

고차 스펙트럴/경계적분법에 의한 수중익과 자유표면의 비선형 상호작용 계산*

김용직[†] · 하영록

부경대학교

Calculation of Nonlinear Interactions between Hydrofoil and Free-Surface by the High-Order Spectral/Boundary-Integral Method*

Yong Jig Kim[†] and Young Rok Ha
Pukyong National University

Abstract

Under the assumption of potential flow, free-surface flow around a hydrofoil is calculated by the high-order spectral/boundary-integral method. This method is one of the most efficient numerical methods by which the nonlinear interactions between hydrofoil and free-surface can be simulated in time-domain. In this method, the wave potential which represents the nonlinear evolution of free-surface is solved by the high-order spectral method and the body potential which provides the effects of hydrofoil and shed vortex is solved by the boundary-integral method. The calculated free-surface profiles which are generated by a uniformly translating hydrofoil are compared with other experimental results. And they show relatively good agreements each other. As another example, free-surface flow generated by a heaving and translating hydrofoil is calculated and discussed.

Key words : Hydrofoil(수중익), Free-surface(자유표면), Potential Flow(포텐셜유동), Numerical Calculation(수치계산), High-Order Spectral/Boundary-Integral Method(고차 스펙트럴/경계적분법)

서론

수중익은 트롤어선의 전개판이나 어선의 타와 같이 양력을 발생시킬 수 있는 기구이며, 이 수중익이 수면에 가까운 위치에서 작동할 때의 문제는 물체(수중익) 외부의 자유표면 유동해석을 필요로 한다. 또한, 양력문제와 수면파문제는 유체 점성의 영향이 작다고 알려져 있어¹⁾, 이 문제들은 통상 비점성 비압축성 유체가 비회전 운동을 한다는 가정하에 포텐셜 유동의 문제로 다루어진다.

물체 내부의 자유표면 유동에 비해 물체 외부의 자유표면 유동은 상대적으로 넓은 계산영역을 필요로 한다. 이들 외부 자유표면 유동을 전산기를 이용하여 계산하는데 있어, 큰 어려움들 중의 하나가 이에 소요되는 과중한 계산시간과 이로 인해 초래되는 문제들이다. 따라서 보다 효율적이고 우수한 새로운 수치해법의 개발은 매우 중요한 과제라고 할 수 있다. 김과형²⁾은 자유표면 유동을 다루는데 극히 효율적인 고차 스펙트럴법을 경계적분법과 결합하여 자유표면 유동을 시간영역에서 다룬 바 있다.

* 본 논문은 2000년 부경대학교 학술연구재단의 학술연구비에 의하여 지원되었음.

[†] Corresponding author : yjkim@pknu.ac.kr

본 논문에서는 수중익주위 자유표면 유동을 시물레이션 할 수 있는 고차 스펙트럴/경계적분법의 수치계산 기법을 설명하고, 적용예로서 균속전진하는 수중익에 의한 발생파형 계산결과를 Duncan³⁾의 실험결과와 비교하였다. 또, 보다 일반적인 적용예로서 전진하며 상하동요(heave)하는 수중익주위 자유표면 유동을 시간영역에서 시물레이션하고 그 결과를 고찰하였다.

시간영역 경계치 문제의 정식화

유체는 비점성, 비압축성이고 유체의 운동은 비회전성이라고 가정하며 표면장력은 무시한다. 좌표계는 x축을 정수면에 두고 y축은 상방향을 양으로 한다. 수심은 무한하다.

위의 가정으로부터 속도 포텐셜 $\Phi(x, y, t)$ 를 도입하면 유체의 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \text{ in the fluid region, } t \geq 0. \tag{1}$$

자유표면상에서의 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건은 각각 다음과 같다,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^s}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 0, \tag{3}$$

on $y = \eta(x, t)$, $t \geq 0$,

여기에서 $y = \eta(x, t)$ 는 자유표면을 나타내며, 표면 포텐셜 $\phi^s(x, t)$ 는 자유표면에서의 속도 포텐셜값 $\Phi(x, \eta, t)$ 이고, g 는 중력 가속도이다.

