

## 비선형 점탄성 부상모델에 대한 주파수와 변위의 영향에 대한 연구

이 성 범<sup>†</sup> · 김 성 진\* · 민 제 흥\*\*

<sup>†</sup>인제대학교 기계자동차공학부, \*인제대학교 대학원 기계공학과,

\*\*삼성전자 CTO전략실

(2003년 10월 27일 접수, 2003년 11월 26일 수정 및 채택)

### A Study on the Affection of Frequency and Displacement for Nonlinear Viscoelastic Bushing Model

Seong Beom Lee<sup>†</sup>, Sung Jin Kim\*, and Je-Hong Min\*\*

<sup>†</sup>School of Mechanical & Automotive Engineering, Inje University

\*Department of Mechanical Engineering, Graduate School, Inje University

\*\*Corporate Technology Operations, Samsung Electronics Co., Ltd

(Received October 27, 2003, Revised & Accepted November 26, 2003)

**요약**: 부싱은 차체로 전달되는 하중을 줄여주는 역할을 하는 자동차 현가장치의 부품으로 바깥쪽 슬리브와 안쪽의 축 사이에서 가운데가 비어있는 실린더의 형상을 가진다. 축에 작용되는 하중과 부싱의 상대 변위는 비선형 점탄성 성질을 나타내며, 부싱에서 힘과 변위의 관계는 다물체 동역학 시뮬레이션에 중요하다. 비선형 점탄성 축방향모드에 대하여 힘과 변위와의 직접 관계적인 뿔킨-라저스 모델을 리아니스 모델로부터 유도하였으며, 사인함수의 변위를 뿔킨-라저스 모델에 적용하여 주파수와 변위의 변화가 비선형 점탄성 부상 모델에 미치는 영향에 대하여 알아보았다.

**ABSTRACT**: A bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is a hollow cylinder, which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the force applied to the shaft and the relative deformation of a bushing is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity. A force-displacement relation for bushings is important for multibody dynamics numerical simulations. For the nonlinear viscoelastic axial response, Pipkin-Rogers model, the direct relation of force and displacement, has been derived from Lianis model and the sinusoidal input was used for Pipkin-Rogers model, and the affection of displacement with frequency change was studied with Pipkin-Rogers model.

*Keywords*: lianis model, pipkin-Rogers model, nonlinear viscoelastic material

### I. 서 론

부싱은 자동차 현가장치의 주요 부품으로, 부품의 피로수명 예측, 자동차의 승차감 및 동적 특성

에 영향을 미치고 일반적으로는 여러 가지 형상을 가지고 있으나, 본 연구에서 고려된 부싱은 바깥쪽의 실린더형 슬리브(sleeve)와 안쪽의 실린더형 축 사이에서 가운데가 완전히 비어있는 실린더의 형태를 가진다. 이 슬리브와 축은 자동차 현가장치의 부품들에 연결되어 있으며, 부싱을 통하여 힘이 전

<sup>†</sup>대표저자(e-mail : mechlsb@inje.ac.kr)

달되며, 부상은 충격과 진동을 줄여주는 역할을 한다.

특히, 현가장치의 동역학적 현상을 정확히 예측하는 데 있어서, 간단하면서도 정확한 부상모델은 매우 중요하다고 할 수 있다. 부상은 힘과 변위의 관계로 모델링 되는데, 이는 미국 미시간 대학교 기계공학과와 자동차 구조 내구성 센터 (Center for Automotive Structural Durability Simulation)에서 수행한 일차원 반경방향 변위 제어 실험 (one-dimensional radial displacement control) 결과, 비선형 점탄성현상이 관찰되어 기존의 선형 점탄성 모델은 정확하지 못하다고 판명되었다.<sup>1,2</sup>

