

형식불역의 원리를 통한 고차원 도형의 탐구

송 상 현*

본 논문에서는 형식불역의 원리를 적용하여 4차원 이상의 고차원 도형 중 특별한 몇 가지 도형의 기하학적 모델을 탐구해 보면서 이것이 기존의 일반적인 수학적 성질과 원리, 법칙에 모순됨이 없는지를 검증해 보았다. 정다면체는 5개뿐이라는 설명 방식에 형식불역의 원리를 적용하면 4차원 정다면체는 6개뿐임을 설명할 수 있다. 그리고 두 가지 정의(기둥형과 뿔형)에 의해 만들어진 볼록한 고차원 도형들은 다면체에서의 오일러 정리를 일반화한 오일러 특성수에 정확히 들어맞는다는 것을 확인할 수 있다. 특히, 뿔형의 경우는 그 도형의 꼭지점, 모서리, 면, 입체 등의 개수들이 파스칼의 삼각형 구조를 이루고 있으며 기둥형의 경우는 임의로 정한 수의 모든 약수들을 하세의 다이어그램을 통해 약수와 배수의 관계로 표현할 수 있다. 이러한 소재들은 영재 교수학습용 자료로도 활용할 수 있을 것이다.

1. 들어가며

19세기 독일의 수학자인 Hermann Hankel의 덕분에 음수의 개념을 정당화하기 위하여 더 이상 물리적 세계에서 실제적인 모델을 찾을 필요는 없어졌다(우정호, 2000). 그러나 이것이 수학에서 수 체계와 실제 세계와의 관련성에 관심이 없다는 것을 의미하지는 않는다. 오히려 교수학적으로는 형식적인 분석적 접근 방법과 함께 다양한 직관적인 해석을 함께 고려해야 한다.

마찬가지로 유클리드 기하를 대수적인 방식으로 계산하기 위해 데카르트가 만들어낸 좌표 공간을 이용하여 수학에서는 n 차원을 이미 취급하고 있다. 그러나 3차원 입체를 2차원 평면에 겨냥도의 형식으로 표현하는 것에 주목해 본

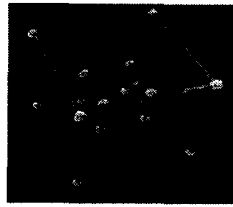
다면 4차원 도형도 3차원 공간이나 2차원 평면에 구체적으로 표현하는 것이 가능할 것으로 예상할 수 있다. 좌표평면을 도입한 배경이 기하학적인 도형을 대수적으로 계산하기 위한 것이었다면 이를 다시 기하학적인 도형으로 표현해 낼 수도 있어야 할 것이다. 3차원의 물리적인 공간에 4차원의 도형을 시각적으로 완벽하게 표현해 낼 수 없겠지만 3차원의 입체를 2차원 평면(종이) 위에 겨냥도(sketch)로 그리듯이, 4차원의 도형을 3차원 공간이나 2차원 평면에 겨냥도 형식으로 나타낼 수도 있을 것이다. 그러한 예 중에 하나가 전통적으로 알려진 클라인 병([그림 I-1])이며, 또 다른 하나는 4차원의 그림자라고 부르기도 하는 Tennant의 Hypercube([그림 I-2])이다. [그림 I-1]은 3차원 공간에 실제로 존재하지는 않지만 위상수학적인 접근(topological approach)에서 자주 사용되는

* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr

예이며, [그림 I-2]는 Raymond F. Tennant(2001)가 조노돔 시스템을 이용하여 추상적인 수학 구조를 만들면서 사용하는 예시이다.¹⁾



[그림 I-1] 클라인 병



[그림 II-2] Tennant's Hypercube

이에 본 논문은 4차원 도형의 기하학적 표현이 부분적으로 가능함을 확인하고 형식불역의 방법으로 차원을 확장하여 정의한 고차원 도형의 표현 양식과 그에 따른 몇 가지 성질들이 기존에 이미 일반적으로 적용되고 있는 유명한 수학적 성질과 정리에 모순이 되지 않음을 보이려고 한다. 다만, 탐구의 대상은 손잡이가 없는 볼록한 도형으로 제한한다. 그리고 일반적인 n 차원 도형에 대한 설명을 기본으로 하면서도 구체적인 예시는 4차원 도형의 경우를 위주로 살펴보겠다.

II. 도형의 차원과 형식불역의 원리

1. 도형의 차원

차원(dimension)이란 공간 안에서 각각의 점을 독립적으로 지정하는 데 필요한 좌표의 수

를 지칭하는 수학적 개념이다. 예를 들어 하나의 직선 위에 있는 임의의 점은 그 직선 위에 하나의 기준점(예를 들어 0)을 설정하면 그 점으로부터의 거리를 나타내는 하나의 양의 실수에 따라 유일하게 정할 수 있으므로 직선은 1차원 공간이다. 그리고 평면 위의 점은 두 개의 독립된 좌표축에 의해 두 개의 실수 쌍 (a, b) 과 대응시킬 수 있으므로 평면은 2차원 공간으로 볼 수 있다. 우리가 생활하고 있는 물리적인 공간 속의 모든 점들은 (서로 직교할 필요는 없지만) 세 개의 독립된 좌표축에 의해 세 개의 서로 다른 실수 쌍 (a, b, c) 과 일대일 대응시킬 수 있으므로 3차원 공간이라고 할 수 있다.

