大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 13 卷 第 4 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.4, 463-483. Nov 2003

통계 자료의 정리와 표현에서 중학생들의 기호화와 해석화 과정 분석

김 선 희* · 이 종 희**

수학 학습 과정에서 학생들은 기호를 표현하고 해석하는 활동을 경험한다. 본 연구에서는 이러한 활동을 수학기호의 기호화와 해석화라 하고, Peirce의 삼원적 기호 모델을 토대로, 학생들이 "키가 크면 발도 크다"라는 대상체에서 상관관계에 대한 해석을 할 수 있도록 표현체를 구성하는 과정을 분석하였다. 영재교육원에 재학 중인 중학생들은 통계 자료를 정리하고 자신만의 기호를 만든 후 전체 학급 토론을 통해 규약적 기호가 무엇인지 학습하였다. 그 과정에서 학생들은 교사의 의도에 포함되지 않았던 세부적인 기호화와 해석화를 이행하고, 기존 기호형판에 의존했으며, 자발적으로 반성의 해석화를 하였다. 수학 학습에서 기호화와 해석화가 지속적으로 일어나는 것을 볼 때, 수학 학습 지도에서는 수학기호의 표현과 의미가 함께 구성될 수 있도록 하는 기호의 사용과 해석에 대한 교사의 안내 그리고 해석체와 표현체의 협상과 규약화가 이루어질 수 있도록 하는 학생들의 노력이 필요할 것이다.

Ⅰ. 서론

수학은 수학 사회에서 정한 특유의 상징체계와 그만의 문법을 가지고 있다는 점에서 언어라고 불리기도 한다(Krussel, 1998). 수학 상징과 용어, 그래프, 다이어그램 등은 수학 내용을 표현하는 기호로서, 학습 내용이자 수학적 추론, 알고리즘, 발견술을 안내하는 역할을 한다. 교사는 수학 수업에서 여러 기호를 사용하여 수학적 내용을 설명하고, 학생들에게 해석하게 하고, 수학에서 정한 기호를 학생들도 사용하도록 안내한다. 학생들도 수학 학습 과정에서 끊임없이 주어진 기호를 해석하고 그를 통해 사고하고 추론하며, 자신의 아이디어를 표현하여 의사소통하기 위해 기호를 사용하고 새로운 기호를 만들어 내기도 한다. 이렇게 볼 때, 수학 학습에서 학생들은 기호를 해석하고 표현하는 계속적인 과정을 겪는다고 할 수 있다. 이것을 본 연구에서는 기호의 기호화와 해석화라 본다. 기호화는 학생들이 수학적 대상이나 아이디어, 주목해야 할 대상을 기호로 표현하고 수학 사회에서 규정한 표기의 약속을 이행하면서 그에 합당한 수학적 의미를 부여하여 표현을 발전시키는 활동이며, 해석화는 수학기호의 표현이 어떤 대상을 대신하고 그 의사소통의 의도가 무엇인지에 대한 수학적 개념이나 아이디어를 이해하려는 활동으로 기호화에 동반된다. 수학 학습이 기호화와 해석화의 연속적 과정이라 할 때, 기호화와 해석화가 수학 수업 내에

* 광장중학교, ilovemath@empal.com
** 이화여자대학교, jonghee@ewha.ac.kr

서 어떻게 이루어지는지, 특히 학생들이 어떻게 기호를 사용하고 해석하고 있는지 이해하는 것은 교육적으로 필요한 일이다.

이를 위해 본 연구는 수학 수업 내에서 일어나는 기호화와 해석화 과정을 분석하려 한다. 수학적 지식을 이루고 있는 수학기호의 해석과 기호화는 외적 표현과 내적 표상의 연결에 있어 중요한 역할을 하며, 구성주의 관점을 취한 Cobb, Yackel & Wood(1992)는 수학적 진리가 공유된 것으로 여겨진 수학적 해석, 의미, 더 넓은 사회에 의해 제도화된 실행에 의해 설명된다고 보면서 외적 표현과 내적 표상의 일치를 위한 조작물의 사용보다 수학기호의 표현과 그 수학적 개념이나 의미에 충실한 학습 지도를 예로 보여준 바 있다. 표현과 의미를 대응시켜 참, 거짓을 파악하던 관점은 이제 맥락에 따라 대상체와 해석체, 표현체가 무엇을 의미하고 있는지를 인식하는 관점으로 변화될 것이 요구되며, 이는 기호학 분야의 연구와 서로 닿아 있다. 최근 언어와 기호의 중요성이 강조되면서, 언어학과 기호학의 연구 성과를 수학교육에 적용하려는 시도가 있어 왔다. Winslow (2003)는 고등 수준의 개념에서 CAS(computer algebra system)가 학생들에게 수학적 활동을 하게 한 잠재성을 기호학적 분석으로 제시하였고, Whitson(1997)은 상황의 중재에서 비판적 반성으로의 변화를 기호학적 과정으로 설명한 바 있으며, Roth와 Bowen(2001)은 수학자들이 그래프를 읽는 실행을 기호학적으로 분석하였다. 또, Sfard(2000), Gravemeijer(2002), Dörfler (2000), van Oers(2000, 2002), Cobb(2002) 등의 연구는 상징화의 모델과 교수 설계에 대한 제안을 하였으며, 김남균(2002)은 수학 교수-학습에서 상징화[1]가 어떻게 이루어지고 있는지의 과정과 교수 학습 방안을 고안한 바 있다. 기호화 과정을 분석한 대부분의 선행 연구들은 소수의 학생을 대상으로 장기간의 교수실험에 의해 학생들의 기호화와 해석화를 관찰하고 분석하였다.

그러나 실제로 수학 수업에서는 한 시간 내에서도 여러 기호가 사용되어 기호화와 해석화가 이루어지고 있으며, 기호의 올바른 사용과 해석이 한번 잘못 이루어질 때 그 이후의 학습 과정에도 영향을 미칠 수 있으므로, 본 연구에서는 수학 수업의 예시 안에서 이루어진 기호화 과정을 분석하여 학생들이 기호를 만들어 사용하고, 해석하는 과정을 심층적으로 알아보려 한다. 즉, 수학 수업의 환경에서 교사의 지도하에 학생들이 어떠한 기호화와 해석화 과정을 경험하는지 분석하고, 그 과정의 모델을 제시할 것이다. 연구자가 직접 수업을 주도했으며, 학생들 스스로 기호를 만들고 해석할 수 있도록 조별 학습을 시행했다. 개인의 기호화와 해석화 과정과 교사 주도의 규약적 기호화 과정을 살펴보았다. 중학교 1학년 4명의 수업 장면을 비디오로 촬영하고 학습 과정에 대하여 학생들과 심층 면담을 실시하였고, 교사의 주도로 어떻게 규약적 기호화에 이르렀는지 그리고 기호화와 해석화 과정의 특징을 알아볼 것이다.

1) 본 연구에서는 상징을 수학에서만 사용되는 연산, 문자, 숫자의 기호로 보고 기호의 하위 범주로 다루지만, 이들 선행 연구에서는 상징을 규약적 기호 뿐 아니라 종이 위의 표시, 무엇인가 다른 것을 대신하는 것 등으로 다른 해석을 하였다. 상징화의 의미가 연구마다 다르게 사용되고 있지만, 본 연구의 기호화와 크게 위배되지는 않는다.

Ⅱ. 수학 학습에서 기호화와 해석화

1. 수학 학습에서의 기호

수학에서의 기호는 상징, 수학 용어의 일상 언어, 도형, 다이어그램, 표, 그래프 등의 시각적 기호가 있다. 기호는 어떤 대상에 대한 해석이 필요한 표현이라 할 수 있으며, 이 중 상징과 일상 언어는 대상과 표현의 관계가 규약적인 언어기호이다. 상징은 과정과 절차에서 시작된 수학적 내용이 압축되어 하나의 대상으로 인식되는 수학 개념의 발전에서 중요한 역할을 한다. Pimm(1991)은 상징이 수학의 구조를 설명하고 기계적인 조작을 하게 하고 수학에 대한 반성을 가능하게 하면서 사고의 압축과 수행을 촉진시킨다고 하였고(Ruvenstein & Thompson, 2001, 재인용), Freudenthal은 수학을 내용과 형식의 교대작용에 의한 자율적인 성장을 하려는 경향이 있는 것으로 파악하면서(정영옥, 1997) 상징의 의미 확장과 형식 축약을 강조하였다. 일상 언어는 수학적 상징의 의미를 쉽게 이해하도록 돕는 역할뿐 아니라 수학적 문제 상황과 아이디어에 대해 생각을 반성하고 명료화하며, 수학적 아이디어를 토의하고, 가설을 설정하고, 주장을 펴 나가는 수단이자 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가하는 수단으로서 가치를 인정받고 있다. NCTM(1989, 2000)에서는 수학적 의사소통을 강조하면서, 수학교육의 중요한 목표는 수학적 아이디어를 설득력 있게 표현하고 다른 사람의 생각을 이해할 수 있는 것이며, 여기에는 상징적 표현 뿐 아니라 말과 글, 구체물, 다이어그램이나 그래프 등의 여러 표현이 가능하다고 하였다.시각적 기호는 수학적인 상징으로 표현된 관계로는 알 수 없는 패턴을 드러내는 중요한 역할을 한다(Lemke, 1998, O'Halloran, 1999, 재인용). 논리적인 설명을 하는 일상 언어와 상징의 표현으로는 수학적 대상의 직관적 이해에 도달하기 어려우며, 창조적인 직관과 발견술은 시각적 기호를 통해서 얻어질 수 있다. 수학에서 사용되는 시각적 기호로는 기하의 도형, 다이어그램, 함수의 그래프, 통계 그래프 등이 있다. 이 중에서 통계 그래프에는 막대그래프, 원그래프, 히스토그램, 정규분포곡선 등이 있으며 점, 선, 막대에 의해서 양의 관계를 보여준다. 본 연구에서 학생들은 통계 그래프를 기호화하고 해석화할 것이며, 그 과정이 분석될 것이다.

