

구속응력을 받는 콘크리트 구조물 해석을 위한 콘크리트 구성모델

권민호^{1)*} · 조창근²⁾

¹⁾ 경상대학교 토목공학과 공학연구원 ²⁾ 경북대학교 토목공학과 방재연구소

(2003년 2월 13일 원고접수, 2003년 5월 31일 심사완료)

A Concrete Model for Analysis of Concrete Structure with Confinement

Minho Kwon^{1)*} and Chang-Geun Cho¹⁾

¹⁾ Engineering Research Institute, Dept. of Civil Eng., Gyeongsang National University, Jinju, Gyeongnam, 660-701, Korea

¹⁾ Research Institute for Disaster Prevention, KyungPook National University, Daegu, 702-170, Korea

(Received February 13, 2003, Accepted May 31, 2003)

ABSTRACT

This paper presents a hypoplastic model for three-dimensional analysis of concrete structures under monotonic, cyclic, proportional and non-proportional loading. The constitutive model is based on the concept of equivalent uniaxial strains that allows the assumed orthotropic model to be described via three equivalent uniaxial stress-strain curves. The characteristics of these curves are obtained from the ultimate strength surface in the principal stress space based on the Willam-Warnke curve. A cap model is added to consider loading along or near the hydrostatic axis. The equivalent uniaxial curve is based on the Popovics and Saenz models. The post-peak behavior is adjusted to account for the effects of confinement and to describe the change in response from brittle to ductile as the lateral confinement increases. Correlation studies with available experimental tests are presented to demonstrate the model performance. Tests with monotonic loading on specimens under constant lateral confinement are considered first, followed by biaxial and triaxial tests with cyclic loads. The triaxial test example considers non-proportional loading.

Keywords : constitutive model, finite element analysis, concrete, hypoplastic model, orthotropic model, equivalent uniaxial strain

1. 서 론

콘크리트는 비균질의 비등방성재료로서 작은 응력에서도 비선형 거동을 보이며 인장과 압축응력에서 다른 거동을 나타낸다. 압축에서는 최대압축 응력까지 경화의 거동을 보이며 구속응력에 따라서 최대 정점 응력이 바뀌는 것을 볼 수 있다¹⁾. 구속응력이 상대적으로 작을 때는 최대 정점 응력을 지남 거동이 연화 및 취성의 형태이지만 구속응력이 증가함에 따라서 콘크리트는 경화 및 연성의 거동형태로 바뀌게 되며^{1,2)} 인장응력 하에서는 균열발생과 더불어 콘크리트는 인장강도를 상실하게 된다.

삼축 압축상태에서 콘크리트의 거동을 살펴보기 위해서 여러 실험들이 수행되었으나³⁻⁸⁾, 이러한 실험들은 정점 응력을 전후로 하여 콘크리트 거동이 불안정하기 때문에 수행하기 힘들다. 더욱이 콘크리트가 횡방향 구속을 민감하

기 때문에 콘크리트 공시체의 거동은 주로 실험의 마지막 단계에서의 공시체의 구속상태 및 경계조건에 따라서 결정되는 양상을 보여준다. 이러한 어려움들은 변형 재하 실험방법을 도입하므로 부분적으로 해결되었다.

삼축 응력 상태의 콘크리트의 거동은 미소균열의 형성과 성장에 따라 결정이 되며⁸⁾, 미소균열의 발달이 콘크리트의 취성, 연성, 팽창현상(dilatancy)과 파괴형태를 결정하는 것으로 여러 실험을 통해서 밝혀졌다. 비교적 작은 구속응력이 작용하는 일축압축 실험에서는 수직으로 발달된 인장균열에 의해서 콘크리트가 파괴되며, 균열발생 후 급격한 강도의 손실을 보여준다. 다소 큰 구속을 받는 콘크리트는 균열과 손상이 단면에 넓게 분포가 되면서 콘크리트는 최대 압축 응력 후에 강성의 감소가 거의 없는 연성의 특징을 나타낸다.

이러한 콘크리트의 복잡한 거동으로 인하여 콘크리트 재료를 수치적으로 모델하는 것이 까다로우며, 삼차원 응력 상태에서의 콘크리트 모델링에 대한 폭넓은 노력 및 개발에도 불구하고 수치모델이 유한요소 프로그램으로 전

* Corresponding author

Tel : 055-751-5382 Fax : 055-751-5374

E-mail : kwonm@nongae.gsnu.ac.kr

산화가 시도된 모델의 수는 극히 제한적이다. 현재까지 개발된 모델은 아주 정교한 모델에서 간단한 모델까지 다양하게 개발되어왔다. 정교한 모델은 주로 소성흐름법칙과 소성 변형과 탄성변형의 분리에 근거를 둔 소성론에 의거해서 개발되었고, 간단한 모델은 주로 현상학적 모델을 근거로 개발되었다. 또한 이러한 모델들은 비선형 탄성론, 소성론, Endochronic 소성론, 미소면 이론, 손상 및 파괴 역학적 이론에 근거하여 개발되었다.

콘크리트와 철근 콘크리트 구조요소 및 부재의 3차원 유한요소해석에 적용 할 수 있는 콘크리트의 구성 모델은 역학적으로 정확해야 할 뿐 아니라 수치적으로 효과적이며 안정적이어야 한다. 그러므로 구성모델은 삼축 응력상태 하에서 단조 및 반복거동의 중요한 특성들을 예측할 수 있어야 하며 적절한 시간 내에 구조물의 해석을 수행할 수 있을 정도로 단순해야 한다. 이러한 조건들을 만족시키기 위해서 본 연구에서는 등가 일축 변형률 개념에 근거를 둔 3차원 구성모델(아소성 모델)을 선택하였다. 이 모델은 직교모델로써 직교축과 주응력 방향이 일치하는 것으로 가정하였으며 일축 변형률관계는 Popovics-Saenz 곡선을 사용하였고 정점 응력은 Willam과 Warnke의 파괴면을 이용하여 결정하였으며 구속력에 의한 정점이후의 거동 변화를 예측하기 위한 매개변수를 실험결과로부터 유도하여 적용하였다.

2. 3차원 콘크리트 모델

본 연구에서 제안된 3차원 구성방정식은 직교방향과 주응력 방향이 일치하는 것으로 가정하였지만 주변형률 방향과 주응력의 방향은 일치하지 않는 것으로 가정하였다. Darwin과 Pecknold⁹⁾ 그리고 Bashur과 Darwn¹⁰⁾에 의해 소개된 등가변형률 개념에 기초하였다. 직교축에 관해서 증분 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$d\sigma = C_o d\epsilon \quad (1)$$

여기서, $d\sigma$ 와 $d\epsilon$ 는 각각 응력과 변형률 증분값을 의미하고 C_o 는 재료행렬로 다음과 같다.

$$C_o = \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{22}+\nu_{12}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_3(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_3(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12}\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23}\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}\Omega \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, ν_{ij} 는 i 방향의 응력에 의해서 발생하는 j 방향의 변형률에 대한 횡방향 변형률 비이다($i, j = 1, 2, 3$).

$$\Omega = 1 - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

이고 E_i 는 직교방향중 i 방향으로의 재료계수이다($i = 1, 2, 3$). 그리고 G_{ij} 는 $i-j$ 평면에 대한 전단계수이다.