본 연구는 점탄성 연구를 바탕으로 하여 수행되었으며,<sup>3</sup> 모의실험을 통하여 비선형 점탄성 모델이 완성되었다. McGuirt와 Lianis는 비선형 점탄성 모델의 연구에 있어서 스티렌-부타디엔 고무 (styrene-butadiene rubber)를 이용하여 많은 실험을 수행하였으며, 이를 바탕으로 리아니스 구성방정식 (Lianis constitutive equation)을 완성하였다.<sup>4</sup>

Lee는 부상의 축방향 모드에 대하여, 응력과 변형률의 관계식인 리아니스 구성방정식과 축방향 모드로부터 발생하는 힘과 응력과의 관계식 및 변위와 변형률의 관계식으로부터 비선형 점탄성 모델인 리아니스 모델을 완성하였고, 리아니스 모델을 통하여 모의실험을 수행할 수 있는 기초 데이터를 얻어 축방향 모드와 회전방향 모드 각각의 단일 모드에 대하여 새로운 비선형 점탄성 부상 모델을 완성하였으며, 이를 핏킨-라저스 모델 (Pipkin-Rogers model)로 명명하였다.<sup>5</sup>

하지만, 기존의 연구는 변위와 시간과의 관계가 일정하거나 일정한 비율을 가지는 것에 대하여만 관심이 있었으므로, 부상 모델의 실용화를 위한 연구로는 부족함이 있었다. 따라서, 본 연구에서는 사인함수를 주어진 입력으로 하여 주파수와 변위의 진폭이 핏킨-라저스 모델에 어떠한 영향을 미치는 지에 대하여 알아보았다. 즉, 주어진 변위의 입력으로 사인함수를 이용하여, 진폭과 주파수가 비선형 비압축성 점탄성 부상 모델에 미치는 영향을 연구하였으며, 특별히 이러한 진폭과 주파수가 점탄성 모델의 비선형성과 어떠한 관계가 있는 지를

알아봄으로써, 이를 통하여 비선형 점탄성 부상 모델에 대한 다각적인 이해를 도모하고자 하였다.

## II. 리아니스 모델 및 핏킨-라저스 모델

비압축성 등방성 점탄성 물질의 등온반응에 대한 3차원 구조이론은 콜만(Coleman)과 놀(Noll)에 의하여 발전되었으며, 근사적 구조방정식을 완성하기 위하여 fading memory가 이용되었다.<sup>6</sup> 리아니스와 그의 동료들은 스티렌-부타디엔 고무 (styrene-butadiene rubber)에 관한 실험을 통해 여러 방향에서의 데이터로 많은 시행착오를 통한 후 적분방정식을 완성하였으며, 비압축성 비선형 점탄성 물질에 관한 다음의 식을 완성하였다.<sup>4</sup>

$$\alpha(t) = -\hat{p}(t)I - (c + d(I_2 - 3))B^2 + \left[ a + \frac{b}{(I_1 - 2)^2} + I_1(c + d(I_2 - 3)) \right] B \quad (1)$$

$$+ 2 \int_{-\infty}^t [P_0(t-s) + (I_2 - 3)Q_0(t-s)] \dot{C}_I(s) ds$$

$$+ \int_{-\infty}^t \left[ P_1(t-s) + \frac{Q_1(t-s)}{(I_1 - 2)^2} \right] [B \dot{C}_I(s) + \dot{C}_I(s)B] ds$$

$\alpha(t)$  : 수직응력(normal stress)과 전단응력(shear stress)이 포함된  $3 \times 3$  행렬

$\hat{p}$  : 비압축성의 제한으로부터 온 스칼라량

$t$  : 현재시간

$s$  : 과거에서 현재까지의 시간 ( $-\infty < s \leq t$ )

$P_0(t), Q_0(t), P_1(t), Q_1(t)$  : material property for styrene-butadiene rubber

$a, b, c, d$  : material property for styrene-butadiene rubber

$B$  : left Cauchy-Green tensor

$I_1 = B_{ii}$  (summation convention, tensor notation)

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ji} \}$$

(summation convention, tensor notation)

$C_I(s)$  : right relative Cauchy-Green tensor

$$\dot{C}_I(s) = \frac{dC_I(s)}{ds}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