날개의 후방에 생성되는 후류 보오텍스면(wake vortex sheet)에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{D(\Delta\Phi)}{Dt} = \frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial t} + \underline{V}_m \cdot (\Delta\Phi) = 0, \tag{4}$$

on the freely moving wake surface, $t \geq 0$,

여기에서 $\Delta\Phi$ 는 무한히 얇은 후류면에서 윗면 포

텐셜 Φ^+ 와 아래면 포텐셜 Φ^- 의 차에 의한 포텐셜 도약이며, \underline{V}_m 은 후류면 각 위치에서의 평균유속이다.

날개표면에서의 물체표면 경계조건은 다음과 같고,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \underline{V}(t) \cdot \underline{n}, \text{ on the body surface, } t \geq 0, \tag{5}$$

여기에서 \underline{n} 는 물체 밖으로 향한 단위 법선벡터이고, $\underline{V}(t)$ 는 물체의 속도벡터이다.

날개뒷날에서의 Kutta 조건은 다음의 Morino Kutta 조건을 적용하였으며,

$$(\Delta\Phi)_{wake} = (\Phi^u - \Phi^l)_{body}, \tag{6}$$

at the trailing edge, $t \geq 0$,

여기에서 u 와 l 은 각각 날개의 윗면과 아랫면을 나타낸다.

무한원방 경계조건은 다음과 같고,

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \Phi \rightarrow 0 \\ \Phi < \infty \end{array} \right\} \text{ as } R \rightarrow \infty, [R = (x^2 + y^2)^{1/2}], \tag{7}$$

물체의 운동이 항상 정지상태로부터 출발한다고 가정하면 초기조건은 다음과 같다.

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \text{ on } y = 0, t = 0 \tag{8}$$

고차 스펙트럴/경계적분법

수면변위 η 와 표면 포텐셜 ϕ^s 는 각각 자유표면 경계조건식 (2)와 (3)을 시간적분하여 얻을 수 있다. 또한, 후류 보오텍스면(뒷날 제외)의 위치와 포텐셜 도약($\Delta\Phi$)은 시간의 진행에 따라서 식(4)의 조건으로부터 계산된다. 따라서, 각 순간에서 풀어야 하는 공간상의 경계치 문제는 $y = \eta$ 에서 Dirichlet 경계조건으로 ϕ^s 가 주어지고, 후류면(뒷날 제외)에서 포텐셜 도약이 주어졌을 때, 식(1)의 Laplace 방정식과 식(5), 식(6), 식(7)의 경계조건들을 만족하는 속도 포텐셜 $\Phi(x, y, t)$ 를 구하는 문제가 된다.

속도 포텐셜 Φ 를 다음과 같이 M항까지의 급수로 표현하며,

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(x, y, t), \dots\dots\dots (9)$$

$\phi^{(m)}$ 을 $O(\epsilon^m)$ 이라 가정한다. 여기서 ϵ 은 작은 양으로서 파 기울기(wave steepness)정도의 척도이다. 이때, $\phi^{(m)}$ 은 다음 경계조건을 $y=0$ 에서 만족하여야 한다.

$$\phi^{(m)}(x, 0, t) = \begin{cases} \phi^s(x, t), & m=1. \\ -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} \phi^{(m-k)} \right]_{y=0}, & M \geq m \geq 2. \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

입의 물체운동을 포함하는 해를 구하기 위해 $\phi^{(m)}$ 을 다시 다음과 같이 파 포텐셜(wave potential) $\phi_w^{(m)}$ 과 물체 포텐셜(body potential) $\phi_b^{(m)}$ 의 합으로 나타낸다.

$$\phi^{(m)} = \phi_w^{(m)} + \phi_b^{(m)} \dots\dots\dots (11)$$

$\phi_b^{(m)}$ 은 식(1)의 Laplace 방정식과 식(7)의 무한원방 경계조건 외에 다음의 경계조건들을 만족하는 포텐셜로 한다.

$$\phi_b^{(m)} = 0 \text{ on } y = 0. \dots\dots\dots (12)$$

$$\nabla \phi_b^{(m)} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \underline{V}(t) \cdot \mathbf{n} - \nabla \phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & m=1. \\ -\nabla \phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & M \geq m \geq 2, \end{cases} \text{ on the body surface.} \dots\dots\dots (13)$$

$$\Delta \phi_b^{(m)} = \begin{cases} \Delta \Phi, & m=1. \\ 0, & M \geq m \geq 2, \text{ on the wake surface except the trailing edge.} \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

$$(\Delta \phi_b^{(m)})_{wake} = [(\phi_b^{(m)})^u - (\phi_b^{(m)})^l]_{body}, \dots\dots\dots (15)$$