전단 계수 G_{ij} 는 임의의 참조 좌표계에 대한 변환에 대하여 불변한다는 가정에 의하여 Lekhnitskii¹¹⁾는 다음과 같이 정식화하였다.

$$G_{ij} = \frac{E_i E_j}{E_i(1+\nu_{ij}) + E_j(1+\nu_{ji})} \quad (3)$$

응력과 변형률의 증분은 재료의 직교축에 대하여 유도되었기 때문에 유한요소해석에 사용된 구조물의 좌표계에 적용하기 위하여 좌표변환이 이루어져야 한다. 그러므로 방향코사인으로 이루어진 회전 행렬 \mathbf{T} 에 의해서 다음과 같이 좌표변환을 하여야한다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_o \mathbf{T} \quad (4)$$

3. 등가일축 변형률

등가일축 변형률은 실제의 의미를 가지지 않는 가상의 변형률이며 3차원 구성관계를 세 개의 독립된 일축 구성관계로 변환시키는데 사용된다. Darwin과 Pecknold⁹⁾가 처음으로 이 개념을 소개하였는데, 등가일축 응력-변형률 곡선에서 주응력 σ_{pi} 에 대응하는 변형률로서 등가일축 변형률 ϵ_{ui} 가 사용되었다. 등가일축 응력-변형률 곡선을 정의하는 재료의 매개변수들은 하중의 상태에 따른 응력들로써 결정된다. 등가일축 변형률 ϵ_{ui} 는 일반적으로 다음과 같은 증분의 형태로 유도된다.

$$d\epsilon_{ui} = \frac{d\sigma_{pi}}{E_i} \quad (5)$$

여기서 $d\sigma_{pi}$ 는 주응력의 증분을 나타내고 E_i 는 재료의 계수이다. 식(5)의 증분관계를 총 증분에 관한 항으로 표현하면 E_i 는 할선계수가 되며 아주 미소한 증분의 형태로 표현하게 되면 E_i 는 접선계수가 된다. 본 연구에서는 할선계수를 이용하여 전산화하였다. 그러므로 증분 응력 $d\epsilon_{ui}$ 에 대한 총 등가일축 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon_{ui} = \int d\epsilon_{ui} \quad (6)$$

실제로는 미세 증분 $d\epsilon_{ui}$ 는 유한 증분 $\Delta\epsilon_{ui}$ 로 치환되며 이 경우 총 등가일축변형률은 $\epsilon_{ui} = \sum \Delta\epsilon_{ui}$ 가 된다. 여기서 주목해야 할 것은 등가일축변형률은 실제의 변형률처럼 변형될 수 없다는 것이다. 이것은 단지 현재의 주응력 방향에서의 가상 변형률을 나타내기 때문이다. 식(1)과 식(5)를 비교해보면 등가일축증분변형률($d\epsilon_{ui}$)은 현재의 직교축에서의 실제 변형률과 연결이 된다는 것을 알 수 있다^{12,13}. 식(1)은 다음과 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{EH} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

또는

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{E} \begin{Bmatrix} d\epsilon_{u1} \\ d\epsilon_{u2} \\ d\epsilon_{u3} \end{Bmatrix}$$

여기서

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} (1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Omega & (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})/\Omega & (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})/\Omega \\ (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/\Omega & (1 - \nu_{13}\nu_{31})/\Omega & (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})/\Omega \\ (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/\Omega & (\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21})/\Omega & (1 - \nu_{12}\nu_{21})/\Omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_{u1} \\ d\epsilon_{u2} \\ d\epsilon_{u3} \end{Bmatrix} = \mathbf{H} \begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix}$$

위의 등가일축 변형률의 정의는 주로 개념을 설명하기 위한 이론적 목적으로 사용되고, 일반적으로는 식(5)에 의거해서 계산한다.

4. 파괴면을 이용한 재료의 강도 및 변형률 결정

앞 절에서 논의한 것처럼 일축 응력-변형률 관계를 이용하여 현재 재료의 특성들을 결정한다. 특히 응력-변형률 곡선은 압축 강도 f_{ci} 와 그것에 부응하는 변형률 ϵ_{ci} 에 의해서 결정된다. 여기서 첨자 i 는 세 개의 주응력 방향을 각각 의미한다. f_{ci} 와 ϵ_{ci} 는 두개의 파괴면, 즉 응력 파괴면과 변형률 파괴면을 이용하여 주응력 공간과 등가일축 변형률 공간에 의해서 결정된다. 현재의 재료의 상태에 따른 최대 응력과 변형률을 결정하는 방법은 이 절 후반에서 다룰 것이다.

파괴면으로부터 주어진 주응력의 비($\sigma_{p1}/\sigma_{p2}/\sigma_{p3}$)를 이용하여 최대 응력(f_{c1}, f_{c2}, f_{c3})을 결정하게 된다. 본 연구에서는 Willam 과 Warnke의 4 매개변수 콘크리트

파괴면을 사용하였다¹⁴. 수정된 파괴면은 식(9)와 같이 Fig. 1에 도시하였다.

$$\tau_o^2 + A \left(\frac{\tau_o}{\sqrt{2}} r(e, \phi) + \sigma_o \right) + B = 0 \quad (9)$$

여기서 $r(e, \phi)$ 는 Menetrey와 Willam¹⁵에 의해서 정의된 파괴면의 극반지름이다.

$$r(e, \phi) = \frac{a\eta^2 + b^2}{a\eta + b\sqrt{a(\eta^2 - 1) + b^2}} \quad (10)$$

$$\text{여기서 } A = \frac{f_c^2 - f_t^2}{9f_c} (2 + \alpha); \quad B = -\frac{2f_c f_t}{9}$$

이다. 그리고 $\alpha = f_t/f_c$ 로 표현되고 f_c 와 f_t 는 콘크리트의 일축압축 및 인장강도이다.

$$a = 1 - e^2, \quad b = 2e - 1, \quad \eta = 2 \cos(\phi)$$

$\phi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \right]$ 이며, ϕ 는 Lode각으로서 J_2 와 J_3 로 이루어진 평면에서의 편차응력면(deviatoric plane)에서의 응력점의 방향을 나타낸다. J_2 와 J_3 는 편차 응력 텐서(deviatoric stress tensor)의 2차 및 3차 불변량을 나타내며 e 는 파괴면의 편차응력면의 곡률도를 나타내는 편심이고 다음과 같이 α 의 함수로 결정하였다¹⁵.