학교 수학에서 다루는 차원은 유클리드 기하를 대수적인 방식으로 계산하기 위해 Rene Descartes(1596-1650)가 만들어낸 좌표로 변환하여 해석한 방식에 따라 취급하는데, 이를 해석 기하라고 한다. 해석기하는 공간에 좌표를 도입한 좌표공간을 그 연구 대상으로 한다. 실수의 입장에서 보면 3차원 좌표공간은 단순히 $R^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in R, R \text{는 실수 전체의 집합}\}$ 인데, 차원을 확장하여 일반적으로는 $R^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in R, R \text{는 실수 전체의 집합}\}$ 와 같이 나타내면서 n 차원 좌표공간이라고 부른다.²⁾

2. 형식불역의 원리

‘형식불역(形式不易)의 원리(principle of the performance of equivalent forms)’란 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지되도록 수

1) [그림 I-1] 클라인 병 http://www.mathlove.org/pds/materials/stories/creativity/img/hani-13_01.jpg

[그림 I-2] 4D hypercube <http://www.zonodome.co.kr/image2/Dr%20Raymond%20Tennant.pdf> (16쪽)

2) 물론 공간을 정의할 때 집합에 Euclidean Metric과 Poincare Metric 중 어떤 metric을 주느냐에 따라 유클리드공간과 비유클리드공간으로 구분된다. 여기서는 유클리드공간을 기본으로 한다.

체계를 확장하는 대수적 구조의 확장 원리로 처음 사용되었는데, H. Freudenthal은 이를 ‘대수적 원리(algebraic principle)’라고까지 부르고 있다. 형식불역의 원리는 1830년에 출판된 영국의 G. Peacock의 저서 *Treatise on Algebra*에서 처음으로 등장한다. Peacock은 그의 책에서 대수학에 《유클리드 원론》과 견줄만한 논리 체계를 갖추려 하면서 자신의 책을 ‘대수학의 유클리드’라고 불렀다. 자연수로 한정된 ‘산술대수’에서는 반드시 $a > b$ 이어야만 뺄셈 $a - b$ 이 가능하지만 ‘기호대수’에서는 뺄셈이 항상 가능하다는 점에서 ‘산술대수(arithmetic algebra)’와 ‘기호대수(symbolic algebra)’를 구분하고 있다. Peacock은 이러한 ‘산술대수’의 ‘기호대수’로의 확장을 ‘형식불역의 원리’라고 불렀다. 형식불역의 원리는 그 후 수학에서 개념을 확장하는 한 가지 방법으로 간주되었으며, 오늘날에도 여전히 정의를 확장하고 정리를 일반화하고자 할 때 기본적으로 고려되는 지침이 되고 있다(Eves, 1995:459-460를 우정호, 2000:160-161에서 재인용함).

$(-1) \times (-1) = 1$ 임을 설명하기 위한 교수학적 시도는 수직선 모델이나 채무 관계, Gattegno가 제안한 셈돌 모델, 우체부 이야기 모델 등의 다양한 직관적인 모델을 통해 도입할 수도 있고 그 본질에 입각하여 형식적으로 정의할 수 있다.

그러나 19세기 독일의 수학자 Hankel이 수에 대한 관점을 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로 변화시키면서 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수 체계를 연구하였고 이렇게 하여 얻은 음수의 구조는 대수적으로 모순이 없음을 확인하였다(우정호, 1998:202-204).

$$\begin{aligned} (-1) \times 3 &= (-1) + (-1) + (-1) = -3 \\ (-1) \times 2 &= (-1) + (-1) = -2 \\ (-1) \times 1 &= -1 \\ (-1) \times 0 &= 0 \\ (-1) \times (-1) &= 1 \end{aligned}$$

또한 지수가 양수일 때 성립하던 거듭제곱의 성질 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ($a \neq 0, m > 0, n > 0$)을 지수가 음수일 때까지 확장하려면 $a^0 = 1$ 로 정의하여야 한다. 이처럼 기존의 수학적 성질이나 법칙의 제한된 영역을 보다 확장하는 데 사용하는 원리가 바로 ‘형식불역의 원리’이다.