$M \geq m \geq 1, \text{ at the trailing edge.}$

$\phi_b^{(m)}$ 은 식(12)의 조건 때문에 $y=0$ 에서

$\phi^{(m)}$ 의 값에 기여하지 못하므로, $\phi^{(m)}$ 이 식(10)의 경계조건을 만족하기 위해서는 $\phi_w^{(m)}$ 은 $y=0$ 에서 다음의 조건을 만족하여야 하며,

$$\phi_w^{(m)}(x, 0, t) = \begin{cases} \phi^s(x, t), & m=1, \\ -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial y^k} (\phi_w^{(m-k)} + \phi_b^{(m-k)}) \right]_{y=0}, & M \geq m \geq 2, \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

이외에 $\phi_w^{(m)}$ 은 식(1)의 Laplace 방정식과 식(7)의 무한원방 경계조건을 만족하여야 한다. 이 $\phi_w^{(m)}$ 은 날개와 후류면을 포함하는 모든 영역에서 연속이므로 식(14)과 식(15)의 포텐셜 도약에는 영향을 주지 않는다.

각 경계치문제에서 $\phi_b^{(m)}$ 과 $\phi_w^{(m)}$ 의 계산 순서는 다음과 같다.

- 1) 계산되어 있는 ϕ^s 로부터 $\phi_w^{(1)}$ 을 계산한다.
- 2) $\phi_w^{(1)}$ 과 알고 있는 후류면에서의 $\Delta \Phi$, 주어진 $\underline{V}(t)$ 로부터 $\phi_b^{(1)}$ 을 계산한다.
- 3) $\phi_w^{(1)}$ 과 $\phi_b^{(1)}$, 그리고 계산되어 있는 η 로부터 $\phi_w^{(2)}$ 를 계산한다.
- 4) $\phi_w^{(2)}$ 로부터 $\phi_b^{(2)}$ 를 계산한다.
- 5) 3)과 4)의 과정을 차수 m 을 하나씩 증가시켜 가며 정해진 차수 M 까지 반복 수행한다.

각 경계치 문제의 해로 $\phi_w^{(m)}$ 과 $\phi_b^{(m)}$ 이 구해지면 이들의 합으로 m 차 포텐셜 $\phi^{(m)}$ 이 식(11)에 의해 얻어지고, 전체 포텐셜 Φ 는 $\phi^{(m)}$ 의 급수로 식(9)에 의해 얻어진다. 이렇게 얻어지는 속도 포텐셜 Φ 는 식(9)의 급수가 유효한 범위내에서 자유표면에 주어진 Dirichlet 경계조건과 후류면에 주어진 포텐셜 도약 및 식(1), 식(5), 식(6), 식(7)로 이루어진 각 순간의 경계치 문제의 해가 된다.

물체 포텐셜 $\phi_b^{(m)}$ 의 수치계산은 Green 정리에 기초한 경제적분법^(2,4,5)을 이용한다. 수치해는 이미 잘 알려져 있는 수치해법들에 따라, 균일세기의 특이점 분포를 갖는 직선요소들로 이산화하여 계산하였다.

파 포텐셜 $\phi_w^{(m)}$ 의 수치계산은 고차 스펙트럴법^{2),6)}을 이용한다. $\phi_w^{(m)}$ 을 eigen 함수 전개식(복소 Fourier 급수)으로 표현하고, 식(16)의 Dirichlet 경계 조건을 만족하도록 eigen 함수의 복소진폭값을 잘 알려진 Fast-Fourier 변환법⁷⁾을 써서 계산하였다.

η 와 ϕ_s 의 시간에 따른 변화는 각각 식(2)와 (3)을 시간적분하여 계산하며, 후류면의 위치변화는 각 보오텍스 스위치에서의 유속(자신의 영향은 제외)을 시간적분하여 계산한다. 시간적분법으로 4차 Runge-Kutta 적분법을 이용할 때 선형 자유표면파 문제에서의 수치 안정성(numerical stability)조건이 $\Delta t^2 \leq 8\Delta x/g\pi$ (Δt 는 시간분분, Δx 는 자유표면 분할간격)임을 잘 알려져 있으며, 본 논문의 계산에서도 충분한 여유를 두고 이 조건을 만족하도록 하였다. 수록된 계산예들에서 수치적 불안정성은 나타난 바 없고, 별도의 자유표면 순정(smoothing) 기법도 필요치 않았다.