$$e = \frac{2 + \alpha}{4 - \alpha} \quad (11)$$

식(11)에서 극반지름은 중수압 응력(hydrostatic stress)이 일정할 때 편차응력면에서 파괴면의 형태를 정의한다. 파괴면이 예리한 부분을 가지게 되면 그 부분에서 수치적인 문제가 발생하기 때문에 편심을 $0.5 \leq e \leq 1.0$ 에 두

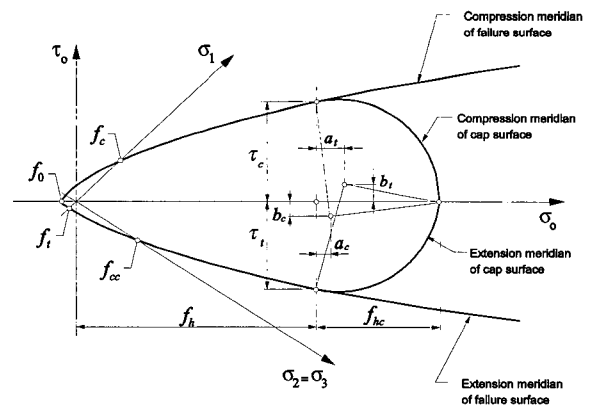


Fig. 1 Concrete ultimate surface with cap model in the Rendulic plane

어서 부드러운 형태의 곡면으로 결정되도록 한다.

재료의 변형률 경화 현상(strain hardening)을 고려하기 위하여 삼축압축 상태에서 무한히 열려 있는 파괴면을 식(12)에 유도된 캡에 의해서 제한하여 중수압 응력 축을 따라 발생하는 하중의 비선형 효과를 예측할 수 있게 하였다.

$$\tau(\sigma_o, \phi) = \tau_c \frac{1}{r(e, \phi)} \quad (12)$$

여기서 $r(e, \phi)$ 는 식(10)에서 편심 $e = \tau_t / \tau_c$ 로 바꾸었을 때의 극반지름이다. 매개변수 τ_t 와 τ_c 는 캡면과 압축 자오면(compressive meridian, $\phi = 60^\circ$) 및 인장 자오면(extension meridian, $\phi = 0^\circ$) 과의 교차점을 나타낸다. 이 캡은 중수압 응력과 다음 두개의 2차 방정식에 의해서 결정된다.

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= \frac{1}{2} \left\{ [(\tau_c^c + b_c)^2 + a_c^2 - [\sigma_o + (f_h + a_c)]^2] - b_c \right\} \\ \tau_t &= \frac{1}{2} \left\{ [(\tau_t^c + b_t)^2 + a_t^2 - [\sigma_o + (f_h + a_t)]^2] - b_t \right\} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

여기서 $b_c = \frac{f_{hc}^2 - 2\tau_c^c f_{hc} k_c - \tau_c^c}{2(f_{hc} k_c + \tau_c^c)}$,

$a_c = (\tau_c^c + b_c)k_c$, 그리고 f_h 은 캡면이 파괴면과 만나는 점에서의 중수압 응력이며, f_{hc} 는 Fig. 1에서 정의된 매개변수이다. 그리고 τ_c^c 와 τ_t^c 는 캡면이 압축 및 인장 자오면과 만나는 점의 팔면체 응력(octahedral stress)이고, k_c 와 k_t 는 캡면과 압축 및 인장 자오면이 만나는 점에서의 파괴면의 경사이다. 식(13)에 나타나는 매개변수들과 캡면의 압축 및 인장 자오면을 Fig. 1에 나타내었다.

현재 하중상태에서의 주응력 방향의 콘크리트 강도인 f_{c1} , f_{c2} , 와 f_{c3} 은 식(9)의 파괴면에 의해서 다음과 같은 방법으로 결정된다. Fig. 2 (a)에 나타난 것과 같이 만약 주응력 좌표계에서 콘크리트의 현재 응력상태가 하중단계 중에서 $M_c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 에 있다고 하면, 주응력 좌표계의 초기 좌표점 (0, 0, 0)에서 현재 응력상태의 응력점을 연결한 직선이 파괴면과 만나는 응력점 $M_r(f_{c1}, f_{c2}, f_{c3})$ 을 현 하중상태의 콘크리트의 강도로 정의한다. 이것과 비슷하게 등가일축변형률 공간에서 현재의 등가일축변형률 ϵ_{u1} , ϵ_{u2} , ϵ_{u3} 을 이용하여 ϵ_{c1} , ϵ_{c2} , ϵ_{c3} 를 결정한다.

5. 일축 응력-변형률 곡선

지금까지 개발된 등가일축변형률 개념에 기초한 콘크리트 구성방정식은 Saenz¹⁶⁾에 의해 제안된 콘크리트의 압

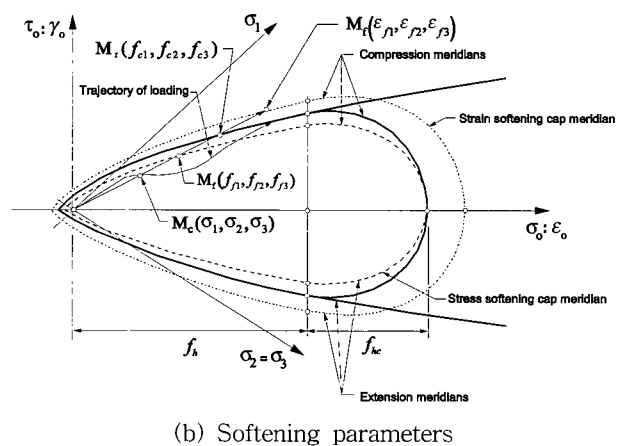
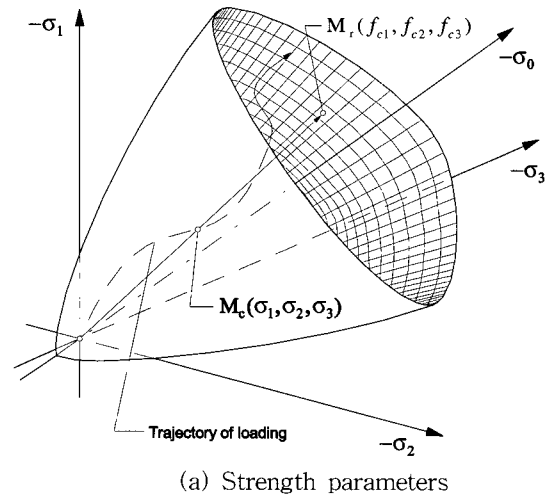


Fig. 2 Definition of current material strength and softening parameters

축거동을 예측하는 일축 구성방정식을 사용하였다. Saenz의 모델은 한 개의 방정식으로 콘크리트의 경화 및 연화 거동을 묘사할 수 있어서 매우 유용한 구성방정식이며 초기 탄성계수 E_o 와 최대 압축력에서의 응력과 변형률 (f_c, ϵ_c), 연화 구간에서의 한 점 (ϵ_f, f_f)에 의해서 식(14)와 같이 표현된다.

$$\sigma = f_c \frac{K \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)}{1 + A \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right) + B \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^2 + C \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^3} \quad (14)$$

여기서 $K = E_o \frac{\epsilon_c}{f_c}$, $K_\epsilon = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_c}$, $K_\sigma = \frac{f_c}{f_f}$, .