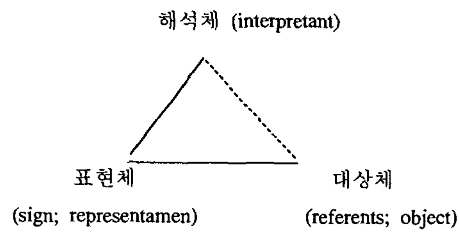
2. 기호화와 해석화에 대한 선행 연구

Vygotsky는 사고의 발달에서 기호와 의미가 중요한 역할을 한다고 보았다(Wertsch, 1985/1995). 이 역동적인 활동을 수학 학습에 적용시키려는 많은 노력이 있어 왔으며, 이 절에서는 수학 학습에서 수학기호에 의해 기호화와 해석화를 분석한 선행 연구들을 고찰해 본다. 학생들이 수학 학습에서 어떤 학습 내용을 배우든지 사고와 지식을 구성하는 매개 역할을 하는 것은 기호이며, 학습자는 끊임없이 기호를 사용하고 해석하는 기호화와 해석화를 경험한다.

Gravemeijer, Cobb, Bowers & Whitenack(2000)은 교수 실험에서, 교사가 학생들의 설명을 수식과 간단한 표기로 나타내면 나중에 학생들도 교사가 제시한 규약적인 기호를 사용할 수 있게 되는 과정을 보여주었다. 상황의 모델(model of)이 특정한 환경의 활동에 묶여 있다가 학생들의 추론이 특정한 상황에 대한 의존에서 벗어나면서 일반적인 활동이 되고, 이러한 변화는 학생들이 참조적인 활동을 반성하는 과정으로 보인다. 그 과정에서, 모델은 실재가 되고 추상적인 것을 위한 모델(model for)로서 역할

을 하며, 수학적 활동을 기호로 나타내는 방법으로서 추론을 뒷받침하게 된다. 기호는 새로운 아이디어와 이해를 발전시키려 할 때 나타나며, 사회적으로 받아들여질 수 있는 규약적 기호로의 발전은 수학적 아이디어를 의사소통할 수 있는 방법을 확립하는 것이다. 발명된 기호의 의미는 처음에는 환경과 활동에 연결되고 나중에는 새로운 기호가 환경에서 분리되어 해석된다. 이들이 설명한 기호화 과정은 수학적 활동의 맥락 내에서 의미를 발달시키는 수평적 수학화에서 수직적 수학화로 이르는 과정으로 볼 수 있다. 기호의 도입에서 탐구적 접근을 취한 Gravemeijer 등과 달리 Sfard(2000)는 Saussure의 이원적 모델에 기초하여 표현적 접근을 취하고, 어떤 대상의 표현이 수학적 행동과 과정을 통해 또다른 기호의 의미가 되는 것으로 과정을 설명하였다. 통계 자료 분석 과정을 모델링한 Cobb(2002)도 Sfard와 같이 기호를 기표(記表)와 기의(記意)의 조합으로 보고 기호화의 과정을 의미작용 고리에 의해 설명하면서 구상화(reification)를 보여준 바 있다.

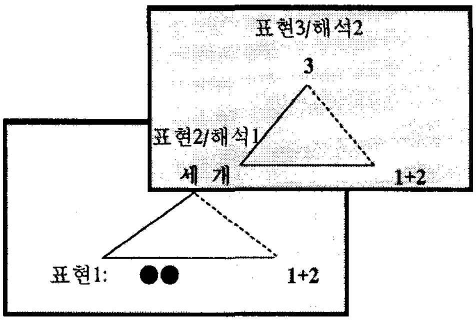
위의 연구들은 기호화를 Saussure의 이원적 모델에 의해 설명하였으나, 현대 기호학의 거두인 Peirce는 기호를 [그림 Ⅱ-1]과 같이 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 요소를 가진 것으로 보았다. 시각과 같이 감각을 통해 얻을 수 있는 표현으로 기호를 나타낸 것이 표현체이고, 기호가 대신하고 있는 것이 바로 대상체이며, 기호에 의해 떠오르는 생각이 바로 기호의 해석체이다. 기호를 삼원적 모형으로 보는 것은 수학자이자 논리학자인 Frege의 의미론 삼각형(Arzarello, Bazzini & Chiappini, 2001)과 Ogden과 Richards(1923)의 인식론 삼각형에서도 설명되고 있다. 본 연구에서는 수학적 표현이 나타내는 대상의 실재를 기호의 대상체로 생각하고, 해석체는 인간의 주관적인 기호 해석으로 본다. 기호는 대상체에 대한 표현체가 존재하고, 그에 대한 해석이 이루어져야 하는 것이다. 기호의 의미와 표현이 수학에서 규정되어 변하지 않는 것으로 해석된다면, 직접전달에 의해 교사의 지식이 학생에게로 이동할 수 있을 것이다. 그러나 학습 상황에서 학생들은 동일한 기호를 보고도 여러 해석을 하며, 그 해석이 다시 협상될 수 있다. 이러한 역동적인 기호의 해석과 사용 과정을 고찰하기 위해서는 이원적 기호보다 Peirce의 삼원적 모델이 필요하다. 수학학습에 기호학의 이론을 연결시키고자 한 Presmeg(1997, 1998)은 Lacan의 의미작용 고리를 사용하여 기표와 기의의 생성을 통한 문제해결 과정 등을 설명하였고, 최근 Peirce의 삼원적 모델과 연결된 기호의 의미 고리를 고려한 이론의 확장이 더 설득력 있다는 제안을 하였다(Presmeg, 2002). 수학기호에 대한 현재의 연구 결과들을 토대로 그리고 수학기호의 해석과 기호화가 학습자와 상황의 맥락을 떠나서 고려될 수 없다는 점에서도 기호에 대한 인식론적 모델은 Peirce의 삼원적 모델을 따르는 것이 합당할 것이다.



[그림 Ⅱ-1] Peirce의 삼원적 기호 모델
(Trabant, 1996/2001)

수학기호의 표현을 구성하는 활동은 기호화이며, 기호의 표현에 따라 의미를 학습 과정에서 성장시키는 활동은 해석화에 해당한다. 수학적 대상에 대한 의미의 이해는 표현의 발전

과 더불어 표현과 의미의 상호작용을 통해 연속적으로 이루어진다. 예를 들어, [그림 Ⅱ-2]와 같이 1+2를 구하고자 할 때, 구슬을 이용하여 상황을 표현해 보고, 이것을 '세 개'라고 해석한 것은 다시 구슬의 표현이 되며, 이것의 해석은 더 높은 수준의 기호 표현인 상징 '3'이 될 수 있으며, 이것을 의미작용의 상승이라 한다.



[그림 Ⅱ-2] 1+2가 3이 되는 과정

3. 기호의 요소 분석틀

Peirce의 삼원적 모델을 토대로 기호의 대상체, 표현체, 해석체 세 가지 요소가 기호화와 해석화에서 어떤 의미로 사용되고 있는지 분석한다. 기호화와 해석화 과정의 해석체, 대상체, 표현체가 무엇인지, 수업 분석에서 드러난 것을 토대로 살펴보았다. 학생들이 표현을 만들고 사용하려는 기호화의 상황에서 해석체는 학습목표나, 교사의 지시 등의 당위적 성격을 가진 것과 표현을 만들거나 사용하기 위해 필요한 또는 편리하다고 생각한 것, 은유나 환유의 가설적 추론의 해석이 되며, 해석화의 상황에서 해석체는 표현체가 대상체를 제대로 표현하고 있는지의 타당성이나 그에 대한 느낌, 명확한 수학적 개념, 은유나 환유의 추론이다. 대상체는 기호화에서 문제나 진술, 표현을 만들기 위한 매개체, 기호화의 아이디어, 표현의 일부가 되는 것일 수 있으며, 해석화에서는 사실이나 문제, 맥락적 예 등이다. 표현체는 기존의 수학적 표현, 기호화하려는 표현의 재료, 자신이 만든 표현, 타인의 표현으로 나눌 수 있었다. 기호화와 해석화에서 기호의 요소를 구분한 틀은 <표 Ⅱ-1>과 같으며, 본 연구에서 학생들의 기호화, 해석화 과정은 이에 의해 분석된다. 이 틀은 Peirce의 기본 구조인 [그림 Ⅱ-1]을 기초로 학생들의 기호화 과정에서 나타난 해석체, 대상체, 표현체를 구분한 것이다. 본 연구에서 기호화는 수학적 대상이나 아이디어의 대상체를 해석체가 목표나 표현체에 필요한 것으로 해석하여 표현체로 나타내는 활동이며, 해석화는 표현체를 보고 수학 개념이나 활동의 평가로 해석체가 해석하여 수학적 진술이나 예시의 대상체를 알아가는 활동이다.