고정 좌표계에서의 질점의 위치를  $X$ , 시간  $s$  에서의 질점의 위치를  $x(s)$ 라 하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$x(s) = \chi(X, s), \quad -\infty < s \leq t \quad (2)$$

시간  $t$ 에서의 질점의 변형 그래디언트 (deformation gradient)를  $F(t)$ 라 표기하면,  $B(t) = F(t)[F(t)]^T$ 는 왼쪽 코시-그린 변형률 텐서 (left Cauchy-Green strain tensor),  $I_1$ 과  $I_2$ 는  $B(t)$ 의 변형률 불변량 (strain invariants)이며,  $C_i(s)$ 와  $\check{C}_i(s)$ 는 오른쪽 상대 코시-그린 변형률 텐서 (right relative Cauchy-Green strain tensor)와 그것의  $s$ 에 대한 편미분을 나타낸다.  $P_0(t)$ ,  $Q_0(t)$ ,  $P_1(t)$ ,  $Q_1(t)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ 는 psi 단위를 가지는 물질의 특성이며, 리아니스(Lianis)와 그의 동료들에 의하여 실험을 통하여 얻어진 데이터를  $0 \leq t \leq 60$  sec.에 대하여, 보간법(interpolation)과 외삽법(extrapolation)을 이용하여 Figure 1에 나타내었다.<sup>5</sup>

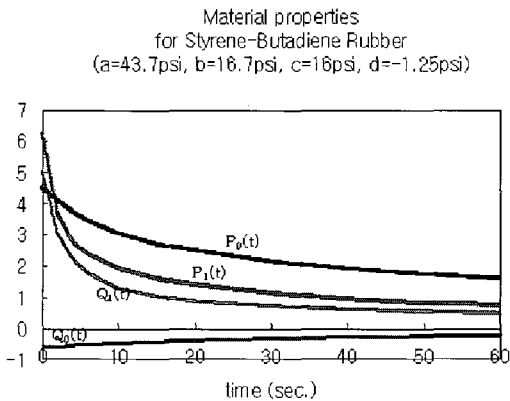


Figure 1. Material properties for styrene-butadiene rubber at 0°C.

본 연구에 있어서는 부싱의 축방향 모드에 대한 힘과 변위의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 Pipkin과 Rogers에 의하여 제안된 식을 부분 적분법을 이용하여 정리하면 다음과 같다.<sup>7</sup>

$$F(t) = H(w(0), t) + \int_0^t \frac{\partial H(w(s), t-s)}{\partial w(s)} \frac{dw(s)}{ds} ds \quad (3)$$

$H(w, t)$ 는 시간이 0일 때 변위가  $w$ 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한  $w$  값을 갖는 스텝 변위 (step displacement)가 주어져 있을 때, 힘  $F(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 변위에 의존하는 힘 완화함수 (displacement dependent force relaxation function)라 일컫는다.

새로운 비선형 점탄성 모델을 완성하는데 있어서, 리아니스 모델을 이용하여 데이터를 얻어 비선형 점탄성 모델인 쾨킨-라저스 모델을 완성하였으며, 이 모델을 바탕으로 사인함수를 이용하여 모의 실험을 수행하였다.

### III. 비선형 점탄성 모델링 및 모의실험

부싱은 가운데가 비어있는 실린더로 가정되어 축방향 대칭이고, 관성은 무시되었으며, 본 연구에서는 축방향의 변형만이 고려되었다. 변형전의 원통좌표계는  $R, \theta, Z$ 이며, 변형후의 원통좌표계는  $r, \theta, z$ 로 한다. 부싱은  $t < 0$ 에서는 변형이 없으며,  $t \geq 0$ 에서는 가운데 축이 축방향의 힘을 받음에 따라 부싱은 바깥쪽 슬리브에 대하여 축 방향으로 변위  $w(r, t)$ 를 갖는다. 변형전과 변형후의 모양은 Figure 2에 나타나 있으며, 바깥쪽 슬리브는 고정되어 있으므로,  $w(R_o, t) = 0$ 이며, 가장 큰 변위를 가지는 부싱의 안쪽에서의 변위  $w(R_i, t)$ 와 축방향 힘과의 관계를 구하였다.