$A = C + K - 2$, $B = 1 - 2C$, $C = K \frac{(K_\sigma - 1)}{(K_\epsilon - 1)^2} - \frac{1}{K_\epsilon}$ 이다.

그러나 식(14)는 탄성계수의 비가 $E_o/E_c \geq 2$ 일 때만 적용할 수 있다(여기서 $E_c = f_c/\epsilon_c$). 즉 최대 압축응력 점에서의 할선계수가 초기 탄성계수 E_o 의 1/2보다 적을

때 사용가능하다. 만약 $E_o/E_c < 2$ 일 때 Saenz¹⁶⁾의 모델을 사용하면 원점과 최대응력점 사이의 곡선은 두개의 변곡점을 가지게 되며, 이로 인하여 하중 초기의 탄성구간을 제대로 예측할 수 없게 된다. 그러므로 이런 문제를 해결하기 위하여 Bouzaiene(1997) 등¹⁷⁾은 E_o/E_c 의 최대값을 2로 고정시켰다. 본 연구에서는 두개의 서로 다른 일축압축 모델을 합성하여 콘크리트의 일축압축거동을 예측하도록 하였다. Popovics¹⁸⁾에 의해서 개발된 모델을 이용하여 최대압축 응력 발생전 구간에 사용하도록 하고 Saenz의 모델은 최대압축 응력 발생후 구간에 사용하도록 하여 기존의 Saenz 모델이 가지는 장점을 살리고 단점을 제거하였다. Popovics의 모델은 다음 식과 같다.

$$\sigma = f_c \frac{K \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)}{1 + (K-1) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^r} \quad (15)$$

여기서 지수 $r = K/(K-1)$ 이다.

식(14)와 식(15)는 일축압축에서의 재료의 거동을 예측하는데 사용되며 이 식에서 초기 탄성계수와 최대 압축응력점을 일축인장강도(f_i)와 그것에 대응하는 변형률(ϵ_i)로 치환하여 일축인장거동을 예측하도록 정식화 하였다. Fig. 3은 제안된 일축 구성관계에 의해서 예측된 콘크리트의 인장 및 압축 거동 곡선을 보여준다.

일축 구성관계는 세 개의 주응력과 등가변형률 관계에서 사용되며, 최대 정점 (ϵ_{ci} , f_{ci})는 앞 절에서 논의한 방법과 같이 현재의 하중상태의 주응력과 등가변형률에 의해서 결정된다. 정점을 지난 후의 부분은 (ϵ_{ii} , f_{ii})에 의해서 결정되는데 이 응력점을 결정하는 것은 여러 가지 실험적인 특수성 때문에 많은 어려움이 따른다^{7,413)}. 그러나 본 연구에서는 이 부분이 횡방향 구속에 따라서 그 거

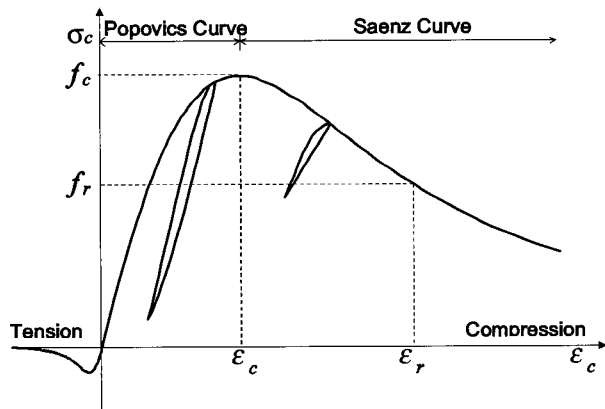


Fig. 3 Monotonic uniaxial strain curve in tension and compression

동이 연화에서 경화로 변화하기 때문에 이 응력점을 횡방향 구속력의 함수로 가정하였고 이에 따라 콜로라도 주립대학(University of Colorado, Boulder)에서 수행한 실험결과를 바탕으로 하여 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$\epsilon_r = 4\epsilon_c, \quad f_r = \frac{f_c f'_c}{5f_c - f_{ci}} \leq 1.4 \quad (16)$$

그러므로 식(16)을 사용하여 횡방향 구속력이 증가할 때 콘크리트가 취성에서 연성으로 변하는 것을 모델하도록 하였다.

6. 포아송 비

식(2)에서 횡방향 변형률비, ν_{ij} 는 콘크리트 구성방정식에서 구속효과를 일차적으로 발생시키므로 중요한 요소이다. 일반적으로 콘크리트의 포아송비는 0.15에서 0.22 사이의 값으로 가정되어 사용되었다¹⁹⁾. 그러나 여러 실험에 의해서 알려진 바와 같이 대략 콘크리트의 일축압축강도 f'_c 의 80% 미만의 일축응력 하에서 일정한 값을 가지고 일축 압축 강도에 가까이 접근할수록 포아송비는 증가하고 심지어 0.5보다 크게 측정될 때도 있다. 이러한 팽창현상은 최대 압축응력점을 전후해서 발생하는 불안정한 균열 때문에 발생한다. 본 연구의 구성관계에는 식(17)을 횡방향 변형률을 결정하기 위하여 사용하였다.

$$\nu_{ij} = \sqrt{\nu_{ui} \nu_{uj} \frac{E_i}{E_j}} \quad (17)$$

여기서 ν_{ui} 는 i방향의 일축 횡변위 비를 나타낸다. 식(17)을 구성방정식(2)에 대입하면 C_o 는 대칭행렬로 유도된다. ν_{ui} 는 Balan 등¹²⁾에 의해 제안된 식을 수정하여 다음과 같이 결정하였다.

$$\nu_{ui} = \nu_o \left[1 + \frac{1}{K_v} \left\{ A_i \left(\frac{\epsilon_{ui}}{\epsilon_{ci}} \right) + B_i \left(\frac{\epsilon_{ui}}{\epsilon_{ci}} \right)^2 + C_i \left(\frac{\epsilon_{ui}}{\epsilon_{ci}} \right)^3 \right\} \right] \quad (18)$$

여기서 ν_o 는 초기 포아송비이고 A_i , B_i , C_i 는 식(14)에서 사용된 것과 동일한 매개변수이며 이때 K_i 와 K_v 는 다음과 같다.

$$K_i = 1/2 \nu_o, \quad K_v = \frac{E_o \epsilon_{ci}}{2f_{ci}}$$

식(18)은 Elwi 와 Murray¹³⁾의 제안식과 비슷하게 3차 방정식의 형태이다. K_v 는 식(2)에서 Ω 가 영에 가까운 값이 되거나 음수가 되지 않기 위하여 도입한 매개변수이다.