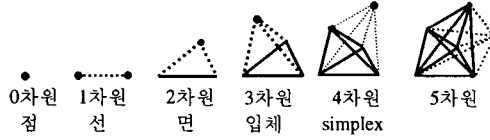
음수의 역사발생적인 과정에 비추어 볼 때 음수는 직관적으로 받아들이기 어려운 개념이므로 직관을 초월한 이론적 설명이 필요하다고 하면서, Freudenthal은 처음부터 음수를 방정식의 해로 형식적으로 도입하고 음수의 연산을 대수적인 형식불역의 원리를 이용하여 형식적으로 도입할 것을 주장한다. 그러나 음수의 존재는 형식적으로 정당화되었지만 음수는 구체적인 물리적 세계의 여러 분야에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 학생들에게 음수 개념과 그 연산을 지도할 때 대수적인 논리가 그것을 정당화한다는 이유로 형식적인 대수적 접근만을 주장하는 것은 설득력이 없다. 음수의 개념과 그 연산의 지도에서는 형식적인 접근과 다양한 직관적 해석을 함께 고려해야 한다. 모델을 통한 직관적인 지도 방법과 형식적인 분석적 접근 방법을 상보적으로 사용하는 것은 현대 수학교육의 사조이기도 하다(우정호, 1998: 207). 이와 마찬가지로 기존에 학교수학에서 취급하고 있는 n 차원 좌표공간을 통한 형식적인 고차원 도형의 이해도 필요하지만 형식불역의 원리를 이용하면 구체적이고 직관적인 모델을 통해 고차원(특히, 4차원) 도형을 학교수학에서도 취급할 수 있을 것이다.

III. n 차원 도형의 기하학적 표현의 정의

한 점을 일정한 한 방향으로 끌어서 생기는 자취인 선분은 1차원 도형이고, 1차원의 선분을 직선 위에 있지 않는 다른 방향으로 끌어서 생기는 자취는 2차원의 평면도형이며, 2차원의 면을 그 면 위에 있지 않는 다른 방향으로 이동시켜 생기는 자취는 3차원 입체도형이다. 그리고 선은 한 점을 이동하여 생긴 자취도형으로 볼 수 있으므로 점은 0차원 도형이라고 정의하여도 그 일반성을 잃지는 않는다. 마찬가지로 선분의 각 점을 선분의 밖에 있는 한 점과 연결하면 삼각형이 되고, 삼각형의 각 꼭지점을 그 삼각형과 같은 면에 있지 않는 한 점과 연결하면 사면체(삼각뿔)가 된다. 이를 단서로 삼아 차원을 확장해 간다면 4차원 이상의 도형에 대해서도 다음의 두 가지 정의를 설정해 볼 수 있다.³⁾



[그림 III-1] 정의 1에 의한 기동형의 고차원 도형



[그림 III-2] 정의 2에 의한 뿔형의 고차원 도형

[그림 III-1]에서 점선은 n 차원 도형이 제 $n+1$ 의 방향으로 평행이동하면서 생기는 자취 직선이며, [그림 III-2]에서의 점선은 n 차원 도형과 제 $n+1$ 차원 공간에 있는 점을 연결하는 선이다. 이렇게 만들어지는 고차원 도형들은 분명히 형식불역의 원리에 따라 생각해 볼 수 있는 수학의 세계에만 존재하는 도형들이다.

그러면 이렇게 만들어진 고차원 도형들은 과연 형식불역의 방법에 의해 기존의 수학적 원리를 일반화시키는데 모순이 되지 않는지를 검증해 보자.

정의 1 : n 차원 도형에 대해 그 도형을 포함하지 않는 공간으로 평행 이동하여 생기는 자취 공간은 $n+1$ 차원 도형이다.(기동형)

정의 2 : n 차원 도형에 대해 그 도형을 포함하지 않는 공간에 한 점을 잡고 각 꼭지점을 연결하여 만든 도형은 $n+1$ 차원 도형이다.(뿔형)

[그림 III-1]과 [그림 III-2]는 위의 정의에 따라 2차원 평면인 종이 위에 그릴 수 있는 점, 선, 면, 사각기둥과 삼각뿔, 그리고 그로부터 만든 4차원의 도형의 겨냥도(sketch)들이다.

IV. 형식불역의 원리에 따른 고차원 도형의 성질 검증

앞 장에서 정의한 방식에 따른 고차원 도형에도 이미 참인 것으로 받아들여지고 있는 기존의 중요한 수학적 성질이 적용될 수 있는 지

3) 여기서는 논의의 범위를 기동형(hypercube type)과 뿔형(simplex type)의 볼록한(convex) 도형의 경우로 제한한다. 3차원의 경우도 각기둥과 각뿔이외에 회전체와 준정다면체, 버키볼과 같은 다양한 도형이 있듯이 논의하고자 하는 모양 이외의 4차원 도형도 존재한다. [정의 1]로 만든 4차원 도형은 3차원 도형을 제 4의 방향으로 평행이동시킨 것으로 이는 평행광선에 의한 자취라고 볼 수 있으며, 이는 평면도형에서의 합동변환을 상기시킨다. 이에 반해 [그림 I-2]는 평행이동에 의해서라기보다는 직육면체의 내부에 점 광원을 두었다고 가정할 때 점 광선에 의한 자취라고 볼 수 있으며, 이는 닦음변환을 4차원에 확장하여 적용한 아이디어이다.