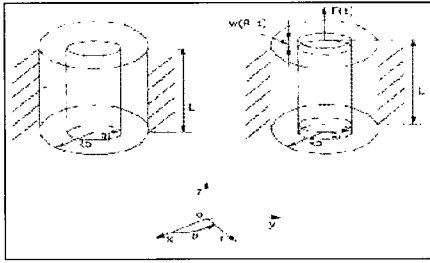


Figure 2. Reference and current configurations in axial mode.

부상 안쪽 반지름  $R_i$ 를 이용하여 반지름  $r$ , 힘  $F(t)$ , 변위  $w(r, t)$ 를  $\hat{r} = r/R_i$ ,  $\hat{w}(\hat{r}, t) = w(r, t)/R_i$ ,  $\hat{F}(t) = F(t)/(2\pi R_i L G)$ 로 무차원화한 후, 많은 단계의 계산을 통하여 얻어진, 힘, 응력, 변형률, 변위와의 관계는 다음과 같다.<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rz}(\hat{r}, t) &= G \frac{\hat{F}(t)}{\hat{r}} \\ &= \left[ a + \frac{b}{\{1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)\}^2} + \{3 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)\} \right. \\ &\quad \left. \{c + d\hat{k}^2(\hat{r}, t)\} \right] \hat{k}(\hat{r}, t) \\ &\quad - [c + d\hat{k}^2(\hat{r}, t)][2 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \hat{k}(\hat{r}, t) \\ &\quad + 2\hat{k}(\hat{r}, 0^+) [P_0(t) + \hat{k}^2(\hat{r}, t) Q_0(t)] \\ &\quad + 2 \int_0^t P_0(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} ds \\ &\quad + 2\hat{k}^2(\hat{r}, t) \int_0^t [Q_0(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s}] ds \\ &\quad + \hat{k}(\hat{r}, 0^+) \left[ P_1(t) + \frac{Q_1(t)}{\{1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)\}^2} \right] \\ &\quad [2 + \hat{k}(\hat{r}, 0^+) \hat{k}(\hat{r}, t) - \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \\ &\quad + 2\hat{k}(\hat{r}, t) \int_0^t \left[ P_1(t-s) \hat{k}(\hat{r}, s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right] ds \\ &\quad + [2 - \hat{k}^2(\hat{r}, t)] \int_0^t \left[ P_1(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s} \right] ds \\ &\quad + \frac{2\hat{k}(\hat{r}, t)}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]^2} \int_0^t [Q_1(t-s) \hat{k}(\hat{r}, s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s}] ds \\ &\quad + \frac{2 - \hat{k}^2(\hat{r}, t)}{[1 + \hat{k}^2(\hat{r}, t)]^2} \int_0^t [Q_1(t-s) \frac{\partial \hat{k}(\hat{r}, s)}{\partial s}] ds \end{aligned} \tag{4}$$

$$\hat{k}(\hat{r}, t) = \frac{\partial \hat{w}(\hat{r}, t)}{\partial \hat{r}} \tag{5}$$

힘  $F(t)$  를 무차원하기 위하여 이용된  $G$  는 다음과 같이 정의되었다.

$$G = \lim_{k(r, 0^+) \rightarrow 0} \frac{\sigma_{rz}(r, 0^+)}{k(r, 0^+)} = 107.95(\text{psi}) \tag{6}$$

식 (4)와 (5)는 부상의 축방향모드에 대한 리아니스 모델로 불리우며, 힘  $\hat{F}(t)$ 가 주어지면, 볼테라 적분방정식인 식 (4)와 변위와 변형률의 관계를 나타내는 식 (5)로부터 부상의 안쪽 반지름에서의 변위  $\hat{w}(1, t)$ 가 구해진다.