즉 Ω 가 영과 같은 때는 비압축성 재료의 경우를 의미하며, 구성방정식을 유한요소로 전산화할 경우 심각한 수치적 문제를 유발시키는 경우가 된다.

7. 반복하중에 대한 거동

제안된 구성방정식이 임의의 반복하중의 거동을 묘사하기 위하여 다음과 같은 하중의 재하 및 제거(load and unloading)를 결정하기 위한 하중 조건식이 필요하며, 본 연구에서는 Balan 등¹²⁾이 제안한 식(19)의 하중 조건식을 사용하였다.

$$f = \sqrt{\frac{\epsilon_{u1}^2 + \epsilon_{u2}^2 + \epsilon_{u3}^2}{\epsilon_{c1}^2 + \epsilon_{c2}^2 + \epsilon_{c3}^2}} \quad (19)$$

여기서 ϵ_{ui} 는 등가일축변형률이며, ϵ_{ci} 는 압축강도에 대응하는 변형률이다. 만약 f_{max} 가 현재의 하중단계에서 하중 조건식의 최대값이라면 다음과 같이 하중의 재하 및 제거를 판단할 수 있다.

$$\begin{aligned} f > f_{max} & \quad \text{하중재하} \\ f \leq f_{max} & \quad \text{하중제거} \end{aligned}$$

8. 3차원 구성방정식의 거동

개발된 모델을 유한요소 프로그램인 FEAP¹⁹⁾에 재료 모델로서 전산화 되었고 고체요소에 적용하여 응력 및 변형률 그리고 혼합 하중재하(stress, strain and mixed control)에 대하여 유한요소 해석을 수행 할 수 있도록 하였다. 구성관계의 주응력 축은 하중단계에 따라서 고정되지 않았고 주변형률 축과 일치하지 않도록 하였다. 그러므로 개발된 모델은 비례하중(proportional loading)에서 뿐만 아니라, 비례하지 않는 하중(non-proportional loading)에서도 콘크리트 거동을 묘사할 수 있도록 하였다.

몇몇 논문들은 직교모델이 불변치의 값들이 변한다고 주장하였다. 즉, 같은 하중 이력에서 서로 다른 참조 좌표를 사용하여 계산하면 결과가 달라진다고 주장하였다. 특히 Bazant²⁰⁾는 이러한 문제를 예제를 통하여 길게 다루고 있는데 이러한 문제는 주응력 축과 주변형률 축을 일치시키면 피할 수 있다고 주장하였다. 그러나 그러한 경우에는 비례하지 않는 하중에 대한 콘크리트 거동을 묘사하기 불가능하므로 본 연구에서는 주응력 축과 주변형률 축을 일치시키지 않았다. Bazant²⁰⁾의 예제를 포함한 여러 예제를 통하여 검증한 결과 본 연구에서 개발된 모델은 이러한 문제를 포함하지 않는 것으로 조사되었다. 이는 본 모델의 전산화의 특성에 따른 결과로 판단된다. Bazant²⁰⁾ 등

은 그의 논문에서 미세증분을 사용하여 접선강성에 의해 결과를 도출하였으나 본 연구에서는 전체 할선법으로 결과를 계산하였기 때문에 그러한 문제를 피할 수 있었다. 그러므로 본 모델은 참조축의 선택에 관계없이 주어진 하중에 대하여 일정한 주응력의 불변치 값을 보여주었다.

9. 모델 검증

콘크리트의 구성모델을 검증하기 위하여 해석결과와 삼축압축을 받는 콘크리트 공시체의 실험결과와 비교하였다. 해석결과는 유한요소 해석 프로그램인 FEAP²¹⁾을 이용하여 8개의 절점을 가지는 고체 요소를 이용하여 해석하였다. 먼저 일정한 구속응력을 받는 일축압축실험결과들과 비교하였다. 이 실험들은 콜로라도 대학(Boulder)¹⁾에서 수행되었고 이는 콘크리트의 취성-연화 거동이 구속응력이 증가함에 따라 연성-경화 거동으로 변하는 것을 보여준다. Fig. 4에서와 같이 실험과 해석결과를 수직 하중 방향에 대하여 그래프로 나타내었다. Fig 4에서 σ_{tr} 는 횡방향의 구속응력이다. 해석에 사용된 구속받지 않은 콘크리트의 재료특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_c &= 5.0 \text{ ksi}, \quad f_t = 0.5 \text{ ksi}, \quad E_o = 2,400 \text{ ksi}, \\ \nu_o &= 0.2, \quad \epsilon_c = 0.004, \quad \epsilon_t = 0.0002 \end{aligned}$$

앞에서 언급한 취성에서 연성으로 변하는 현상이 실험과 해석결과에서 동일하게 나타나고 있다. Smith 등¹⁾이 수행한 실험결과와 유사한 결과를 얻기 위해서 구성관계에서 캡모델과 최대 압축응력점 이후의 거동을 결정하는 때 개변수를 포함하였다. 횡방향의 구속응력이 증가할수록 중은 중수압축을 따라서 작용하게 되며, 이에 따라 최대응력 값은 파괴면의 캡면에 의해서 결정된다. 최대 압축

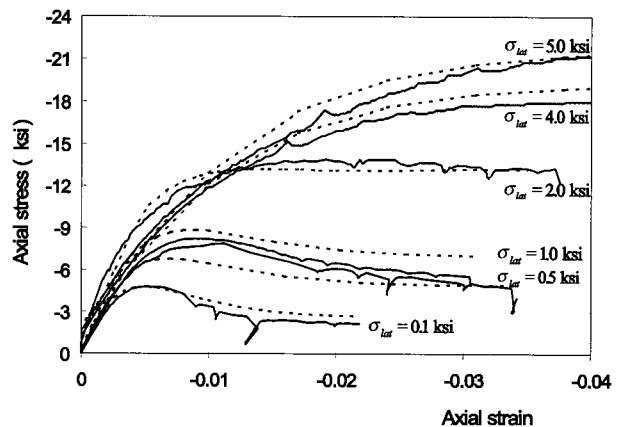


Fig. 4 Monotonic confined compression tests by Smith et al.¹⁾

응력점 이후의 거동은 Fig. 3에서와 같이 ϵ_r , f_r 에 의해서 결정되는데 이 값들은 식(16)에 의하여 결정하였다.