를 확인해 볼 필요가 있다. 여기에 사용될 수 있는 것이 바로 형식불역의 원리이다.

우선, 꼭지점의 수(V), 모서리의 수(E), 면의 수(F)에 대한 $V - E + F = 2$ 를 '다면체에서의 오일러 정리'라고 하는데, 이를 일반화한 '오일러의 특성수(Euler's Characteristics)'가 4차원 도형에 적용될 수 있는지를 확인해 보자. 그리고 3차원에서는 정다면체(regular polyhedron)⁴⁾가 5개뿐이라는 설명 방식을 형식불역의 방식으로 확장하면 4차원에서는 정다포체(regular polytope)⁵⁾가 6개뿐임을 설명할 수 있다. 그리고 더 나아가 기둥형과 뿔형의 고차원 도형 중에서 사각형이나 삼각형으로 이루어진 특수한 도형을 통해 또 다른 수학적 성질들을 점검해 보기로 한다.

1. 정다면체의 존재성 검증 방식 확장을 통한 정다포체의 존재성 검증

정다면체가 5개 뿐이라는 것은 이미 널리 알려진 사실이다. 정다면체가 5개 뿐이라는 것은 3차원 입체도형을 만들기 위해 각 꼭지점에 모이는 정다각형의 개수는 유한하다는 것에 기인한다. 즉, 3차원 입체도형을 만들려면 각 꼭지점에 모이는 정다각형은 적어도 3개 이상이어야 한다.

그러나 정육각형 이상은 3개 이상의 꼭지가 한 점에 모이면 360°를 넘게 되므로 정삼각형, 정사각형, 정오각형으로만 정다면체를 만들 수 있다. 이렇게 하여 정다면체의 종류는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 정다면체의 종류(5가지뿐)

(각 모서리에 모인 정다각형의) 종류	개수 꼭지각의 크기	3	4	5
		정삼각형	60°	정사면체
정사각형	90°	정육면체	×	×
정오각형	108°	정십이면체	×	×

<표 IV-2> 4차원 정다포체의 종류(6가지뿐)

(각 모서리에 모인 정다면체의) 종류	개수 이면각의 크기	3	4	5
		정사면체	70°32' -	simplex(5-cell)
정육면체	90°	hyper cube(8cell)	×	×
정팔면체	109°28' +	24-cell	×	×
정십이면체	116°34' -	120-cell	×	×
정이십면체	138°11' +	×	×	×

4) 각 면이 모두 합동인 정다각형이고, 각 꼭지점에 모이는 면의 개수가 같은 볼록한 다면체

5) 각 입체가 모두 합동인 정다면체이고, 각 모서리에 모이는 입체의 개수가 같은 볼록한 4차원 다입체

이제 4차원 정다포체를 만들려면 같은 정다면체를 한 모서리에 모을 때 두 정다면체가 이루는 이면각들의 합은 360°보다 작아야 한다. 따라서 이면각의 크기가 138°11'보다 조금 큰 정이십면체로는 정다포체를 만들 수 없다. 나머지 정다면체를 사용하여 만든 4차원 정다포체는 <표 IV-2>와 같음을 Coxeter(1989:414)는 밝히고 있다.

이 중 각 모서리에 정사면체 3개씩 모두 5개의 정사면체로 구성된 simplex와 각 모서리에 정육면체 3개씩 모두 8개의 정육면체로 구성된 hypercuber가 각각 가장 간단한 뿔형과 기둥형의 4차원 도형이다. 그러나 5차원 이상의 정다포체의 경우는 3차원 입체들끼리 이루는 입체각(solid angle)을 도입하여야 하므로 여기서는 논의로 한다.

2. 일반화된 오일러의 정리(오일러의 특성수)를 통한 검증

[오일러의 특성수] 볼록 n 차원 도형 안에 들어있는 k 차원 도형의 개수를 $n a_k$ 라 할 때, 다음이 성립한다.

$$n a_0 - n a_1 + n a_2 - n a_3 + \dots + (-1)^n n a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k n a_k = 1$$

여기서 논의하는 것은 손잡이가 없는(no-handles) 볼록한 n 차원 도형이다. 먼저, 4차원의 경우를 간단히 예로 들어 설명하면 다음과 같다.