주어진 식 (4), (5)를 이용하여, ramp to step displacement control test를 컴퓨터 시뮬레이션으로 수행하였으며, 이 때 적용한 ramp to step displacement  $\hat{w}(1, t)$ 는 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{w}(1, t) &= \frac{\hat{w}_0}{T^*} t, \quad 0 \leq t \leq T^* \\ &= \hat{w}_0, \quad t \geq T^* \end{aligned} \tag{7}$$

where,  $T^* = 1, 2, 4, 8 \text{sec.}$

$$\hat{w}_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$$

Ramp to step displacement control test의 결과를 step displacement control test의 결과로 이용하기 위하여 force extrapolation method를 사용하였으며,<sup>8</sup> 이로부터 displacement dependent force relaxation function  $H(\hat{w}, t)$ 를 얻었고,<sup>5</sup> 이는 다음과 같이 표현된다.

$$H(\hat{w}, t) = \hat{w} G_1(t) + \hat{w}^3 G_3(t) + \hat{w}^5 G_5(t) \tag{8}$$

그리고,  $0 \leq t_i \leq 60 \text{sec.}$ 에 대하여, 선형 최소 자승법 (linear least square method)을 이용하여  $G_1(t)$ ,  $G_3(t)$ ,  $G_5(t)$ 를 구하였으며, 다음과 같이 지수함수의 합으로 된 함수로 표현할 수 있다.

$$G_i(t) = C_{i1} + C_{i2}e^{-t/\tau_{i2}} + C_{i3}e^{-t/\tau_{i3}} \quad i=1,3,5 \quad (9)$$

계수  $C_{ij}$ 와  $\tau_{ij}$ 를 구하기 위하여 비선형 최소자승법 (nonlinear least square method)이 이용되었으며,<sup>9</sup> 구하여진 계수  $C_{ij}$ 와  $\tau_{ij}$ 를 식 (9)에 대입하여 완성된 함수  $G_1(t)$ ,  $G_3(t)$ ,  $G_5(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_1(t) &= 0.6939 + 0.1066e^{-t/15.4608} + 0.1117e^{-t/2.017} \\ G_3(t) &= -0.0959 - 0.0252e^{-t/10.3334} - 0.0243e^{-t/1.7875} \quad (10) \\ G_5(t) &= 0.0286 + 0.0075e^{-t/9.0136} + 0.0075e^{-t/1.7358} \end{aligned}$$

따라서, 완성된 비선형 점탄성 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= H(\hat{w}(1,0), t) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial H(\hat{w}(1,s), t-s)}{\partial \hat{w}(1,s)} \frac{d\hat{w}(1,s)}{ds} ds \quad (11) \\ H(\hat{w}(1,s), t) &= G_1(t) \hat{w}(1,s) + \\ &G_3(t) \hat{w}(1,s)^3 + G_5(t) \hat{w}(1,s)^5 \end{aligned}$$

다음으로, 부싱의 축방향 모드에 대하여 스티렌-부타디엔 고무를 이용하여 리아니스로부터 유도된 리아니스식과 힘과 응력의 관계, 변위와 변형률과의 관계등의 응용역학적 방법을 사용한 리아니스 모델로부터 데이터를 얻어서 완성된 힘과 변위의 직접 관계인 쾨킨-라저스 모델에 사인 함수의 축방향 변위를 입력하여 그 진폭의 변화와 주파수의 변화에 따른 힘과 변위와의 관계를 알아보았다.

부싱의 안쪽 반지름에서의 주어진 변위  $\hat{w}(1, t)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{w}(1, t) = A \sin(\omega t) \quad (12)$$

$A$ 는 무차원화된 진폭으로 0.3, 0.4, ..., 0.9를 이용하였으며, 주파수는  $f = \omega / (2\pi)$ 로, 0.00625, 0.0125, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4Hz를 이용하였다.