<표 Ⅱ-1> 기호화와 해석화에서 기호 요소의 의미

해석체		대상체		표현체
기호화	해석화	기호화	해석화	
목표(a)	지적 평가(ie) 느낌의 평가(f)	문제나 진술(P)	문제나 진술(P)	기호화하려는 표현의 재료(*m*)
		표현을 만드는 매개체(M)		자신이 만든 표현(*s*)
표현체를 위해 필요한 것(n)	수학개념 (c)			동료의 표현(*p*)
		표현의 일부(PR)	맥락적 예(C)	기존의 것을 자신이 변형한 표현(*se*)
은유(m) 환유(me)	은유(m) 환유(me)	표현을 만드는 아이디어(I)		기존의 것을 동료가 변형한 표현(*pe*)

수학기호는 수학적 실재, 성질, 관계, 과정, 행동, 구조를 뜻하는 대상에 대해 수학 사회에서 약정한 표기로 발전하며, 그 의미가 해석되고 사용규칙이 정해져야 한다. 수학기호는 학습자와 교사의 마음속에 기의와 기표로서 존재하는 실재이기보다, 담화 내에 포함된 대상으

로 수학 개념이나 연산, 또는 맥락 내에 존재하는 대상이 표현된 것을 인간이 자발적으로 해석하는 역동성을 갖는다. 기호의 표현에 따라 기호의 해석도 학습 과정에서 성장하며, 수학적 대상에 대한 의미의 이해는 표현의 발전과 더불어 표현과 해석의 상호작용을 통해 연속적으로 이루어지기에, 수학 기호의 이해는 표현체, 대상체, 해석체의 조화로운 상호과정에 초점을 두어야 한다. Roth와 Bowen(2001)에 따르면, 기호는 해석체에 의해 세련화되고 추구되는 대상체와 관련하여 정해지는 것으로 기호의 의미 작용은 학습이 끝날 때까지 계속될 수 있다.

III. 연구 방법 및 대상

1. 연구 방법

수학 수업에서 학생들이 경험하는 기호화와 해석화 과정을 이해하고 그에 대한 분석과 교육적 고찰을 하기 위해, 수학 수업 내에서 4명의 그룹을 집중적으로 관찰하고 그들의 수업 중 대화를 비디오로 녹화하여 기호화와 해석화 과정을 살펴본다. 여러 학생이 교실에 모여 있기 때문에 학생들 간의 조별 토론에 교사가 많이 개입할 수 없었으나 그들의 사고 과정을 조사하는 심층 면담에서 학생들의 생각을 자세히 알 수 있었다. 수업 내용은 통계 영역으로, 학생들은 각자가 조사한 자료를 바탕으로 '키가 크면 발도 크다'를 확인하기 위해, 자신의 자료를 토대로 결과를 추측하고, 조별로 자료를 정리하고, 정리 방법을 만든다. 김선희 · 이종희(2003)의 교과서 분석에 따르면, '도수분포표'에서 학생들이 도수를 찾아 표를 만들고 나중에 그 표를 하나의 대상으로 다루듯이, 통계 영역에서의 수학 용어는 조작에서 대상으로 변화된 것이 많았다.

따라서 통계에서 수학 용어의 기호는 학생들의 실질적 조사와 자료 정리의 과정을 통해 하나의 대상으로 여겨질 수 있는 그래프와 표의 기호로 발전한다. 관찰된 수업에서 교사는 학생들 스스로 조사한 자료를 가지고 대상으로 다룰 수 있는 기호를 만들어 내도록 격려하였다.

교실에 설치된 두 대의 캠코더가 교사와 그룹을 촬영하고, 학생들의 대화 내용을 녹취하여 기호화 과정을 분석한 후 회상적(retrospective) 방법에 의해 학생들과 심층 면담을 하여 학생들의 생각을 알아보았다. 수업이 이루어진 1주일 후의 면담에서 4명의 학생들 개개인은 학습 과정에서 생각한 것에 대해 자세히 설명하였다.

2. 연구 환경과 대상

(1) 수업 환경

연구 대상은 중학교 1학년에 재학 중인 학생들로, 창의력과 수학적 문제해결력이 뛰어나다고 판단되어 서울시 지역교육청 영재교육원에 참여하고 있는 학생들이다. 영재교육 계획에 의해 선발된 20명의 수학 영재반 학생이 한 교실에서 수업을 받았고, 교실 내에는 조별 책상, 학생용 컴퓨터, 교사용 컴퓨터, 실물화상기, 프로젝션 TV, 각종 수학교구가 구비되어 있다. 교육원의 지도교사는 모두 12명으로, 영재교육을 담당할 능력이 있다고 교육청에 의해 판단되어 위촉된 수학교사이다. 방학 집중 교육 기간동안 진행된 통계 영역의 수업 270분 중에서 초반 90분의 내용을 분석 대상으로 하였으며, 수업 후 1주일이 지나 학생 4명과 심층 면담도 실시하였다.

(2) 연구 대상

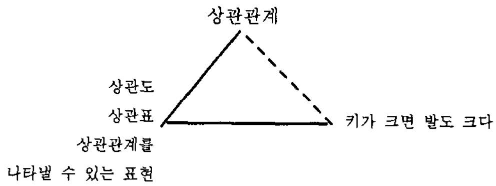
본 연구에 참여한 학생들은 모두 수학에 흥미를 가지고 학업에 열심히 임하려는 자세를 가지고 있으며, 수학적 성취에서도 일반 학생의 능력을 넘어선다. 학교 교육과정에서 학습하지 않은 통계 내용에 대해 몇몇 학생들은 도수분포표, 히스토그램 정도의 용어를 알고 있었다. 상관관계 개념은 9-나 단계의 학습 내용이지만, 교사들은 자료 중심의 학습으로 영재학생들이 이해할 수 있는 내용이라 판단하여 학습 주제로 선정하였다. 4명의 학생들에 대하여 여러 지도교사들은 다음과 같은 평을 하였다.

학생 A는 교육원과 먼 거리에 거주함에도 불구하고 항상 수업 전에 일찍 나오는 열정을 가진 학생으로, 수학자가 꿈이며 책임감이 강한 학생이다. 학생 B는 수학에 상당한 흥미를 갖고 있으나, 표현과 의사소통 능력이 부족한 편이다. 학생 C는 여학생으로, 인정받을 수 있는 결과를 얻기 위해 항상 노력하며 진중하게 사물을 관찰하고 탐구하는 자세를 가지고 있다. 학생 D는 학생 B와 소속 학교와 학급이 동일하며 과학자가 꿈이고, 냉철하고 비판적 사고로 수학적 원리에 대해 항상 알려고 질문하는 학생이다.

Ⅳ. 학생들의 기호화와 해석화 실제

1. 수업 절차

본 연구의 분석에서 초점이 된 수업의 교사는 [그림 Ⅳ-1]과 같이 의도한 내용을 학생들이 학습하도록 안내하고 있다. "키가 크면 발도 크다"는 것이 사실인지 알아내기 위해 학생 스스로 자료를 조사하고 정리하여 상관도나 상관표, 또는 이와 유사한 표현을 만들고, 그 해석을 통해 두 변량 사이에 서로 관련이 있다는 상관관계의 개념을 형성하게 하는 것이 수업 내용이었다.



[그림 Ⅳ-1] 교사가 의도한 학습 내용

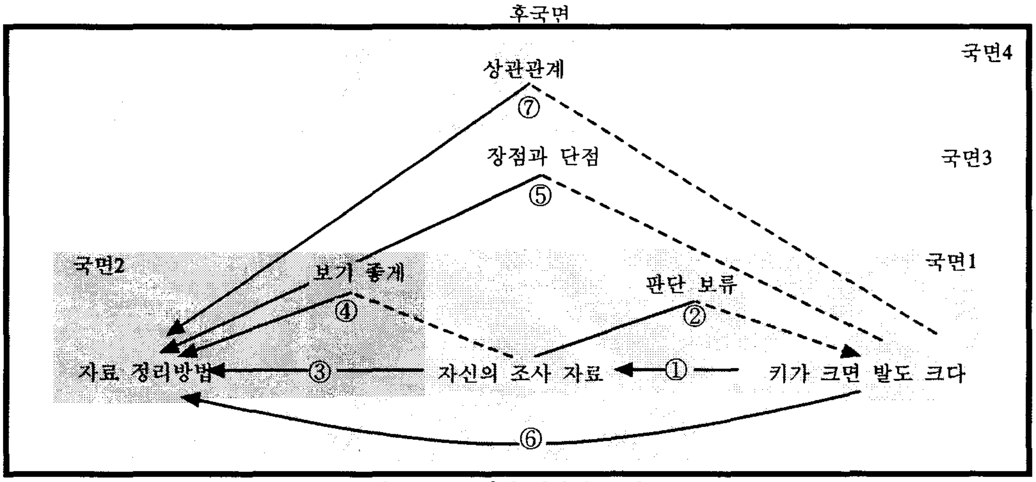
자료의 정리에 의해 상관관계 개념을 학습하려는 수업의 전반적인 절차는 다음과 같은 국면으로 나뉠 수 있다. 괄호 안은 학생 녹취록의 대화에 번호를 붙인 것이며, 수업은 90분, 심층 면담은 30분가량 진행되었다.