[정의 1]에 따라 어떤 3차원 입체도형을 이 공간에 포함되지 않는 제 4의 방향으로 이동하여 생기는 자취로 4차원 도형을 생각하고, 그 도형을 구성하고 있는 점, 선, 면, 3차원 입체의 개수를 세어보자. [정의 1]에 따라 만든 4차원 도형의 꼭지점은 평행이동의 시작점에 있

던 3차원 입체도형의 꼭지점들과 이동의 종착점에 생긴 똑같은 모양의 3차원 입체의 꼭지점 이외에 이동하는 중간에는 만들어지지 않는다. 따라서 어떤 3차원 도형을 평행이동하여 만든 4차원 도형의 꼭지점의 개수는 그 3차원 도형의 꼭지점의 개수의 두 배이다. 같은 방법으로 4차원 도형의 모서리, 면, 입체의 개수를 구하면 평행이동하기 전의 3차원 도형의 구성 요소로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$4 a_0 = 3 a_0 \times 2, \quad 4 a_1 = 3 a_1 \times 2 + 3 a_0$$

$$4 a_2 = 3 a_2 \times 2 + 3 a_1, \quad 4 a_3 = 3 a_3 \times 2 + 3 a_2$$

그런데, 3차원 도형에서의 오일러 특성수에 따라 $3 a_0 - 3 a_1 + 3 a_2 - 3 a_3 = 1$ 이므로

$$= 4 a_0 - 4 a_1 + 4 a_2 - 4 a_3 + 4 a_4$$

$$= 3 a_0 \times 2 - (3 a_1 \times 2 + 3 a_0) + (3 a_2 \times 2 + 3 a_1) - (3 a_3 \times 2 + 3 a_2) + 1 = 3 a_0 - 3 a_1 + 3 a_2 - 3 a_3 - 3 a_3 + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

한편, 뿔형의 경우는 더 간단하다. 즉, 3차원 뿔형의 도형을 확장하려면 3차원에서 그 도형을 포함하지 않는 제 4의 공간에 한 점을 잡아 그 점과 3차원 도형의 각 점들을 연결하여 만들므로 다음과 같다.

$$4 a_0 = 3 a_0 + 1, \quad 4 a_1 = 3 a_1 + 3 a_0$$

$$4 a_2 = 3 a_2 + 3 a_1, \quad ,$$

$$4 a_3 = 3 a_3 + 3 a_2$$

이로부터 각 동류항을 소거하면, $4 a_0 - 4 a_1 + 4 a_2 - 4 a_3 + 4 a_4 = 1$ 을 쉽게 얻을 수 있다.

이로부터 [정의 1]과 [정의 2]에 의해 만들어지는 모든 n 차원 도형에 관한 일반적인 증명은 수학적귀납법을 사용하면 간단히 증명할 수 있다. Coxeter(1989)가 밝혀놓은 4차원 정다포체

안의 $k(\leq 3)$ 차원 도형들의 개수와 팔각기둥, 육각뿔, 그리고 준정32면체(축구공)를 [정의 1]과 [정의 2]에 따라 만든 4차원 도형에서의 k 차원 도형의 개수를 구하면 <표 IV-1>과 같다.

3. 이항정리를 통한 검증

가. 기둥형에서 모든 면이 사각형인 경우
일반적으로 n 차원에서의 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수, 3차원 입체도형의 수 등, k 차원 도형의 모든 면이 사각형인 기둥형의 경우를 정리하면 <표 IV-2>와 같다. 4차원 도형 안에 들어있는 $k(\leq 4)$ 차원 도형의 개수는 $(x+2)^4$ 의 전개식인 $x^4+8x^3+24x^2+32x+16$ 에서 x^k 의 각 계수들을 알 수 있다. 이제

<표 IV-2>에서와 같이 이 방식을 볼록 n 차원 도형으로 확장시켜보자. 볼록 n 차원 도형 안에 들어있는 k 차원 도형의 개수는 $(x+2)^n$ 의 전개식 $(x+2)^n = {}_nC_0x^0 \cdot 2^n + {}_nC_1x^1 \cdot 2^{n-1} + {}_nC_2x^2 \cdot 2^{n-2} + \dots + {}_nC_{n-1}x^{n-1} \cdot 2^1 + {}_nC_nx^n \cdot 2^0$ 에서 x^k 의 계수 즉, ${}_nC_k \cdot 2^{n-k}$ 임을 알 수 있다. 여기에 $x=-1$ 을 대입해 보면,
 $1 = {}_nC_0 \cdot 2^n - {}_nC_1 \cdot 2^{n-1} + {}_nC_2 \cdot 2^{n-2} - \dots + (-1)^n {}_nC_n \cdot 2^0 = {}_n a_0 - {}_n a_1 + {}_n a_2 - \dots + (-1)^n {}_n a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_n a_k$ 이므로 각 차원의 도형 안에 존재하는 0차원(꼭지점)의 개수로부터 차례로 +, -의 부호를 교대로 붙여나가는 꼴⁶⁾이 되며, 이 값은 항상 1이다. 따라서 일반화된 오일러 정리가 성립됨을 확인할 수 있다.

