 수행되었음을 알 수 있다. 면압강도는 식 (9)에 의해 계산된 한계면압응력이 1705MPa, 설계 후의 사용응력은 1094.38MPa이므로 설계 후의 사용응력이 한계면압응력보다 610.62MPa 작아 면압강도도 설계영역 범위 안에 있음을 알 수 있다. 물림률을 1.4이상으로 설계조건을 제한하였을 때 설계값은 1.64로 나타나 제한조건보다 0.24 높아 물림률도 설계영역 안에 있음을 보여 준다.

Fig. 6의 입력조건인 기어비 3, 피니언의 회전수 6000rpm, 입력동력 5kW일 때 설계를 수행하였다. 설계수행 결과 Fig. 7에서 보는 바와 같이 굽힘강도



Fig. 6. Input data of bevel gear design

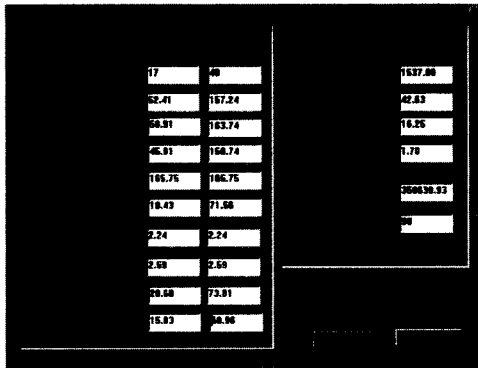


Fig. 7. Results of bevel gear design at gear ratio 3

에 있어서 식 (8)에서 계산한 한계급힘응력이 526.54 MPa이고, 설계후의 사용응력은 42.63MPa이므로 설계 후의 사용응력이 483.91MPa 작으므로 설계 범위 안에서 설계가 수행되었음을 알 수 있었다. 면압강도는 식 (9)에 의해 계산된 한계면압응력이 1705 MPa 이지만 설계후의 사용응력은 1094.38MPa이므로 설계후의 사용응력이 610.62MPa 작으므로 면압강도도 설계영역 범위 안에 있음을 알 수 있다. 또한 물림률을 1.4이상으로 설계조건을 제한하였지만 설계값은 1.7로 나타나 제한조건보다 0.3 높았으며, 물림률도 설계 범위 안에서 설계가 이루어 졌음을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 연구는 산업용 인벌류트 직선형 베벨기어를 대상으로 안전성을 고려한 기어설계 시스템을 구성하여 설계를 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

입력조건인 기어비 2, 피니언의 회전수 6000rpm, 입력동력 5kW일 때 설계를 수행한 결과 한계급힘응력이 526.54MPa, 설계후 사용급힘응력은 70.94MPa 이고, 면압강도는 최대 허용면압응력이 1705MPa, 사용응력은 1094.38MPa이다. 물림률은 1.4이상으로 설계조건을 제한하였을 때 설계값은 1.64로 나타나 제한조건보다 0.24 높았다. 따라서 설계범위 내에서 안전한 설계가 이루어졌음을 알 수 있었다. 또한 기어비 3으로 변화시켜 설계를 수행한 결과 한계급힘응력이 526.54MPa이고, 설계후의 값은 42.63, 면압강도는 한계면압응력이 1705MPa 이지만 사용응력은 약 1094.38MPa로 나타났다. 물림률은 1.4이상으로 설계조건을 제한하였지만 설계값은 1.7로 나타났다. 따라서 이와 같은 설계조건에서도 안전한 설계가 이루어졌음을 알 수 있었다.

이상과 같은 결과는 산업용 직선형 인벌류트 베벨기어를 설계하는데 지침이 될 수 있으리라 기대된다.

감사의 글 : 본 논문은 2002년도 충청대학 교내 학술연구비 지원에 의하여 이루어졌음.

참고문헌

- 1) G. Cockerham and D. Waite, "Computer-Aided-Design of Spur and Helical Gear Train", Computer Aided Design, Vol. 8, No. 2, pp. 84~88, 1976.
- 2) M. Savage, J.J. Coy and P. Townsend, "Optimal Tooth Numbers for Compact Standard Spur Gear Sets", Trans. ASME., Journal of Mechanical Design, Vol. 104, No. 3, pp. 749~758, 1982.
- 3) W.D. Mark, "The Generalized Transmission Error of Spiral Bevel Gears", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 275~282, 1987.
- 4) M. Artes and J. Pedrero, "Computerized Graphic Method for The Analysis of Gear Design", Departamento de Mecanica, E,T,S. Ingenieros Industriales, U.N.E.D., Vol. 29, NO. 1, pp. 59~71, 1994.
- 5) 정태형, 변준형, 김태형, 지증조, "동력전달용 베벨기어의 체적 설계", 대한기계학회 '춘계학술대회 논문집, pp. 991~995, 1993.
- 6) R.K. Carrol and G.E. Johnson, "Optimal Design of Compact Spur Gear Sets", Trans. ASME., Journal

- of Mechanisms, Trans. and Automation in Design, Vol. 106, pp. 95~101, 1984.
- 7) American Gear Manufactures Association, "AGMA Standard for Rating the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur and Helical Involute Gear Teeth", AGMA 218.01, 1982.
 - 8) M.A. Lopez and R.T. Whewey, "A Method for Determining the AGMA Tooth Form Factor from Equations for the Generated Tooth Root Fillet", Trans. ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 108, No. 85, pp. 270~279, 1986.
 - 9) 정성호, "베벨기어 설계 해석 자동화 기술에 관한 연구" 창원대학교 석사학위논문, pp. 8~37, 1993.
 - 10) R.B. Randall, "A New Method of Modeling Gear Faults", Journal of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 259~267, 1982.