▷ 개요(1-36): 교사가 통계에 대한 전반적 개요 설명을 하고 문제 상황을 제시한다.
▷ 전국면(37-117): 자료 조사의 어려움과 개선점을 조별 토론한 후 발표한다.
▷ 국면1(118-127): 학생들은, 자신이 조사한 자료를 가지고 키가 크면 발도 크다고 자신 있게 말할 수는 없지만 그렇지 않다는 확신 또한 할 수 없었다.
▷ 국면2(128-263): 한 눈에 보기 좋게 표현할 수 있는 기존의 자료 정리 방법을 생각해낸다.
▷ 국면3(264-324): 보기 좋게 표현할 수 있는 자료 정리 방법의 장단점을 "키가 크면 발도 크다"는 결과를 이끌어내는 것에 비추어 생각한다.
▷ **국면4**(325-871): "키가 크면 발도 크다"는 사실을 알 수 있도록 학생 스스로 자료 방법을 선택하여 상관관계에 대한 해석을 내린다.
▷ **후국면**(872-875, 876-1074 심층 면담): 수학에서의 자료 정리 방법은 무엇인지 알아보고, 심층 면담을 통해 기호화와 해석화 과정에서 학생들의 사고를 알아본다.

수업 내용의 자세한 안내는 아래 [그림 Ⅳ-2]와 같다. 번호는 교사가 각 국면별로 학생들을 안내한 순서이다. 수업의 개요에서 교사는 통계가 무엇에 관한 학문인지에 대한 개괄적인 설명을 한 후 전국면에서는 학생들이 실제로 자료를 조사하면서 겪은 어려움과 다음에 조사를 할 때 유의할 점을 함께 생각하였다. 어떤 학생은 자신의 신체를 자료로 하여 "키가 크면 발도 크다"를 해석하려 한다. 국면1에서는 토대로 "키가 크면 발도 크다"라는 결론을 내릴 수 있는지 학생들 자신이 조사한 자료[2)]로 살펴본다(①). 그리고 그에 대한 논의는 자료의 수가 작다는 이유로 결론을 내리지 못하고 판단을 보류한다(②). 국면2에서 학생들은 자료를 정리하는 방법에 어떤 것이 있는지 생각하고(③), 어떤 것이 보기에 좋은 것인지를 각자 판단한다(④). 국면3에서는 각각의 자료 정리 방법이 결론을 표현하는데 어떤 장단점이 있는지 생각한다(⑤). 국면4에서는 학생 스스로 결론에 도달하기 위해 자료를 정리할 수 있는 방법을 선택하여 표현하고(⑥), 그로부터 상관관계의 개념을 형성한다(⑦). 후국면에서는 전체적으로 수업 내용을 정리하면서 학생들이 각기 생각해 낸 자료의 정리 방법을 소개하고 어떤 표현 방법이 좋은 것인지 확정지어 규약적 기호화를 시도한다. 그리고 심층 면담을 통해 학생들이 수업 중 생각한 내용을 다시 한번 생각해 본다. 본 연구는 학생들의 기호화와 해석화 과정을 분석하는 것이 목적이기 때문에, 학생 개개인이 어떻게 새로운 표현을 만들어 가는지를 알 수 있는 국면4와 규약적 기호화에 이르는 후국면에 초점을 두었다.

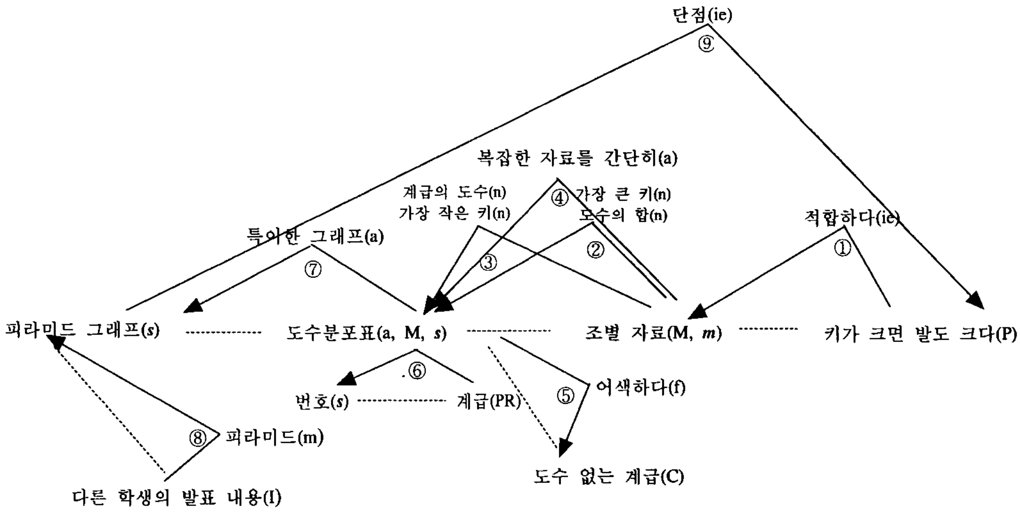
2. 관찰된 학생 개개인의 기호화

각 학생이 수학 수업 내에서 어떤 기호화와 해석화 과정을 경험하는지 4명의 학생을 관찰하였다. 비디오 녹취록과 학생들과의 심층 면담을 통해 학생들의 기호화와 해석화 과정을 Peirce의 삼원 모델을 기초로 도식화하고, 각각의 해석체, 대상체, 표현체를 분석하였다. [그림 Ⅱ-1]의 모델에서는 대상체와 해석체의 관계가 직접적이지 않아 점선으로 표시되었으나 앞으로는 연구에서 관찰된 내용을 간단히 설명하기



[그림 Ⅳ-2] 수업의 전반적 국면

2) 1인당 30명씩 키와 발사이즈를 조사해 왔음



[그림 Ⅳ-3] 학생 A의 기호화와 해석화

위해서 대상체와 표현체는 점선으로 잇고, 기호화와 해석화는 실선의 화살표로 표현한다.

삼각형 구도 내에서 오른쪽은 대상체, 왼쪽은 표현체, 위쪽의 것은 해석체이며, 기호화는 ◀── 로, 해석화는 ──▶ 로 표시되며, 시간의 진행 방향은 오른쪽에서 왼쪽, 아래에서 위로 나타낼 것이다. 학생들의 기호화에서 어떤 과정이 있었는지는 Dörfler(2000)의 기호화 요소인 프로토콜[3]에 의지한다. 학생들의 수업 중 대화 내용과 필기한 내용이 기호화와 해석화 분석에 사용되었으며, 심층 면담의 자료를 참조하여 국면4의 과정을 다룬다.

(1) 학생 A

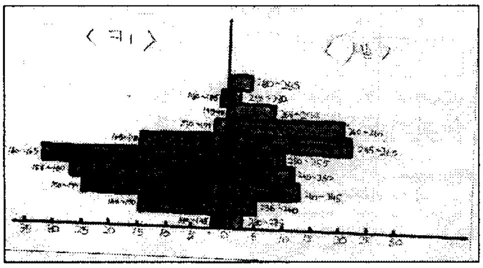
학생 A는 수업 시간동안 가장 꾸준하고 열심히 참여한 학생이다. "키가 크면 발도 크다"는 것을 확인하기 위해서는 조별로 조사한 자료를 살펴보는 것이 적합하다고 생각했으며, 조별 자료와 같이 복잡하고 산만한 것을 간단히 하기 위해 엑셀 파일에 표를 만들었다. 이 표는 학생들 개개인의 자료를 입력하지 않고 키와 발 사이즈 각각의 계급을 나누고 그에 해당하는 학생수를 찾은 도수분포표의 형식이었다. 도수분포표를 만들면서 가장 큰 키와 가장 작은 키, 도수의 합이 얼마인지 확인했고 어떤 계급의 도수가 얼마인지 동료들의 검색을 요청하기도 했다. 일단 세어놓은 자료가 무엇이었는지 자꾸 놓쳐서 같은 일을 여러 번 반복하자 나중에는 계급에 번호를 붙이고 자료마다 번호를 써서 도수분포표 작성을 쉽게 하였다.

550. B: 140이상 145미만 동그라미 먼저.
551. A: 이거 망가뜨려도 된다고. 알았어.
552. B: 표가 재미있게 변할 거야.
553. A: 야, 이건 동그라미. 아냐. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 하자.
554. B: OK. OK. 그게 더 좋네.

3) Dörfler(2000)는 인지 학습을 뒷받침하는 기호화의 요소로 원형(prototype)과 프로토콜(protocol), 척하는(as-if) 태도를 설명하였다. 이 중에서 프로토콜은 활동을 기호로 기록하고 해석할 때 이전 활동 단계의 결과를 재구성하는 인지 과정으로, 기호의 표현 기록이다.

555. B: 140에서 145. 이게 효과 더 좋아.

복잡한 자료를 간단히 하려는 목적이기 때문에 원자료는 표로 단순해졌지만, 동료들에 비해 특이한 표현이 나오지 않자 국면3에서 다른 조 친구가 발표할 때 얻은 아이디어로 피라미드 그래프를 만들었다. 이 그래프는 [그림 Ⅳ-4]과 같이 두 개의 히스토그램을 붙여놓은 것이었다.