본 논문의 고차 스펙트럴법은 자유표면의 분할갯수가 N 일때 그 산술 계산량이 $N \log N$ 에 비례하는 Fast-Fourier 방법을 사용하므로, 자유표면의 취급에 있어 매우 효율적이다.

계산결과 및 고찰

계산은 코드길이의 12% 두께를 갖는 NACA0012 대칭형 날개단면을 대상으로 하였다. 균일속도로 전진하는 수중익에 의한 발생파형을 Duncan³⁾의 실험결과와 비교하였고, 균일속도로 전진하며 상하동요하는 수중익에 의한 발생파형, 후류 보오텍스 모양과 날개에 작용하는 동유체력의 계산결과를 보인다. 수치 시뮬레이션에서 수중익은 정지상태에서 출발하여 점진적인 가속과정을 거쳐 균일속도 U 에 도달한다. 수중익의 가속방법은 다음과 같다(T_{acc} 는 가속시간).

$$U_{msf}(t) = \begin{cases} -U * 0.5[1 - \cos(\pi t/T_{acc})], & 0 < t < T_{acc} \\ -U & , T_{acc} < t \end{cases} \dots\dots\dots (17)$$

Fig.1에는 영각(attack angle) $\alpha=5^\circ$ 인 NACA0012 단면이 $x/C=11$ 위치에서 출발하여 200스텝 점진 가속후 $Fn=U/(gC)^{0.5}=0.566998$

(C 는 코드길이)로 균속전진하는 경우, 세 가지 잠수 깊이에 대한 발생파형을 Duncan³⁾의 실험결과와 비교하고 있다. 잠수깊이 h 는 정수면으로부터 날개 중심까지의 깊이이다. Duncan의 실험결과와 비교하여 본 수치계산 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

영각 $\alpha=5^\circ$ 인 NACA0012 수중익이 $h/C=1.5$ 에서 200스텝 가속후 $Fn=1.0$, $\omega 2C/g=4.0$, $A/C=0.05$ (ω 는 동요원주파수, A 는 동요진폭)로 전진하며 상하동요하는 경우의 본 수치계산 결과가 Fig. 2~Fig. 5에 보여지고 있다. 이러한 조화동요 문제에서도 동요진폭을 다음과 같이 점진적으로 증가시켰다.

$$A_{msf} = \begin{cases} A/T_{acc} * [t - T_{acc}/2\pi * \sin(2\pi * t/T_{acc})], & 0 < t < T_{acc} \\ A & , T_{acc} < t \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

이 수치계산 예에서 수치수조의 길이는 날개길이의 약 77배이며, 자유표면에 약 500개 정도의 요소들 갖고 있다.

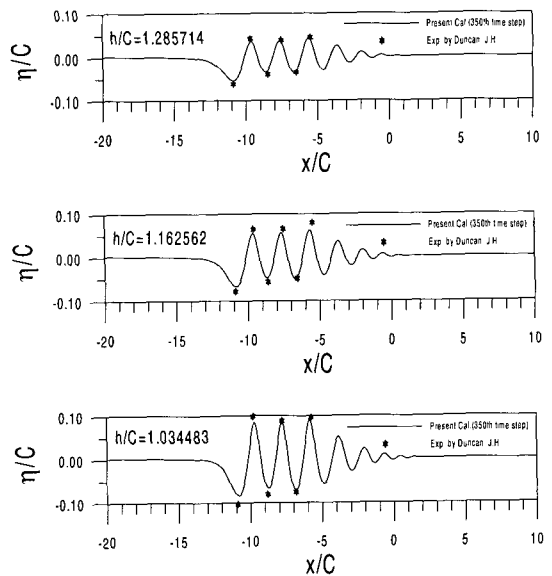


Fig. 1. Comparison of the calculated free-surface profiles with Duncan's experimental results 3).