Hurlbut³⁾는 Smith 등¹⁾의 실험을 발전시켜서 구속응력을 받는 콘크리트 공시체의 반복하중 하에서의 거동에 대하여 연구하였다. 해석결과는 Fig. 5에서와 같이 서로 다른 세 개의 실험결과들과 비교하였다. 이 세 개의 실험은 횡 구속응력이 각각 $\sigma_{lat}=0, 1, 10$ ksi일 때 수행되었고 실험에 사용된 구속받지 않는 콘크리트의 계수들은 다음과 같다.

$$f_c = 2.77 \text{ ksi}, f_t = 0.28 \text{ ksi}, E_o = 2,400 \text{ ksi},$$

$$\nu_o = 0.2, \epsilon_c = 0.00235, \epsilon_t = 0.00014$$

해석결과는 실험결과와 잘 일치하고 있고 개발된 모델이 최대 압축응력점 이후의 구간에서 구속응력에 의한 거동 변화를 잘 예측하고 있다. 사용된 하중 재하 및 하중 제거를 판단하는 하중 조건식 또한 적절한 결과를 보여주고 있다.

Fig. 6은 van Mier⁷⁾에 의해서 수행된 이축압축실험이며, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1/\sigma_2 = 10$ 의 이축 비례하중을 재하하였다. 해석에 사용된 구속받지 않는 콘크리트의 상수들은 다음과 같다.

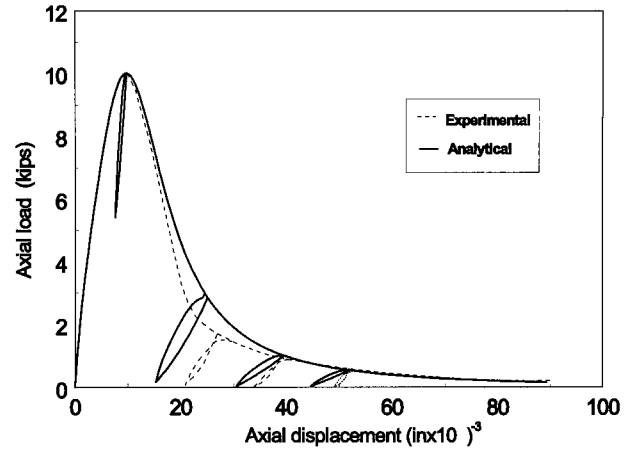
$$f_c = 7.2 \text{ ksi}, f_t = 0.5 \text{ ksi}, E_o = 3,700 \text{ ksi},$$

$$\nu_o = 0.2, \epsilon_c = 0.0034, \epsilon_t = 0.0002$$

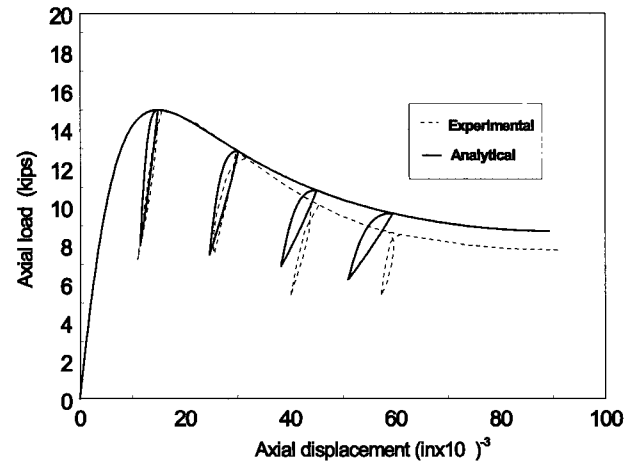
실험결과와 해석결과가 하중 방향 ϵ_1, σ_1 에서 서로 잘 일치하고 있으며 구속되지 않은 방향 3에서 약간의 불일치를 보여주고 있다. 수치적인 문제를 피하기 위하여 해석상에서는 포아송비를 제한하였지만 실제 실험에서 관측된 포아송비는 발생된 큰 균열로 인하여 1을 넘는 값이 측정되었다. 게다가 실험결과가 방향 3에서 최초하중단계에서 약간의 수축을 나타내다가 급속히 팽창하고 있어 해석모델에 의해서 예측할 수 없는 실험상의 측정오차 또는 경계조건의 문제가 발생한 것으로 사료된다.

마지막으로 비례하지 않는 삼축압축하중을 받는 실험결과와 비교하였다. 이러한 실험과의 비교는 대부분의 콘크리트의 응력-변형 해석이 비례하지 않는 하중을 받기 때문에 구성방정식의 특성을 검증하는데 있어서 매우 중요하다. 실험은 콜로라도 대학(Boulder)에서 Sacvuzzo 등⁶⁾에 의해서 수행된 실험 결과와 비교하였다.

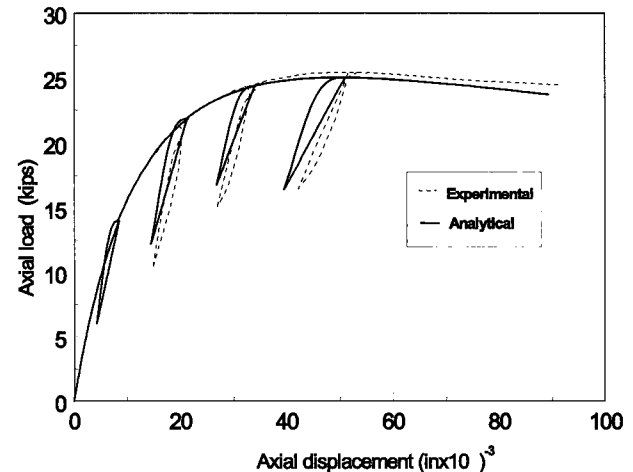
해석에 사용된 구속받지 않는 콘크리트의 상수들은 다음과 같다.