모의실험을 통하여, 주파수와 변위가 점탄성 모델의 비선형성에 미치는 영향을 알아보았으며, 변

위가 증가함에 따라 비선형성이 커지는 것을 알 수 있다. 이에 대한 예로써,  $f = 0.4\text{Hz}$ 에 대하여,  $A = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 의 경우를 Figures 3, 4, 5, 6에 각각 나타내었다.

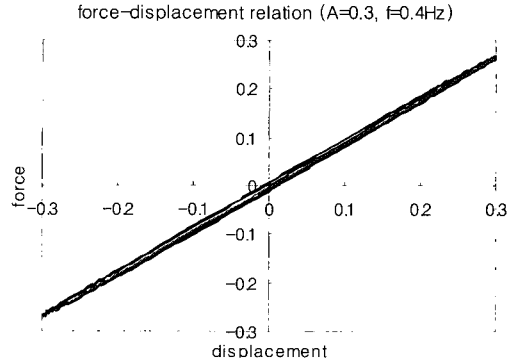


Figure 3. Force-displacement relation for  $A = 0.3$ ,  $f = 0.4\text{Hz}$ .

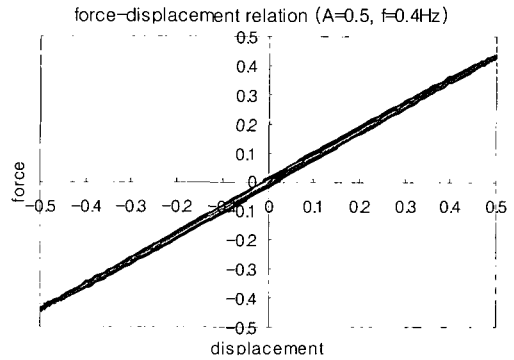


Figure 4. Force-displacement relation for  $A = 0.5$ ,  $f = 0.4\text{Hz}$ .

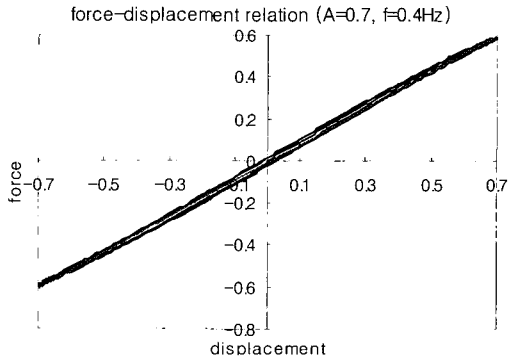


Figure 5. Force-displacement relation for  $A = 0.7$ ,  $f = 0.4\text{Hz}$ .

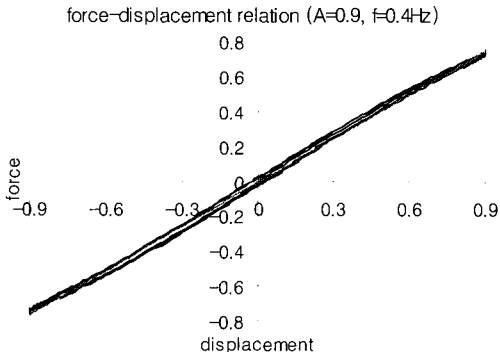


Figure 6. Force-displacement relation for  $A = 0.9$ ,  $f = 0.4\text{Hz}$ .

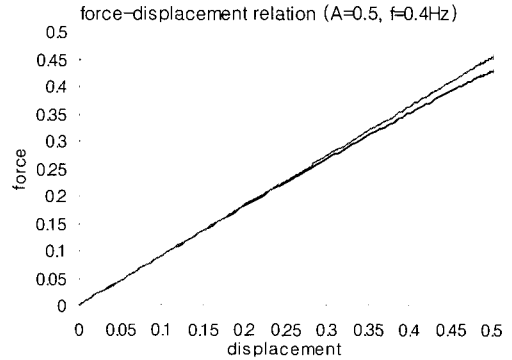


Figure 7. Force-displacement relation for  $A = 0.5$ ,  $f = 0.4\text{Hz}$ .