($\alpha=5^\circ$, $Fn=0.566998$, $M=3$, $N=512$, $\Delta x/C = 0.08594$, $U\Delta t/C=0.088779$, $T_{acc}/\Delta t=200$)

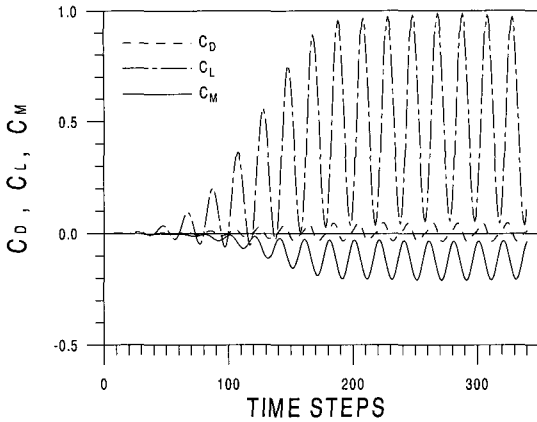


Fig. 2. Time history of lift, drag and moment acting on the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface.

($\alpha=5^\circ$, $Fn=1.0$, $h/C=1.5$, $A/C=0.05$, $\omega 2C/g=4.0$, $M=3$, $N=512$, $\Delta x/C=0.15$, $U \Delta t/C=0.157086$, $T_{acc}/\Delta t=200$)

Fig. 2에 보여진 동유체력에서 상하동요에 의한 진동현상을 볼 수 있고, 양력 평균은 양(상방향)의 값을 갖고 날개중양에 대한 모멘트의 평균은 음(시계방향)의 값을 가짐을 알 수 있다. 양력계수는 $C_L = Lift / 0.5\rho U^2 C$, 항력계수는 $C_D = Drag / 0.5\rho U^2 C$, 모멘트계수는 $C_M = Moment / 0.5\rho U^2 C^2$ 이며, ρ 는 유체밀도이다.

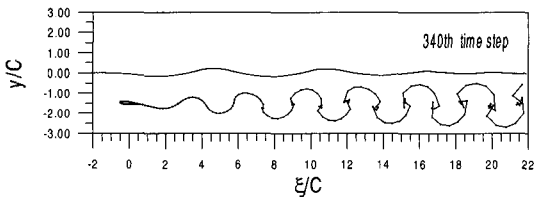


Fig. 3. A view of the calculated vortex sheet for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface. (Calculation parameters are the same as in Fig. 2)

Fig. 3에는 340스텝에서의 후류 보오텍스 모양이 보여지고 있다. ξ 는 날개 길이의 중앙에 중심을 둔 수평 좌표이다. 실험 등에서 볼 수 있는 보오텍스가 감기며

넓게 확산되는 모습이 잘 나타나고 있다. 본 계산에서는 상부에 자유표면이 있으므로 보오텍스의 상방향 확산이 제한을 받아 보오텍스가 정확한 상하대칭은 아니다.

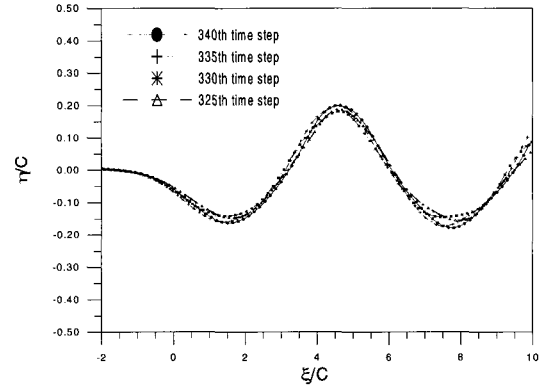


Fig. 4. Free-surface elevations at 4 time steps during 1 period for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface. (Calculation parameters are the same as in Fig. 2)

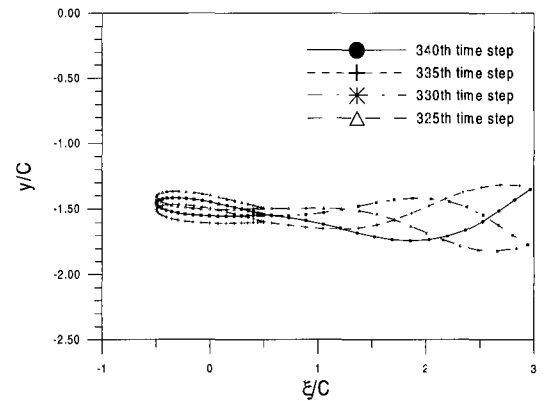


Fig. 5. Shed vortex sheets at 4 time steps during 1 period for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface. (Calculation parameters are the same as in Fig. 2)

Fig. 4와 Fig. 5에는 한주기 동안의 4 스텝에서 날개주위 수면과와 보오텍스 변화가 각각 보여지고 있다. 이로부터 날개의 상하동요가 자유표면에 미치는 영향을 알 수 있고, 날개 동요시 후류 보오텍스

의 방출양상을 알 수 있다.