(a) Load-displacement response for compression without confining pressure



(b) Load-displacement response for compression with 100 psi confining pressure



(c) Load-displacement response for compression with 1000 psi confining stress

Fig. 5 Cyclic confined compression tests by Hurlbut³⁾

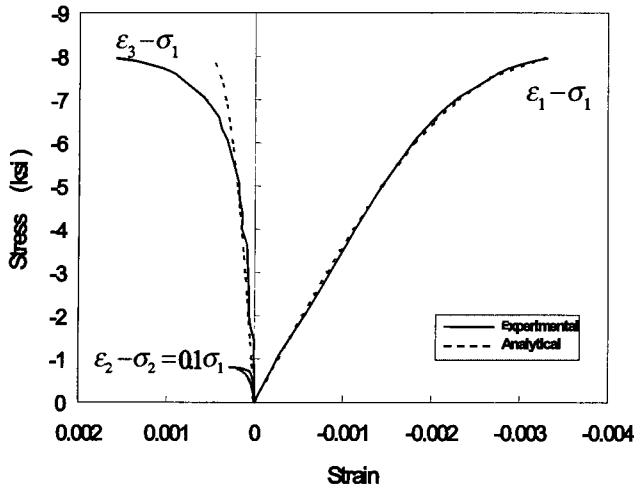
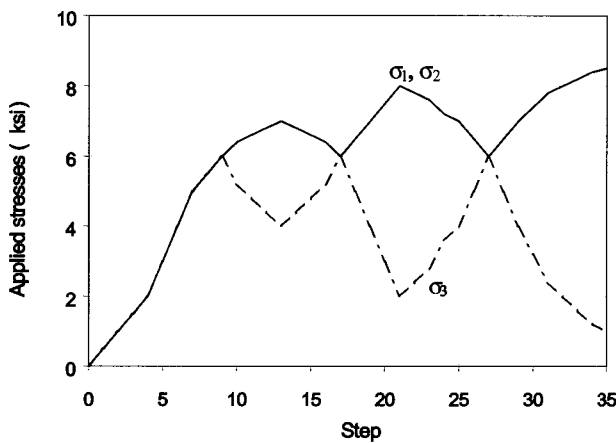


Fig. 6 Biaxial tests by van Mier⁷⁾

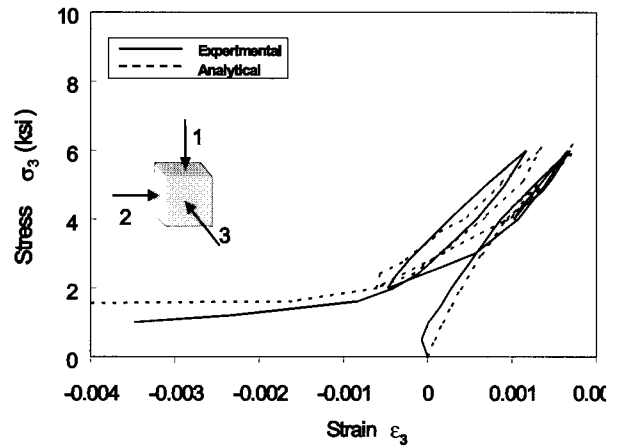
$$f_c = 3.5 \text{ ksi}, f_t = 0.3 \text{ ksi}, E_o = 3,500 \text{ ksi},$$

$$\nu_o = 0.2, \epsilon_c = 0.00215, \epsilon_t = 0.0002$$

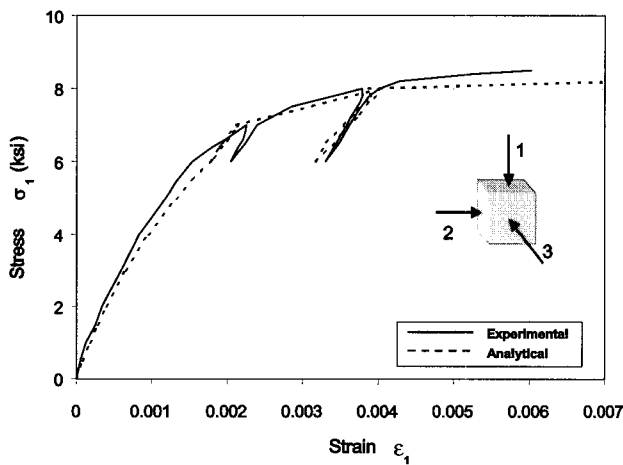
Fig. 7(a)에서와 같이 하중은 주응력 방향에서 재하하였다. 초기단계에서는 중수압 축을 따라서 중수압 응력(σ_o)이 -6 ksi 될 때 까지 재하하였고 그런 후 중수압 응력이 -6 ksi인 편차응력면에서 반복하중형태로 재하하였다. Fig. 7 (b)-(d)에서는 실험결과와 해석결과를 비교하였다. 다소 복잡한 하중이력을 가지는 경우이지만 실험결과와 해석결과가 매우 일치하고 있음을 보여주고 있다. 해석결과는 응력 하중재하에 따라서 얻어졌고 그 때문에 실험결과는 완전 소성 거동을 보여주고 있는데 이부분에서의 해석결과는 아주 작은 응력변화에도 수치적으로 민감한 결과를 주었다.



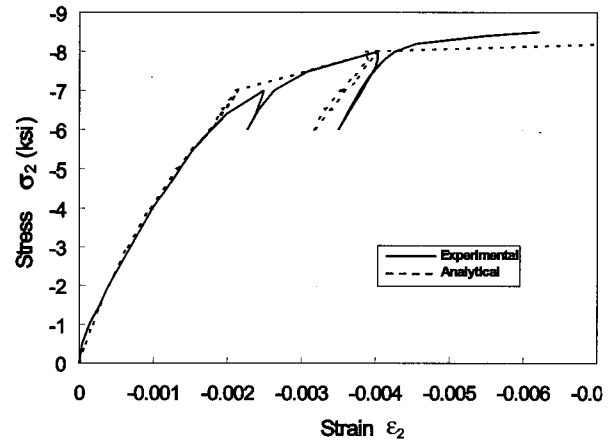
(a) Applied stress histories



(b) Response in direction 3



(c) Response in direction 1



(d) Response in direction 2

Fig. 7 Cyclic triaxial compression test by Scavuzzo et al.⁸⁾

10. 결 론

본 연구에서는 반복하중과 비례하지 않는 하중을 받는 콘크리트 구조물의 해석을 위한 비선형 콘크리트의 3차 원재료 모델을 정식화하였다. 제안된 모델은 직교축이 주응력 축과 평행하는 것으로 가정하고 반면에 주응력 축은 주변형을 축과는 평행하지 않는 것으로 가정하여 개발된 아소성 직교모델이다.

또한 Drawin과 Pecknold에 의해서 처음 제안된 등가 일축 변형률개념을 사용하여 삼축 압축 거동을 독립된 세 개의 일축 압축 거동으로 변환하였고 일축관계를 묘사하기 위하여 기존의 Saenz식이 가지는 단점을 보완한 Popovics-Saenz식을 제안하였다. 재료의 응력 조합에 따른 최대 정점을 예측하기 위하여 주응력 및 주변형을 파괴면을 사용하였고 중수압축을 따라 발생하는 하중에 대한 콘크리트 거동을 예측하기 위하여 Willam과 Warnke의 4개 매개변수 파괴면에 캡면을 도입하였다. 제안된 모델은 단조하중 뿐 아니라 반복하중 그리고 비례하중 및 비례하지 않는 하중에 대해서도 콘크리트의 거동을 예측할 수 있으며 압축부의 최대정점 이후 거동과 인장 균열 부분이 포함되어 있으며 또한 구속 응력의 증가에 따른 취성에서 연성으로 변하는 부분을 예측할 수 있도록 개발되었다. 개발된 모델은 유한요소 프로그램인 FEAP에 구성관계 모델로 전산화 하였다.