[그림 Ⅳ-4] 학생 A가 만든 그래프

학생 A는 이 그래프가 남과 다른 특이한 것이며 도수가 얼마인지 알 수 있기는 하지만 키와 발사이즈의 관계가 드러나지 않는 단점이 있다고 해석하였다.

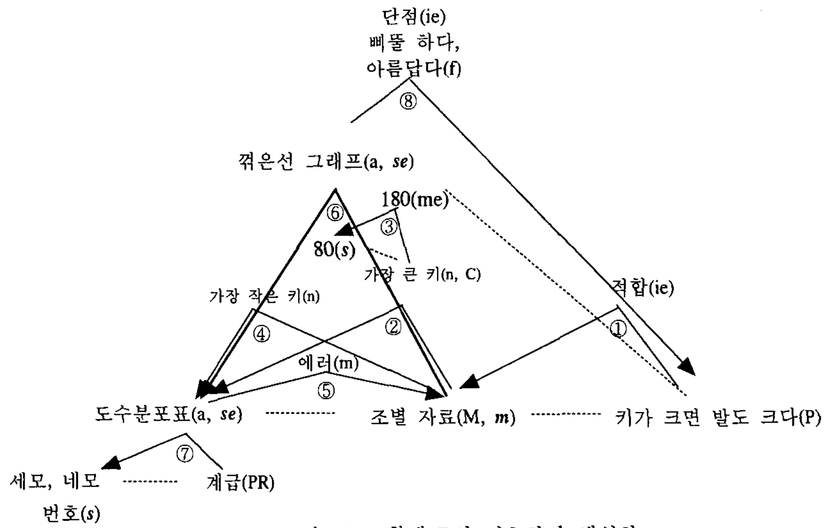
949. A: 특이하긴 한데요. 비교가 안 돼요. 아까 말했던 키가 큰 사람이 발도 크다는 것을 알 수가 없고요. 그냥 몇 명인거만 알 수 있어요.

이러한 기호화와 해석화 과정을 삼원적 모델로 구성하면, [그림 Ⅳ-3]이 된다. 학생 A의 기호화 과정은 오른쪽에서 왼쪽의 시간으로 진행되어 선형적이었으며, 전체 수업 내에서 보았을 때 특이하고 변화를 추구한 표현을 만들기 원했다. 자료를 정리함에 있어 기호를 사용하여 편리하고 쉬운 방법을 추구하는 경향이 있었지만 목적에 맞는 그래프 표현을 찾지는 못했다.

(2) 학생 B

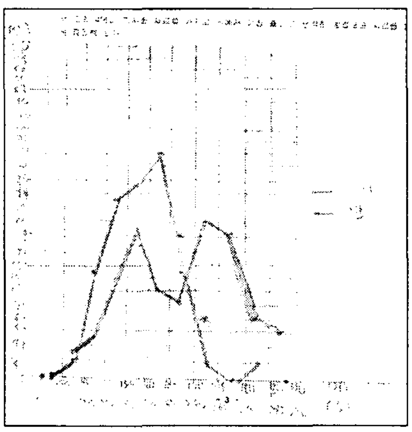
학생 B는 학생 A의 도수분포표를 가지고 자신만의 꺾은선그래프를 만들었다. 학생 A와 마찬가지로 “키가 크면 발도 크다”는 것을 알기 위해 조별로 조사한 자료가 그 표현으로서 적합하다고 판단하였다. 그리고 예전에 본 적이 있는 꺾은선그래프를 만들기로 했다. 학생 A가 컴퓨터를 이용하여 표를 만드는 것을 보고, 함께 도수분포표를 만들었다. 학생 수를 찾는데 학생 A와 똑같은 착오가 생기자 세모, 네모 등으로 계급을 표시할 것을 제안했고, 학생 A의 의견대로 번호를 매기기로 하였다. 도수분포표 작성 과정에서 도수가 없는 계급을 에러라고 하였으나 그 원인에 대해 찾아보지는 않았다. 도수분포표를 만들기 위해 가장 큰 키와 가장 작은 키가 얼마인지 알아야 한다고 해석했으며, 가장 큰 키가 속한 계급을 80이라고 부르면서 환유의 추론을 보여주기도 했다. 학생 B가 도수분포표를 만든 것은 자신의 꺾은선그래프를 그리기 위해서였으며, 도수분포표를 표현체로 하여 꺾은선그래프를 해석하고, 꺾은선그래프를 새로운 표현으로 하는 의미 작용의 상승이 일어났다. 이것은 [그림 Ⅳ-5]에서 굵은 선으로 나타나 있다. 그러나 자신이 만든 표현이 키와 발 사이즈의 관계에 대한 원하는 정보를 알려주지 않는다는 것을 단점으로 평가했다.

536. T: 여기 있는 애들은 키가 큰 애들인데, 이 애들의 발 사이즈가 여기인지 저기인지 알 수가 없잖아.
537. C: 어허.
538. B: 그게 바로 단점인데요.



[그림 Ⅳ-5] 학생 B의 기호화와 해석화

기호화 도중 학생 C가 새로운 방법을 시도할 것을 권유했으나 자신의 생각이 계속 옳다고 생각했으며, 심층면담에서 자료의 정리가 무엇을 하고자 한 것인지 완전히 이해하지 못하고 있었다고 말했다. 학생 B의 기호화 과정은 [그림 Ⅳ-5]에, 최종 그래프는 [그림 Ⅳ-6]에 있다. 학생 B는 기호화 과정에서 표현체가 어떠해야 한다는 목표를 설정하고 기호화를 했으나 실제로 그 기호가 무엇을 대상체로 하는지



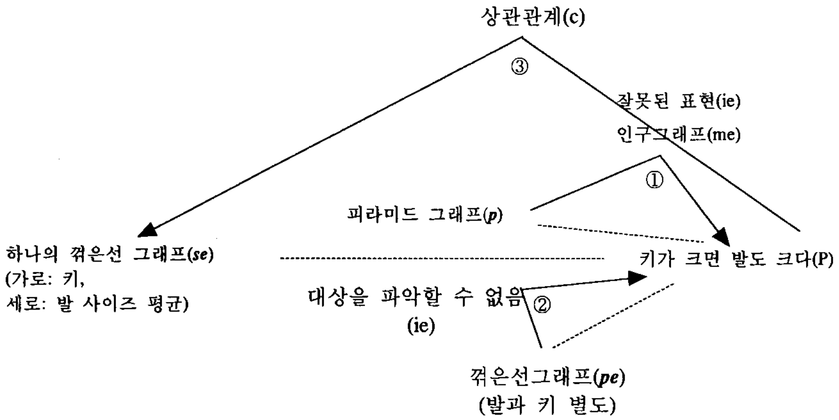
[그림 Ⅳ-6] 학생 B가 만든 그래프

를 함께 이해하고 있지 못했기 때문에 원하는 결과를 얻지는 못했다.

(3) C 학생

학생 C는 조별 활동에서 세 명의 남학생들에게 학습 방향에 대한 제시와 지적을 계속하였다. 조별로 함께 자료의 정리를 하기 위해서 친구들의 활동을 눈여겨보고 있었지만, 그들의 그래프가 "키가 크면 발도 크다"는 대상을 표현하기에 적합하지 않다는 판단을 하고 그에 대해 지적하였다. 학생 A의 피라미드 그래프에 대해 비판을 할 때는 대상체를 잘못 표현하고 있으며 그런 그래프는 인구 조사 결과를 보고 하는 '인구그래프'라는 환유적 해석을 하였고, B의 꺾은선그래프에 대해서도 대상체를 파악할 수 없다고 지적했다.

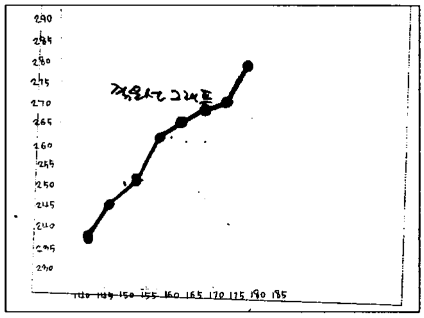
584. C: 너네처럼 하면은... 내가 자꾸 말해서 태클 거는 것 같은데. 뭐지. 키 큰 사람이 발이 크다고 하는 게...
585. B: 그게 꺾은선그래프야. 그게 꺾은선그래프 단점이야, 그게.



[그림 Ⅳ-7] 학생 C의 기호화와 해석화

586. A: 단점.
587. C: 그게 하려는 거잖아.
588. B: 어쩔 수 없어. 내가 꺾은선그래프를 하려고 한다고.
589. C: 너 꺾은선그래프 해? 어? 근데 저거(도수분포표)는 그게 안 된다고.
590. B: 꺾은선그래프의 단점이라니까.
591. C: 아니, 저걸로 하면 안 된다고.

그러나 대안의 제시를 하지는 않았으며, 남학생들도 학생 C의 의견을 존중하지 않았다. 학생 C는 교사가 나누어준 활동지 뒷부분 내용을 보고 키와 발 사이즈를 가로, 세로로 놓은 좌표에서 그래프를 그리는 것이 좋다고 판단하였으며 그에 맞게 자료를 정리하기 위해서는 키의 계급에 발 사이즈 평균을 대응시켜 점을 찍기로 하였다. 이것은 [그림 Ⅳ-8]에 있으며, 기존의 수학적 표현에 자신의 아이디어를 종합하여 발전시킨 표현체였다. 학생 C는 이를 통해 키가 크면 발도 크다는 대상체를 알아내는 상관관계의 해석을 할 수 있었으며 그 과정은 [그림 Ⅳ-7]에 있다.