본 논문의 계산들에서 후류 보오텍스의 갯수는 매 계산스텝마다 하나씩 증가하며, 계산스텝이 증가할수록 이들 보오텍스의 영향계수 계산에 다소 많은 시간이 소요된다. Pentium4 1.7GHz의 일반 PC를 사용하였고, 비선형 차수 $M = 3$, 자유표면 요소수 $N = 512$, 날개 요소수 $N_b = 40$ 일 때 전체 340스텝 계산에 20분 정도의 시간이 소요되었다.

본 계산의 예들에서는 현상 그대로를 시뮬레이션하기 위해 매 스텝 발생하는 보오텍스를 그대로 유지하였다. 하지만, 날개근처의 유동과 날개에 작용하는 유체력에만 중점을 둔다거나 혹은 균일속도 전진문제의 정상상태만을 얻고자 한다면, 이들 보오텍스를 그대로 유지할 필요는 없다. 즉 균일속도 전진문제의 정상상태만을 얻고자 한다면 후류요소수를 충분히 긴 1개의 요소만 사용하여도 무방하며, 조화동요 문제에서도 날개로부터 충분히 떨어진 보오텍스들은 뭉쳐서 보다 적은 수의 보오텍스들로 대처하여도 날개주위 유동은 정확하게 계산할 수 있을 것이다.

단, 이러한 우 과도구간 또는 날개에서 멀리 떨어진 후방에서의 유동은 실제현상과의 대응성을 상실한다.

요 약

본 논문에서는 수중익주위의 비선형/비정상 자유표면 유동을 다룰 수 있는 시간영역 수치해법으로, 고차 스펙트럴법과 경계적분법을 조합한 고차 스펙트럴/경계적분법을 이용하였다. 이 수치해법은 자유표면 요소수를 N 이라 할 때 그 산술 계산량이 $N \log N$ 에 비례하여 증가하므로 N 이 클 때는 거의 선형적으로 증가한다. 따라서, 이 수치해법은 자유표면 유동의 계산에 있어 매우 효율적인 방법이다.

적용예로서 균속전진하는 수중익에 의한 발생파형 계산결과를 Duncan³⁾의 실험결과와 비교하였고 대체로 좋은 일치를 보이고 있다. 또한, 전진하며 상하동요하는 수중익에 의한 발생파형과 양력, 후류 보오텍스 등을 시간영역에서 시뮬레이션하여 본 방법이 수중익주위 자유표면 유동의 다양한 문제들에 적용될 수 있는 강력한 수단임을 보였다.

참고문헌

- 1) Newman, J.N.(1977) : Marine Hydrodynamics, The MIT Press.
- 2) 김용직 · 황중훈(1992) : 고차 스펙트럴법에 의한 2차원 수치 파수조 개발에 관한 연구, 대한조선학회 논문집, 제29권, 제3호, 131~139.
- 3) Duncan, J.H.(1983) : The Breaking and Non-Breaking Wave Resistance of a Two-Dimensional Hydrofoil, J. of Fluid Mech., Vol. 126, 507~520.
- 4) Suh, J.C.(1990) : Unsteady Analysis for a Two-Dimensional Foil in Uniformly Sheared Onset Flow, Ph.D.Thesis, Univ. of Michigan, USA.
- 5) Lee, J.T.(1987) : A Potential Based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in teady Flow", Ph.D.Thesis, MIT, USA.
- 6) Dommermuth, D.G. and Yue, D.K.(1987) : A High-Order Spectral Method for the Study of Nonlinear Gravity Waves, J. of Fluid Mech., Vol. 184, 267~288.
- 7) Brigham, E.O.(1988) : The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall International, Inc.

2002년 11월 18일 접수

2003년 2월 3일 수리