주파수가 점탄성 부상 모델의 비선형성에 미치는 영향을 정량적으로 알아보기 위하여, 주어진 주기의 1/4되는 시간을 최종 모의실험 시간으로 하고, 이 시간의 1/10되는 지점까지를 변위와 하중의 선형관계로 가정하였다. 주기의 1/40되는 시간까지에서 주어진 변위와 하중과의 관계를 이용하여 최소 자승법으로부터 선형 관계를 도출하였으며, 이를 연장하여 주기의 1/4되는 곳에서 주어진 변위에 대한 하중 값을 얻었다. 이렇게 얻은 선형 결과 값과 모의실험에서 얻은 하중 값의 차를 선형 결과 값으로 나누어 상대오차  $E$ 를 정의하였으며,  $A = 0.5$ 인 경우에 대하여 알아보면,  $f = 0.4\text{Hz}$ 인 경우  $E = 5.768\%$ ,  $f = 0.2\text{Hz}$ 인 경우  $E = 7.521\%$ ,  $f = 0.1\text{Hz}$ 인 경우  $E = 10.113\%$ ,  $f = 0.05\text{Hz}$ 인 경우  $E = 13.083\%$ ,  $f = 0.025\text{Hz}$ 인 경우  $E = 15.413\%$ ,  $f = 0.0125\text{Hz}$ 인 경우  $E = 16.613\%$ ,  $f = 0.00625\text{Hz}$ 인 경우  $E = 16.65\%$ 등으로 주파수가 감소할수록 비선형 정도가 커짐을 알 수 있다.

Figures 7, 8, 9, 10은  $A = 0.5$ 일 때,  $f = 0.4\text{Hz}$ ,  $f = 0.1\text{Hz}$ ,  $f = 0.025\text{Hz}$ ,  $f = 0.00625\text{Hz}$ 인 경우에 대하여 하중과 변위의 관계를 나타내며, 이 때 직선은 주기의 1/40까지의 시간에 대한 하중과 변위의 데이터로 최소 자승법으로부터 얻은 선형 관계를 나타내고 있다.



Figure 8. Force-displacement relation for  $A = 0.5$ ,  $f = 0.1\text{Hz}$ .

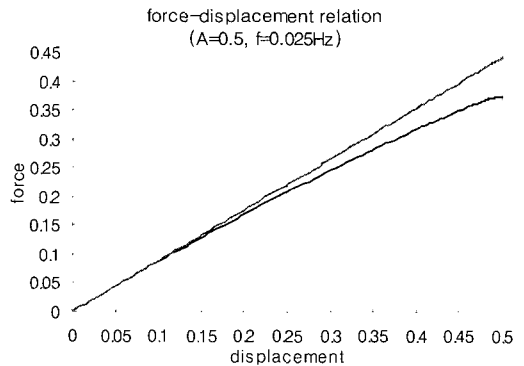


Figure 9. Force-displacement relation for  $A = 0.5$ ,  $f = 0.025\text{Hz}$ .

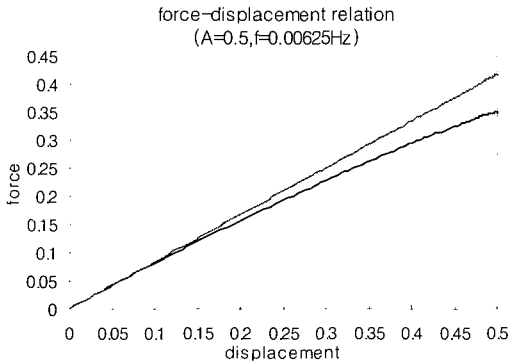


Figure 10. Force-displacement relation for  $A = 0.5$ ,  $f = 0.00625\text{Hz}$ .

#### IV. 결 론

본 연구는 부싱의 축방향 모드에 관하여만 고려되었다. 실제의 부싱에 있어서는 축방향 모드뿐만 아니라, 반경방향 모드, 원주방향 모드 등 여러 모드가 복합적으로 작용한다. 따라서, 이러한 복합모드에 대한 연구가 지속적으로 진행되어야 할 것이다. 하지만, 축방향 모드의 단일 모드에 대한 기초 연구는 의미가 있으며, 본 연구의 결과는 다음과 같다.