여러 실험결과와의 비교를 통하여 제안된 모델의 예측 성능을 검증하였다. 그 결과 모델은 단조 하중, 반복하중, 비례하중 및 비례하지 않는 하중 하에서 실험결과에 근접하는 예측결과를 보여주었다. 모델을 단순화함으로써 철근 콘크리트 구조물의 부재 해석에서 효율적인 해석이 이루어지도록 하였다.

단위환산

$$1 \text{ ksi} = 70 \text{ kgf/cm}^2$$

감사의 글

본 연구에 아낌없는 지원을 해주신 콜로라도 대학의 E. Spacone 교수와 실험데이터를 제공해 주신 K. Gerstle 과 K.J Willam 교수께 감사사를 드립니다.

참고문헌

1. S.S. Smith, K.J., Willam, K.H., Gerstle S., and Sture, "Concrete over the top, or: is there life after peak," *ACI Journal*, 86(5), 1989, pp.491-497.
2. H.D. Kang, E. Spacone, and K.J. Willam, "A study of compressive failure in over-reinforced concrete beams," FRAMCOS-3, Gifu, Japan, October 12-16, 2, 1998, pp.1195-1210.
3. B.J. Hurlbut, "Experimental and computational investigation of strain softening in concrete," Report AFOSR 80-0273 submitted to the US Air Force Office of Scientific Research, University of Colorado, Boulder, 1985.
4. D.C. Jansen, S.P. Shah, and E.C. Rossow, "Stress-strain results of concrete from circumferential strain feedback control testing," *ACI structural Journal*, 92(6), 1995, pp.419-428.
5. H.B. Kupfer, H.K. Hilsdorf and H. Rusch, "Behavior of concrete under biaxial stresses," *ACI Journal*, 66(8), 1969, pp.656-666.
6. R. Scavuzzo, T. Stancowski, K. Gerstle, and H.-Y. Ko, "Stress-strain curves for concrete under multiaxial load histories," NSF CME 80-01508, Dept. of CEAE, University of Colorado, Boulder, 1983.
7. J.G.M. van Mier, "Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions," PhD thesis, Eindhoven Univ. of Technology, Eindhoven, the Netherlands, 1984.
8. K.J. Willam, K.J., B. Hurlbut, and S. Sture, "Experimental and constitutive aspects of concrete failure," Finite element analysis of reinforced concrete structures, Meyer and Okamura, eds, ASCE, New York, N.Y., 1986.
9. D. Darwin and D.A. Pecknold, "Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete," *Journal Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol.103, No.2, 1977, pp.229-241.
10. F.K. Bashur and D. Darwin, "Nonlinear biaxial law for concrete," *Journal Struct. Div., ASCE*, Vol.104, No.1, 1978, pp.157-170.
11. S.G. Lekhnitskii, Theory of elasticity of an anisotropic elastic body," *Julius Journal Brandstatter ed.*, Holden Day, Inc., San Francisco, CA, 1963.
12. T.A. Balan, F.C. Filippou, and E.P. Popov, "Constitutive model for 3D cyclic analysis of concrete structures," *Journal Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol.123, No.2, 1997, pp.143-153.
13. A.A. Elwi and D.W. Murray, "A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship," *Journal Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol.105, No.4, 1979, pp.623-641.
14. K.J. Willam and E.P. Warnke, "Constitutive model for the triaxial behavior of concrete," *Int. Association for Bridge and Struct. Engrg. Proc.*, 19, 1975, pp.1-30.
15. Ph. Menetrey and K.J. Willam, "Triaxial failure criterion for concrete and its generalization," *ACI Structural Journal*, Vol.92, No.3, 1995, pp.311-318.

16. I.P. Saenz, "Discussion of 'Equation for the stress-strain curve of concrete, by P. Desay and S. Krishan," *ACI Journal*, Vol.61, No.9, 1964, pp.1229-1235.
17. A. Bouzaiene and B. Massicotte, "Hypoelastic tridimensional model for nonproportional loading of plain concrete," *Journal Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol.123, No.11, 1997, pp.1111-1120.
18. S. Popovics "Numerical approach to the complete stress-strain relation for concrete," *Cement and Concrete Res.*, Vol.3, No.5, 1973, pp.583-599.
19. W.F. Chen, "*Plasticity in reinforced concrete*," McGraw-Hill, New York, N.Y., 1982.
20. Z.P. Bazant, "Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials," *Journal Engrg. Mech. Div., ASCE*, Vol.109, No.3, 1983, pp.849-865.
21. R.L. Taylor, *FEAP User Manual v7.1*, University of California, Berkeley, Department of Civil and Environmental Engineering, 1999.
22. D. Kolymbas, "An outline of hypoplasticity," *Arch. Appl. Mech.*, 61, pp.143-151, 1991.

요 약

본 연구에서는 단조하중, 반복하중, 비례하중, 비례하지 않는 하중을 받는 콘크리트 구조물의 3차원 유한요소해석을 위한 비선형 아소성 콘크리트 모델을 개발하였다. 이 구성모델은 등가일축변형률 개념을 기초로 하여 3차원 구성관계를 세 개의 서로 독립된 등가일축 구성관계로 바꾸고 이들 통하여 콘크리트의 거동을 예측하도록 모델되었다. 일축 구성관계는 Willam-Warnke의 파괴면을 이용하여 주응력공간에서 구해진 최대 압축응력으로부터 결정되었다. 특히 중수압축을 따라 재하되는 하중에 대한 콘크리트의 비선형 특성을 예측하기 위하여 파괴면에 썸면을 도입하였다. 일축 구성관계는 Popovics와 Saenz의 모델을 근거로 하여 구속응력이 증가함에 따라 취성에서 연성으로 변화하는 현상을 묘사할 수 있도록 새롭게 유도하였다. 개발된 모델의 성능을 평가하기 위하여 여러 실험결과와의 비교를 시도하였다. 먼저 일정한 구속응력과 단조하중을 받는 실험결과와 비교하였고, 이축압축실험과 비례하지 않는 하중과 반복하중을 받는 삼축압축 실험결과와 비교하였다.

핵심용어 : 구성관계, 유한요소해석, 콘크리트, 아소성모델, 직교모델, 등가일축변형률