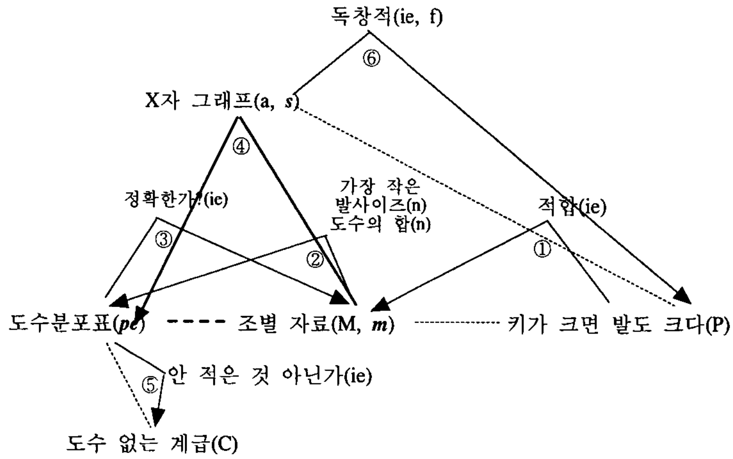


[그림 Ⅳ-8] 학생 C가 만든 그래프

(4) 학생 D

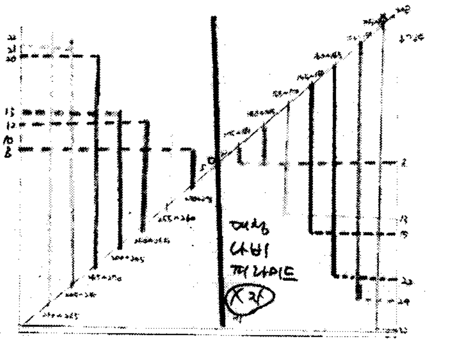
학생 D는 학생 B와 마찬가지로 처음부터 자신의 표현체를 어떻게 만들지 목표로 설정하고, 학생 A와 학생 B의 도수분포표를 이용하기로 하였다. 도수분포표가 옳게 작성되고 있는지에 대해 질문하고, 도수가 없는 계급에 대해서는 안 적은 것이 아닌가 하는 의심적인 평가를 하기도 했다.

647. D: 270에서 275는 왜 없냐. 원래 한 명도 없는 거야. 아님 안 적은 거야?



[그림 Ⅳ-9] 학생 D의 기호화와 해석화

자신만의 독특한 그래프를 만들고 싶어 했고 그 모양에 따라 자신의 것을 X자 모양의 그래프라고 이름 붙였으며, 독창적이라고 평가했다. 학생 D는 '키가 크면 발도 크다'라는 대상체를 나타내는 표현체를 만드는 것이 학습 목표라는 것을 제대로 이해하고 있지 못했기 때문에 원하는 결과를 얻지 못했다. 그러나 학생 D의 그래프는 학생 A와 학생 B의 그래프처럼 도수의 분포를 알 수 있을 뿐 아니라 순위 또한 알 수 있는 장점이 있기 때문에 학생 D는 그 의미를 남들도 알아주기를 바랬다. 학생 D의 기호화와 해석화 과정은 [그림 Ⅳ-9]에 그래프는 [그림 Ⅳ-10]에 있다.



[그림 Ⅳ-10] 학생 D가 만든 그래프

세 학생들의 수업 활동을 관찰하고 난 후 학생 각자의 기호화와 해석화에서 무엇을, 왜 그렇게 생각하는지 심층 면접을 실시하였다.

학생들에게 다음에도 유사한 주제에 대한 결론을 내리라는 과제가 주어지면 어떻게 할 것인지 질문하였다. 학생들은 모두 자료를 얻기 위해 조사를 할 것이며, 자료 정리의 방법에서 학생 A와 학생 C는 학생 C의 것을 좀더 발전시킨 꺾은선그래프를, 학생 B는 다른 조의 발표 중 나왔던 점숫자그래프(점을 숫자로 표시한 상관도), 학생 D는 또다른 특이한 그래프를 만들겠다고 하였다. 그리고 스스로 수학에서 사용되고 있는 그래프를 알아내기에는 시간과 노력이 많이 들기 때문에 교사가 알려주는 것이 좋으며, 학생 A와 학생 C는 수학의 규약적인 표현 방법을 알더라도 자신의 아이디어가 들어간 것으로 발전시키겠다고 하였다. 학생 B는 수학에서 사용되는 규약적 표현을 알게 되었다면 그것을 사용하는 것이 옳은 것이라 하였고, 학생 D는 규약적인 수학 표현을 사용해야 의사소통이 되기 때문에 그것을 따라야 한다고 했다.

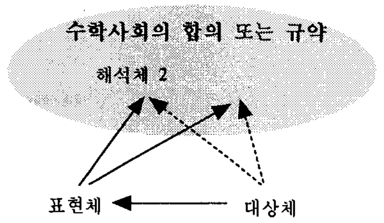
3. 규약적 기호화와 해석화

국면4에서 개인적으로 기호화와 해석화에 임했던 학생들은 후국면에서 교사와 자신들의 학습 과정을 되돌아보면서, 어떠한 기호화로 향해야 하는지를 생각했다. 후국면의 수업 시간 동안에는 조별로 협상된 그래프를 발표했다. 5개의 조에서 학생들은 점그래프(상관도), 점숫자그래프(점을 숫자로 쓴 상관도), 평균막대그래프(학생 C가 제시한 꺾은선 대신 히스토그램), 비교그래프(학생 B가 제시한 꺾은선그래프), X자 그래프, 꺾은선그래프 등을 발표하였다. 각각의 그래프 이름은 그래프 특성에 따라 학생들이 붙인 이름이다. 연구 대상의 학생들 중 B, C, D도 학급 전체에 발표를 하였고, 여러 그래프를 보면서 학생들은 상관관계를 어떻게 해석해야 하는 건지 말하였다.

상관도인 점그래프에 대해 발표한 학생은 회귀직선을 보여주면서 키가 클수록 발 사이즈도 커지고 있다는 상관관계 개념을 설명하였다. 그리고 상관도에서 점을 숫자로 표현한 점숫자그래프를 발표한 학생도 상관관계를 회귀직선에 의해 보여주려 했다. 학생 C와 같이 키를 계급으로 하고, 그 계급에 속한 학생들의 발 사이즈의 평균을 구하여 히스토그램을 그린 한 학생은 일정하게 커지는 경향에서 벗어난 값에 관심을 두고 발표를 하였다. 상관관계라는 해석을 하기 위해서는 키의 계급이 클수록 막대의 발사이즈 값(평균)이 커져야 함을 교사가 확인시켰고, 이 학생의 자료 조사 결과는 그에 맞지 않았다. 학생들은 조사한 학생들의 수가 더 많았다면 다른 결과가 나왔으리라 예상했고, 처음에 이 평균막대그래프를 제안한 학생은 '몇 개를 제외하고는 올라가는 경향'이 있다고 하면서 그래프가 선형적으로 증가하지 않더라도 그런 경향성에 의해 상관관계를 말할 수 있다는 주장을 하였다.

803. 진영: 막대그래프 안에 써 있는 숫자는 거기에 있는 학생수고요. 그리고 발의 평균이 몇 개를 제외하고는 올라가는 경향이 있어요. 그래서 결과적으로 키가 클수록 발도 크다는 것을 알 수 있어요.

대상체가 개인과 상황에 따라 다르게 해석되는 경우, 사회적 합의 또는 수학사회의 규약을 통해 의미가 합일되어야 한다. 양의 상관관계를 보이는 그래프를 보고도 학생들은 위와 같이 회귀직선에서 벗어나는 것에 초점을 둘 수도 있고 전체적인 경향에 초점을 둘 수도 있다. [그림 Ⅳ-11]에서 생각해 본다면, 여기서 합의는 여러 주관적인 해석체를 수학 사회의 합의가 될 수 있는 해석체로 만드는 것이다. 즉, 상관관계는 경향성을 보는 것이지 모든 것이 회귀직선 위에 있어야 하는 것은 아니라는 합의나 규약이 정해질 때, 해석체의 협상이 이루어진 것이다.

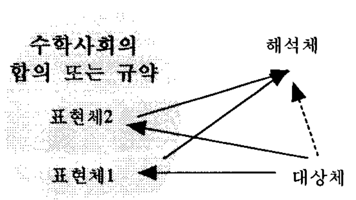


[그림 Ⅳ-11] 해석화에서 해석체의 협상
(김선희 · 이종희, 2002)

상관관계를 조사하기 위해 자료를 정리하는 여러 가지 방법을 학급 전체에서 토의하면서, 교사는 어떤 방법이 좋을지 물었다. 학생들은 점그래프(상관도), 점숫자그래프, 평균막대그래프, 꺾은선그래프가 좋다고 하였고, 교사는 수학에서 쓰이는 그래프에 대해 자세히 알아보자

는 제안을 하였다. 그리고 학생이 선택한 자료 정리의 방법 중 평균을 사용한 그래프의 문제점이 무엇인지 함께 생각해보고, 그 단점 때문에 수학에서는 상관도와 교사가 그 다음 수업에서 제시하는 OMR표(상관표)가 상관관계를 나타내는데 사용되고 있음을 얘기했다. 교사는 상관표를 이끌어내기 위해 키, 발 사이즈, 도수 3가지를 나타낼 수 있는 삼차원의 그래프를 만들고 그것을 이차원의 평면에 표현하려면 숫자를 적어놓거나 점을 찍는 상관도와 상관표가 필요하다는 것을 설명하여 학생들이 규약적 기호를 사용하게 했다.