축방향의 변형에 대하여 비선형 점탄성 모델로 리아니스 모델과 쫘킨-라저스 모델이 고려되었다. 리아니스 모델은 스티렌-부타디엔 고무에 대한 실험 결과를 바탕으로 응력과 변형률의 관계식인 리아니스식과 힘과 응력의 관계식, 변형률과 변위의 관계식을 이용한 기존의 응용역학적 방법을 이용한 것으로, 관련 식들이 음함수로 연결되어 있어 동역학적 모의실험에 직접 이용되기에 어려움이 있다. 따라서, 리아니스 모델로부터 힘과 변위의 관계를 나타내는 기초 데이터를 얻어서, 힘과 변위의 직접관계인 쫘킨-라저스 모델을 완성하였다. 이 쫘킨-라저스 모델은 축방향 모드에 대한 비선형 점탄성 모델로서 여기에 사인함수의 변위를 주어, 주파수와 변위가 비선형 점탄성 부싱모델에 미치는 영향에 대하여 알아보았으며, 본 모델의 비선형성은 변위의 진폭에 비례하고, 주파수의 크기에 반비

례하는 것을 알 수 있었다.

본 연구에서의 쫘킨-라저스 모델은 그 기초 데이터를 스티렌-부타디엔 고무에 대한 실험을 바탕으로 한 리아니스 모델로부터 얻었고, 리아니스의 실험에서는 변위와 시간에 제한이 있었다. 즉, 무차원화된 변위는 0.2와 1사이로 제한되었으며, 모의실험의 수치해석을 위한 시간 간격은  $\Delta t = 0.1\text{sec}$ .로 모의실험 시간의 제한으로 인하여 주파수 역시 아주 작은 값으로 제한되어 있을 수밖에 없었다.

본 연구의 결과를 자동차 고무 부품에 적용하는데 있어서, 기존의 응용역학적 방법에서 한 걸음 더 나아간 힘과 변위와의 직접 관계식을 사용함으로써, 이러한 간단한 부싱모델은 자동차 현가장치에 대한 다물체 동역학 모델을 완성하는데 유용하게 이용되리라 본다. 향후 연구에 있어서는, 스티렌-부타디엔 고무에 대한 리아니스 실험 결과 대신, 자동차에 사용되는 실제 부싱에 대하여 직접적인 실험을 수행함으로써, 실질적이고 광범위한 데이터를 바탕으로한 쫘킨-라저스 비선형 점탄성 부싱 모델을 완성하여, 이를 바탕으로 주파수와 변위의 영향에 대하여 지속적인 연구를 수행하고자 한다.

#### 감사의 글

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-003-D00009).

#### 참고 문헌

1. Ford Durability Center at The University of Michigan Project Review (1995).
2. A. S. Wineman, T. VanDyke, and S. Shi, "A Nonlinear Viscoelastic Model for One Dimensional Response of Elastomeric Bushings", *International Journal of Mechanical Sciences*, **40**, 1295 (1998).
3. L. Boltzmann, "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung", *Pogg. Ann. Physik*, **7**, 624 (1876).
4. C. W. McGuiert and G. Lianis, "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations", *Transactions of the Society of*

- Rheology*, **14:2**, 117 (1970).
5. S. Lee, "A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response", Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor (1997).
  6. B. D. Coleman and W. Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity", *Reviews of Modern Physics*, **2**, 239 (1961).
  7. A. C. Pipkin and T. G. Rogers, "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, **16**, 59 (1968).
  8. S. Lee, "A Study of Lianis Model for Elastomeric Bushing in Axial Mode", *Elastomer*, **37:3**, 151 (2002).
  9. J. E. Dennis, Jr., "Nonlinear Least Squares and Equations", *The State of the Art in Numerical Analysis*, p.269, Academic Press, New York, 1977.