<표 IV-1> 여러 가지 볼록 4차원 도형에 대한 오일러 특성수의 적

도형의 종류	구성 요소의 개수	0차원 꼭지점 (a_0)	1차원 모서리의 수 (a_1)	2차원 면의 수 (a_2)	3차원 입체의 수 (a_3)	4차원 도형의 수 (a_4)	오일러수
정다포체	5-cell(regular simplex)	5	10	10	5	1	1
	8-cell(hypercube)	16	32	24	8	1	1
	16-cell	8	24	32	16	1	1
	24-cell	24	96	96	24	1	1
	120-cell	600	120	720	120	1	1
	600-cell	120	720	1200	600	1	1
팔각기둥의 확장	3차원 팔각기둥	16	24	10	1		1
	[정의1]에 의한 변형	32	64	44	12	1	1
	[정의2]에 의한 변형	17	30	34	11	1	1
육각뿔의 확장	3차원 육각뿔	7	12	7	1		1
	[정의1]에 의한 변형	14	31	26	9	1	1
	[정의2]에 의한 변형	17	30	34	11	1	1
준정32정다면체의 확장	준32정다면체(축구공)	60	90	32	1		1
	[정의1]에 의한 변형	120	240	154	34	1	1
	[정의2]에 의한 변형	17	30	34	11	1	1

6) 홀수 차수는 -, 짝수 차수는 + 부호가 붙는다.

나. 뿔형에서 모든 면이 삼각형인 경우
 모든 면이 삼각형으로 이루어진 뿔형 중에서
 각 차원별로 가장 적은 개수의 삼각형으로 이
 루어지는 간단한 경우에 대해서만 <표 IV-3>으
 로 정리할 수 있다.

<표 IV-3>에서 보는 바와 같이, n 차원에서
 의 k 차원 도형의 개수는 각각 $(x+1)^{n+1}$ 의 전
 개식 $(x+1)^{n+1} = {}_{n+1}C_0 + {}_{n+1}C_1 \cdot x + {}_{n+1}C_2 \cdot$
 $x^2 + \dots + {}_{n+1}C_{n+1} \cdot x^{n+1}$ 에서 x^{k+1} 이 계수
 ${}_{n+1}C_{k+1}$ 에 해당한다. 여기에 $x=-1$ 을 대입
 해 보면 다음과 같이 일반화된 오일러 정리가
 성립됨을 확인할 수 있다.

$${}_{n+1}C_1 - {}_{n+1}C_2 + \dots + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1}$$

$$= {}_n a_0 - {}_n a_1 + {}_n a_2 - \dots + (-1)^n {}_n a_n = 1$$

특히, $(x+1)^{n+1}$ 의 전개식에서 x^{k+1} 의 계수
 인 ${}_{n+1}C_{k+1}$ 는 ${}_n C_{k+1} + {}_n C_k$ 와 같음을 통해 파
 스칼의 삼각형이 성립됨을 확인할 수도 있다.

4. 하세의 다이어그램을 통한 검증(모든
 면이 사각형인 경우)

약수와 배수의 관계를 나타내는 하세의 다이
 어그램(Hasse's Diagram)이 있다. 이는 대수적인

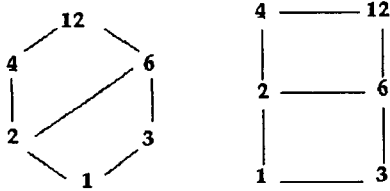
<표 IV-2> 볼록 n 차원의 도형 안에 들어있는 k 차원 도형의 개수(기둥형)

주어진 도형의 차원	0차원 꼭지점의 수(a_0)	1차원 모서리의 수(a_1)	2차원 면의 수(a_2)	3차원 입체의 수(a_3)	4차원 도형의 수(a_4)	...	$n-1$ 차원 도형의 수(a_{n-1})	n 차원 도형의 수(a_n)
0차원 (점)	1							
1차원 (선)	2	1						
2차원 (평행사변형)	4	4	1					
3차원 (사각기둥)	8	12	6	1				
4차원 (hypercube)	16	32	24	8	1			
⋮								
n 차원	2^n	$n \cdot 2^{n-1}$					$2n$	1

<표 IV-3> 볼록 n 차원의 도형 안에 들어있는 k 차원 도형의 개수(뿔형)

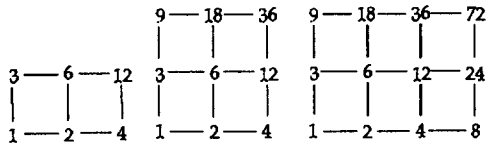
주어진 도형의 차원	0차원 꼭지점의 수(a_0)	1차원 모서리의 수(a_1)	2차원 면의 수(a_2)	3차원 입체의 수(a_3)	4차원 도형의 수(a_4)	...	$n-1$ 차원 도형의 수(a_{n-1})	n 차원 도형의 개수(a_n)
0차원 (점)	1							
1차원 (선)	2	1						
2차원 (삼각형)	3	3	1					
3차원 (삼각뿔)	4	6	4	1				
4차원 (simplex)	5	10	10	5	1			
⋮								
n 차원	${}_{n+1}C_1$	${}_{n+1}C_2$	${}_{n+1}C_3$				${}_{n+1}C_n$	${}_{n+1}C_{n+1}$

성질인 약수와 배수의 관계를 기하학적으로 표현할 수 있는 좋은 모델이다. 흔히 하세의 다이어그램은 아래의 두 가지 표현이 사용되곤 한다.