조별 수업 이후 학생들은 학급 토론을 통해 자료를 정리할 수 있는 여러 가지 방법이 사용될 수 있음을 알았다. 각각의 그래프를 해석하면서 원하는 결과를 얻기 위해 어떤 기호가 좋은지 판단할 수 있었고, 그에 대해 수학 사회에서도 자신들이 생각한 것처럼 합당한 자료 정리 방법을 사용하고 있음을 인식했다. 학급 전체의 토론에 의한 규약적 기호화는 [그림 Ⅳ-12]와 같이, 개인이 만든 여러 표현체를 수학 사회에서 협상을 통해 합일되는 방향으로 수업 활동이 이루어져야 한다는 점에서 해석될 수 있다. 어느 것이 적절한 표현인지에 대해서는 학생간의 합의가 가능하지만, 올바른 표현에 대해서는 교사나 교과서의 안내가 필요하다.



[그림 Ⅳ-12] 기호화에서 표현체의 협상
(김선희 · 이종희, 2002)

4. 관찰된 수업에서 드러난 특징

학생들이 수학 수업에서 기호를 만들고 해석해 가는 과정을 관찰하고 심층 면담을 한 결과 기호의 세 가지 요소가 <표 Ⅱ-1>과 같이 여러 가지 다양한 의미로 사용되었다는 것을 알 수 있었다. 해석체는 기호화에서 학생들이 하고자 한 목표가 되었고, 해석화에서는 평가적 의미가 강했다. 대상체는 기호화에서 표현을 만들기 위한 도구의 역할을 담당하고, 해석화에서는 참조할 대상이나 문제, 진술이었다. 표현체는 기존에 알고 있던 표현을 자신의 것으로 해석하여 만든 것으로 생성되었다. 기호화와 해석화의 과정에서는 전반적으로 다음과 같은 특징이 나타났다.

첫째, 대상체를 가지고 새로운 기호를 만드는 기호화에서 학생들은 자신이 의도하거나 교사가 정해준 해석에 맞도록 표현체를 형성하기 위해 세부적인 기호화를 스스로 이행해 갔다. 예를 들어, 학생 B는 꺾은선그래프를 만들기 위해 도수분포표의 기호를 만들었고, 학생 C는 키와 발 사이즈의 상관관계를 알아보기 위해 키의 계급에 발 사이즈의 평균을 대응시킨 꺾은선그래프를 만들었다. 대상체가 무엇인지는 알고 있었지만 표현체에 대한 목표 설정을 하지 않았던 학생 A는 계속해서 새로운 표현체를 찾아 기호화를 했으나 결국 원하는 결과의 기호를 만들지 못했다. 수학 학습 전반에 걸쳐 교사가 계획한 기호화에서 학생들은 세부적인 기호화를 이행할 수 있었고, 이러한 과정에서 올바른 학습이 이루어지거나 잘못된 방향으로 진행이 되기도 한다. 수학 학습에서 계속적이고 세부적으로 이어지는 기호화를 학생들이 진행하는 것을 교사가 잘 관찰하고 방향을 제시해 주어야 할 것이다.

둘째, 예전에 알고 있던 기호 형판(template)이 새로운 기호의 창조에 영향을 준다. 학생 A는 만들고자 하는 기호의 대상체에 대한 해석을 할 수 있는 표현체를 만들었어야 함에도 불구하고 자료를 정리하는 방법으로 예전에 본 적이 있는 도수분포표를 만들었기 때문에 그것을 이용한 피라미드 그래프를 그릴 수밖에 없었다. 학생 C의 지적을 받았을 때도 자신이 잘못하고 있다는 것을 깨달았지만 피라미드 그래프를 그렸다. 한 종류의 계급에 대해 도수를 기록한 도수분포표의 기억 때문에 키와 발 사이즈 두 가지 종류의 계급을 표현하고 해석하기 위한 것을 표현체를 만들지 못한 것이다. 그러나 학생 C는 키와 발사이즈의 상관표를 보고 그것을 바탕으로 상관관계 해석을 할 수 있는 꺾은선그래프를 작성했다. 수학 학습에서 기호화는 기존의 기호를 형판으로 진행된다(Sfard, 2000). 어떤 기호가 형판이 되는가에 따라 기호화가 성공할 수도 아닐 수도 있는 것이다. 학생들이 기억이나 느낌에 의지하기 보다는 논리적 근거에 의해 기호의 형판을 선택할 수 있도록 해야 할 것이다.

셋째, 학습 활동에서 교사는 학생들이 새로운 기호를 만드는 기호화를 하도록 유도하였으며 기호를 만든 후 해석화를 시도하려 했지만 학생들은 기호화 과정에서 도출되는 표현체를 계속해서 스스로 해석화하였다. 즉, 기호화가 대상체를 해석하여 새로운 표현체를 만들어가는 과정이라 하더라도, 학생들은 자신의 기호화 과정을 다시 되돌아보는 반성의 해석화를 자발적으로 시행하며, 기호화와 해석화는 분리되어 관찰될 수 없는 것이었다. 교사의 의도에 맞는 해석을 할 수 있었던 학생 C는 자신의 기호를 만들기 전에 동료의 기호를 해석하는 과정을 거쳤으며, 국면3에서 교사가 다음에 할 내용을 미리 보고 키와 발사이즈를 가로와 세로에 놓는 그래프를 해석하여 자신의 그래프를 계획했다. 기호를 탐구적 접근으로 도입하는 교사들은, 학생들이 여러 기호의 예를 통해 해석화의 과정을 경험하면서 기호를 평가하고 자신의 기호를 생성하게 하여 규약적 기호화로 인도해야 할 것이다.

넷째, 기호를 사용하고 해석하는데 있어 학생들은 은유와 환유의 추론을 사용하였다. 은유는 'A는 B이다'라는 추론의 형식으로, A와 B의 유사성을 바탕으로 B의 성질에 비추어 A의 성질에 대한 추측을 하는 것이다. 유추는 이미 알려진 두 가지 개념 사이의 유사성을 지각하여 관계를 사상 짓지만, 은유는 표적의 구조에 대해 알지 못하는 상태에서 두 구조를 연결한다. 피라미드에 대해서는 알고 있지만 피라미드그래프에 대해서는 명확히 알지 못한 상태에서 그래프를 피라미드로 해석한 학생 A의 추론은 은유에 해당한다. 환유는 어떤 카테고리나 구성원 또는 하위 모델이 카테고리를 전체로 이해하는데 (종종 제한되고 즉각적인 목적으로) 사용되는 것으로(Lakoff, 1987; Presmeg, 1992, 재인용), Johnson(1987/2000)은 부분이 전체를 대표한다는 제유(synecdoche)와 두드러지거나 관련된 특성이 전체를 대표하는 정식의 환유(metonym proper)로 환유를 분류하였다. 학생 B가 가장 큰 키가 들어가는 계급 180이상 185 미만을 80이라고만 말하는 것은 부분으로 전체를 대표하는 환유 추론이 적용된 것이다. 수학에서는 연역적 추론이 강조되지만 통계에서는 여러 자료를 통해 일반적인 법칙을 찾거나 결론을 유도하는 귀납적 추론이 사용되어야 한다. 그러나 수학기호의 사용과 해석에 있어서는 은유와 환유의 가추법이 사용될 수 있었다.

다섯째, 표현체를 선택할 기회가 주어졌을 때 학생들은 처음 결정한 자신의 표현만을 고집하는 경향이 있었다. 국면2에서 자료를 정리

할 수 있는 여러 표현을 생각해 볼 때에 학생 B는 원그래프, 학생 A는 꺾은선그래프, 학생 C는 표 등을 말했고 다른 사람이 어떤 의견을 냈는지 관심을 두지 않았다. 국면4에서도 마찬가지로 학생들은 한 번 결정한 자신의 기호 표현에 대해 다른 사람의 지적을 받아들이거나 변경하지 않았다. 마음속에 자리 잡고 있는 기호의 원형(prototype)이 기호화와 해석화에 작용하고 있는 것으로 보이며, Polya(1954)가 말한 대로 다른 사람의 의견을 듣고 자신의 생각을 바꿀 수 있는 지적인 용기, 지적인 정직, 현명한 자제의 귀납적 태도의 성향이 학생들에게 갖추어져야 할 것이다.

마지막으로, 학생들이 교사나 과제의 지시 사항을 제대로 이해하지 못한 경우, 학생들 개개인의 표현과 해석을 협상하고 합의하는 기호화와 해석화가 이루어지기 어려웠다. 상관관계의 해석을 위한 기호화를 제대로 이해하지 못했던 학생 B는 새로운 표현체를 생성하는 것에만 초점을 두었고, 그래서 학생 C의 지적을 받아들이지 않았다. 기호의 해석이 사회구성원에 따라 다를 수 있다는 것은 수학 사회에서 사회적 협상과 합의를 필요로 한다. 학생들이 새롭게 만든 표현체와 그에 대한 해석은 학생마다 다를 수 있고 그 기호에 대한 의사소통은 합의 또는 규약의 기호화와 해석화로 나아가야 한다. 이에 대해 본 연구에서 관찰된 학생들은 도수분포표를 만드는데 있어 계급에 번호를 붙여 세는 것을 제외하고는 타협을 하지 않았다. 만약 수업 중에 다른 사람에게 자신의 지식을 표현할 기회가 생긴다면 왜 그 표현이 타당한지 생각해 볼 기회를 얻을 수 있을 것이고 서로 간의 협상을 통해 수학적 해석이 가능한 기호를 생성해 갈 수 있을 것이다. 따라서 관찰된 수업처럼 개인의 기호화가 끝난 후 협상을 하는 것보다는 기호화 과정에서의 협상이 기호의 의미와 표현 구성에 더 도움이 되었을 것이다.

Ⅴ. 결과 및 논의

학생들이 교사의 안내 하에 수학 수업에서 어떤 기호화와 해석화를 경험하는지 기호 모델로 분석하였다. 중학교 1학년 4명을 집중 관찰하고 심층 면담을 실시하였고, 학생들은 자료를 정리할 수 있는 방법이 무엇인지 조별로 토론하고 자신만의 독특한 그래프를 만들었다. 같은 조에 있더라도 학생들이 만든 기호는 달랐으며, 그 기호화에 이르는 과정 또한 제각각이었다. 4명의 학생들의 기호화 과정을 심층 분석한 결과에 의해 기호화와 해석화가 이루어지는 수학 학습에서 다음의 몇 가지 조언을 할 수 있다.

통계 영역에서 상관관계의 개념 형성을 위한 수업을 관찰하였을 때, 분석은 기호 모델에 의해 가능했다. 학습 내용은 학생들 개개인의 마음속, 그 표현은 기호의 외부에 따로 존재하는 것이 아니라 기호의 표현과 의미가 함께 구성되고 발전되고 있음을 알 수 있었다.

이것은 기호의 의미와 표현을 구분하여 수학적 내용을 교사의 언어로 직접 전달하는 전통적인 교육관이나 잘 짜여진 표현으로 내적 구성을 가능하게 하려는 표현의 관점 등의 한계가 극복되어야 함을 보여주는 것이며, 따라서 수학 수업에서 기호의 중요성과 역할을 되새기고 기호화와 해석화를 통해 학습을 안내하는 지도가 필요하다.

수학 학습을 지도하는 교사는 학생들 스스로 기호의 의미를 풍부하게 하고 타당하다고 생각되는 기호를 선택할 수 있는 기호화와 해석화가 이루어지도록 적절한 안내를 하고, 수학사

회의 대리인으로서 전형이 되는 역할을 담당해야 한다. 수학 수업에서 학습자는 동료나 교사와 의사소통하고, 배운 내용을 발판으로 개념을 발달시키기 위해서 수학기호를 필수적으로 학습한다. 수학 학습의 결과로 학생들이 수학 사회에서 규약적으로 사용하고 있는 기호의 의미를 해석하기 위해, 교사가 수학기호를 제시하고 그 뜻을 알려주는 것으로 학생들의 올바른 개념 형성을 보장할 수는 없다. Sfard(2000)는 기호의 표현을 먼저 도입하여 학생들이 대상을 중재하여 기호를 사용하는 기호화 과정을 제안하였으나 Tall(1991/2003)은 개념을 기호로 나타내기 전에 개념과 관련된 의미가 있어야 한다고 하면서, 기호의 강요현상을 피해야 한다고 했다. 학생들이 기호의 표현체와 해석체를 탐구하고 그 표현 방법과 그 해석에 대해 수학 사회가 일치할 수 있는 기호화와 해석화가 이루어지기 위해, 교사는 학생 개개인의 기호화 과정에서 학생들의 협상이 일어나도록 해야 할 것이다.

기호화와 해석화에서 학생들은 다른 사람과 협력하고 자신의 생각만을 주장하지 않고 토론할 수 있는 태도가 필요하다. 본 연구의 대상이었던 4명의 학생들은 개성이 강하고 서로 간의 의견교환을 제대로 하지 못했다. 해석화 과정이 충분하지 못했던 학생들은 대상체에 맞는 표현체를 생성하지 못했고, 결국 그러한 것을 단점으로 해석할 수밖에 없었다. 해석체와 표현체 협상의 장은 동료간의 토론이 진행되는 상황을 필요로 하며, 학생들이 수학을 학습하면서 의사소통의 유용함과 공동의 지식 구성에 대한 인식이 부족할 때 협동학습이 성공하지 못할 수 있다. 그래프를 만드는 것이 자료를 정리하여 의도한 해석을 가능하게 하려는 목적이라면 자신의 그래프를 다른 사람이 보고 그런 판단을 할 수 있도록 하는 의사소통과 사회적 협력이 필요하다. 조별로 자리를 배치했다고 해서 학생들의 의사소통이 이루어지는 것은 아니며, 평소 의사소통 상황을 경험하여 그 필요성에 대하여 학생들이 인식하는 것이 중요할 것이다. 심층 면담을 통해서 학생들은 조의 협동이 이루어지지 않은 점이 아쉬웠다고 하면서 이후의 학습에서는 함께 협력할 때 더 나은 기호의 표현과 해석이 이루어질 수 있으리라는 기대를 하였다. 학생들 스스로 수학기호를 만들고 해석하기 위한 장으로서 협동학습이 제구실을 하기 위해서는 협동 그룹 내에서 학습하는 장점과 중요성에 대한 학생들의 인식과 다른 사람과 함께 공부하는데 필요한 사회적 기술 등의 지도가 함께 있어야 할 것이다.

참고문헌

김남균(2002). **초등학교 수학 교수-학습에서의 수학적 상징화에 관한 연구**. 한국교원대학교 박사학위논문.

김선희 · 이종희(2002). 수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법. **학교수학, 4**(4), 539-554.

김선희 · 이종희(2003). **중학교 수준의 학교수학 언어 분석 -구문론, 의미론, 화용론을 중심으로-**. preprint(논문).

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 박사학위논문.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A model for analyzing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins(Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp.61-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 171-195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 99-131). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gravemeijer, K. (2002). Introduction to section Ⅱ: The role of models, symbols and tools in instructional design. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 141-144). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Johnson, M. (2000). **마음속의 몸**. (노양진 역) 서울: 철학과 현실사. (영어 원작은 1987년에 출판).

Krussel, L. (1998). Teaching the language of mathematics. *The Mathematics Teacher, 91*(5), 436-441.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* VA: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* VA: NCTM.

O'Halloran, K. (1999). Towards a systemic functional analysis of multisemiotic mathematics texts. *Semiotica, 124-1/2*, 1-29.

Ogden, C. & Richards, I. A. (1923). *The meaning of meaning.* London: Routledge and Kegan Paul.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high School mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. In L. D. English(ed.), *Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images*(pp.267-279). London: Lawrence Erlbaum Associates Dublishers.

Presmeg, N. C. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical behavior, 17*(1), 25-32.

Presmeg, N. C. (2002). Transitions on emergent modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel

(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 131-137). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Roth, W-M. & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: a semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 159-194.

Ruvenstein, R. N. & Thompson, D. R. (2001). Learning mathematical symbolism: challenges and instructional strategies. *Mathematics Teacher, 94*(4), 265-271.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Londin: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Tall, D. (2003). **고등수학적 사고.** (류희찬 · 조완영 · 김인수 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년에 출판).

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향.** (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년에 출판).

van Oers, B. (2000). The appropriation of mathematical symbols: a psycholoical approach to mathematics learning. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 133-176). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

van Oers, B. (2002). The mathematization of young children's language. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp.29-57). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wertsch, J. V. (1995). **비고츠키-마음의 사회적 형성.** (한양대 사회인지발달연구모임 역). 서울: 정민사. (영어 원본은 1985년에 출판).

Whitson. J. A. (1997). Cognition as a semiotic process: from situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirshner & J. A. Whitson(Eds.), *Situated Cognition : social, semiotic, & psychological perspectives* (pp.97-149). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Winslow, C. (2003). Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 271-288.

Analysis on the process in which middle school students represented and interpreted statistical data

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha Womans University)

In the learning of mathematics, students experience the semiotic activities of representing and interpreting mathematical signs. We called these activities as the representing and interpreting of mathematical signs. On the foundation of Peirce's three elements of the sign, we analysed that students constructed the representamen to interpret the concept of correlation as for the object, "as one is taller, one's size of foot is larger". 4 middle school students who participated the gifted center in Seoul, arranged the statistical data, constructed their own representamen, and then learned the conventional signs as a result of the whole class discussion. In the process, students performed the detailed representing and interpreting of signs, depended on the templates of the known signs, and interpreted the process voluntarily. As the semiotic activities were taken place in this way, it was needed that mathematics teacher guided the representing and interpreting of mathematical signs so that the representation and the meaning of the sign were constructed each other, and that students endeavored to get the negotiation of the interpretants and the representamens, and to reach the conventional representing.

Keyword: sign(기호), represent(기호화), interpret(해석화), statistical data(통계자료)