[그림 IV-1] 하세의 다이어그램의 예(1)

[그림 IV-1]은 자연수 12의 모든 약수들 중에서 서로 약수와 배수의 관계에 있는 수들끼리 선으로 연결하여 나타낸 것이다. 이 중 왼쪽의 그림이 시각적으로는 보다 멋있어 보일지라도 보다 실제적이고 확장 가능한 것은 오른쪽의 그림이다.



[그림 IV-2] 하세의 다이어그램의 예(2) : 소인수가 2개인 거듭제곱 수

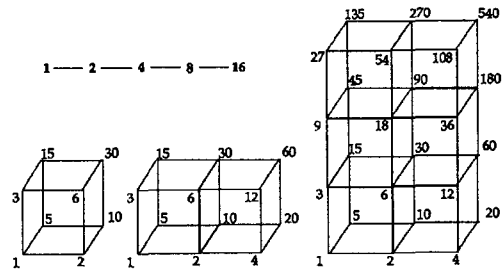
이 방식은 소인수분해를 할 때 소인수가 2개인 각 소인수의 거듭제곱으로 표현되는 모든 자연수에 대하여 그 수의 모든 약수들을 나타내 주며 각 수들 사이의 약수와 배수의 관계 그리고 최대공약수와 최소공배수들을 손쉽게 확인할 수 있다. 예를 들어, [그림 IV-2]의 가장 오른쪽 그림은 $72 = 2^3 \times 3^2$ 의 모든 약수들을 나타내 주며, 선의 표시에 따라 18과 24의 최소공배수는 72임과 최대공약수는 6임을 확인할

수 있다. 그리고 72의 모든 약수들의 합은

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$$

이고 각 약수들은 위 식의 전개를 통해 나타나는 각 항들이며, 그 개수는 $4 \times 3 = 12$ 개이다.

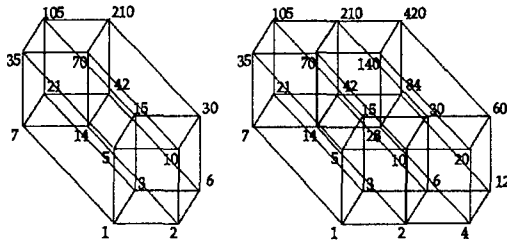
그러면 소인수의 개수가 1개 또는 3개일 때도 이런 방식의 표현이 가능해야 한다. 그 예는 다음과 같다. 어떤 수를 소인수 분해하였을 때, 소인수가 1개뿐인 것은 직선으로 나타나며, 소인수가 2개인 것인 평면으로 소인수가 3개인 것은 [그림 IV-3]과 같은 3차원 입체로 나타낼 수가 있다. 거듭제곱의 지수가 커지는 것은 같은 방향으로 확장시키기만 하면 된다. 그리고 270, 108, 180의 최소공배수는 540이며, 이 세 수의 최대공약수는 각각 두 수씩의 최대공약수인 54, 36, 90의 최대공약수인 18임을 확인할 수도 있다.



[그림 IV-3] 하세의 다이어그램의 예(3) : 소인수가 1개 또는 3개인 거듭제곱 수

이제 4개의 소인수를 갖는 4차원의 그림도 가능한지를 탐색해 보자. [정의 1]과 같이 기둥형의 4차원을 생각한다면 [그림 IV-4]와 같은 4차원의 도형을 만들 수 있다. 이는 4개의 독립된 각 축에 4개의 소인수를 넣고 각 축의 방향으로 선을 따라 그것의 배수를 만들어 가면 된다.

V. 나오며



[그림 IV-4] 하세의 다이어그램의 예(4) : 소인수가 4개인 거듭제곱 수

[그림 IV-4]에서 보여주는 4차원의 모델은 자연수를 인수분해로 나타낸 소인수들의 약수와 배수의 관계를 하세의 다이어그램으로 확장가능함을 설명하는 한 가지의 예가 된다. 예를 들어, 210을 소인수분해하면 $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ 로 나타낼 수 있고, 다른 수에 대해서도 소인수분해에 따른 다른 소인수들로 대체가 가능하다. 그리고 $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ 과 같이 각 소인수의 거듭제곱의 개수가 늘어나면 각 소인수가 나타내는 방향으로 칸의 개수만 늘리면 된다.

이와 같이 확장하면 소인수가 5개 이상인 경우도 이론적으로는 표현이 가능함을 알 수 있다. 즉, 소인수가 k 개인 임의의 자연수(A)를 $A = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$ 로 소인수분해하였을 때, 각 소수 p_i 를 단위벡터로 생각하고 각 축의 방향으로 거듭하여 나타나는 개수 n_k 를 스칼라로 생각하면 이 자연수는 k 차원의 기동형(합동변환에 의한 모델)으로 일반화하여 하세 다이어그램을 그릴 수 있다.

본 논문은 4차원 이상의 고차원 도형에 대한 기하학적 모델을 탐구하기 위해 3차원 도형에서 사용하는 기동형과 뿔형을 형식불역의 원리에 따라 확장해 보면서 이로부터 특별히 만든 고차원 도형이 기존의 일반적인 수학적 성질과 원리, 법칙에 모순됨이 없는지를 형식불역의 방법을 통해 검증해 보았다. 두 가지 정의는 뿔형의 3차원 도형의 밖에 새로운 한 점을 잡고 이 점으로부터 기존의 각 꼭지점을 연결하여 생기는 도형은 4차원 뿔형이 될 것이라는 것과 기동형의 3차원 도형을 이용하여 이 도형에 포함되지 않는 새로운 방향으로 3차원 도형을 이동하여 생기는 자취공간은 4차원 기동형이라는 것이다.

본 논문에서는 이 두 가지 정의에 의해 만들어진 4차원 도형들은 다면체에서의 오일러 정리를 일반화한 오일러 특성수에 정확히 들어맞는다는 것을 확인하였다. 특히, 뿔형의 경우는 그 도형의 꼭지점, 모서리, 면, 입체 등의 개수들이 파스칼의 삼각형 구조를 이루고 있으며 기동형의 경우는 임의로 정한 모든 수의 약수들을 하세의 다이어그램을 통해 표현할 수 있음을 보이고 있다. 이렇게 확장한 하세의 다이어그램을 활용하면 학교수학에서 약수들끼리의 공배수와 최소공배수, 약수와 최대공약수 등을 탐구하는데 유용하게 사용될 수 있다. 그리고 정다면체의 개수가 5개뿐이라는 것을 설명하는 방식에 형식불역의 원리를 적용하여 4차원 정

7) 조노돔시스템을 사용하여 만든 [그림 I-2]와 Hart & Picciotto(2001)에 제시하고 있는 여러 가지 구조물들이 바로 공간그래프의 예라고 볼 수 있을 것이다.

다포체의 개수는 6개뿐이라는 것을 설명할 수 있음도 보였다. 또한 이 글에서는 논의하지 않았지만 3차원 도형을 2차원 공간에 펼친 전개도(development figure)와 평면그래프(planar graph)를 생각할 수 있듯이, 형식불역의 원리를 확장하면 4차원 도형의 전개도와 공간그래프⁷⁾도 생각해 볼 수 있다. 이러한 내용들의 대부분은 중등수준의 수학 영재 교수학습 자료로도 충분히 활용할 수 있을 것이다.

참고문헌

송상현(2002). 4차원 도형의 기하학적 표현과 그 적용에 관한 연구. **제 5회 Math Festival**, 5(2), 348-360. 서울: 수학사랑.
 우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.
 Coxeter, H. S. M.(1973). *Regular polytopes, 3rd edition*. New York: Dover Publications, Inc.
 Coxeter, H. S. M.(1989). *Four-dimensional geometry. Introduction to geometry, 2nd ed.* John Wiley & Sons.
 Hart, G. W. & Picciotto, H. (2001). *Zome geometry : hands-on learning with zome models*. Key Curriculum Press.
 Tennant, R. F. (2001). *Abstract construction projects and the imagination : hands-on projects for understanding abstract mathematical concepts through the use of polyhedral models and planar designs*. in <http://new.zonodome.co.kr/image2/Dr%20Raymond%20Tennant.pdf>

An investigation on the hyper-dimensional figure by the principle of the permanence of equivalent forms

Song, San Hun (Gyeong-In National University of Education)

In this study, I investigated some properties on the special hyper-dimensional figures made by the principle of the performance of equivalent forms representation. I supposed 2 definitions on the making n-dimensional figure : a cone type(hypercube) and a pillar type(simplex). We can explain that there exists only 6 4-dimensional regular polytopes as there exists only 5 regular polygons. And there are many hyper-dimensional figures, they all have sufficient condition to show the general Euler' Characteristics. And especially, we could certificate that the simplest cone type and pillar types are fitted to Pascal's Triangle and Hasse's Diagram, each other.

key words: permanence of equivalent forms(형식불역), hyper-dimension(고차원), regular polytope(정다포체), hypercube(초정육면체), simplex, Euler' Characteristics(오일러의 특성수), Pascal's Triangle(파스칼의 삼각형), Hasse's Diagram(하세의 다이어그램)