

파랑 변형 해석을 위한 복합 요소 모형 Hybrid Element Model for Wave Transformation Analysis

정태화* · 박우선** · 서경덕*

Tae Hwa Jung*, Woo Sun Park**, and Kyung Duck Suh*

요 旨 : 본 연구에서는 천해 파랑 계산에 널리 사용되어지고 있는 확장형 완경사 방정식과 계산 효율은 같게 유지하면서 Laplace 방정식을 직접 풀 수 있는 유한 요소 모형에 대해서 연구하였다. 기존의 확장형 완경사 방정식을 사용하는 경우와 같은 계산효율을 유지하기 위하여 파동장을 수심방향으로 1층인 유한요소로 나누고, 요소내의 포텐셜을 수면에 위치한 절점에 대한 포텐셜만으로 표시하도록 한 후, Galerkin 기법을 적용하여 수치모형을 구성하였다. 요소내 수평방향에 대해서는 통상의 보간함수를 채택하였으며, 수심방향에 대해서는 진행파의 수심방향 거동인 함수를 사용하여 보간함수를 구성하였다. 모형의 개발은 우선 연직 2차원 문제를 대상으로 하였다. 개발된 모형의 검증을 위하여 연직 2차원에서의 파랑 반사 및 전달문제에 적용한 결과, 개발된 유한 요소 모형은 계산상의 효율면에서나 해의 정확도 면에서 기존의 확장형 완경사 방정식에 기초한 모형과 같은 수준을 보임을 확인하였다.

핵심용어 : 유한요소모형, Galerkin 방법, 급변 수심, 파랑 변형

Abstract □ In this study, we develop a finite element model to directly solve the Laplace equation while keeping the same computational efficiency as the models based on the extended mild-slope equation which has been widely used for calculation of wave transformation in shallow water. For this, the computational domain is discretized into finite elements with a single layer in the vertical direction. The velocity potential in the element is then expressed in terms of the potentials at the nodes located at water surface, and the Galerkin method is used to construct the numerical model. A common shape function is adopted in horizontal direction, and the cosine hyperbolic function in vertical direction, which describes the vertical behavior of progressive waves. The model was developed for vertical two-dimensional problems. In order to verify the developed model, it is applied to vertical two-dimensional problems of wave reflection and transmission. It is shown that the present finite element model is comparable to the models based on extended mild-slope equations in both computational efficiency and accuracy.

Keywords : finite element model, Galerkin method, rapidly varying topography, wave transformation

1. 서 론

천해 파랑변형 해석은 Berkhoff(1972)가 2차원 Laplace 방정식으로부터 완경사 방정식을 개발함으로써 본격적인 연구가 시작되었다. 이 식은 해저면의 경사가 급한 경우에는 오차를 많이 수반할 수 있지만 파랑의 굴절 및 회절을 동시에 계산할 수 있어 많은 파랑전파 관련 연구자

들이 사용하여 왔다. 최근에 Massel(1993), Chamberlain and Porter(1995), Suh *et al.*(1997), Chandrasekera and Cheung (1997) 등에 의해 확장형 완경사 방정식이 제안되면서 급변하는 수심에서의 파랑변형 해석도 가능해졌다.

완경사 방정식 또는 확장형 완경사 방정식은 계산의 효율을 위해 3차원 Laplace 방정식을 수평 2차원 방정식으로 변형시킨 것이기 때문에 파랑의 거동을 나타내는 데

*서울대학교 지구환경시스템공학부(Corresponding author: Tae Hwa Jung, School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University, San 56-1, Shinlim-Dong, Gwanak-Gu, Seoul 151-742, Korea. togye176@snu.ac.kr)

**한국해양연구원 연안·항만공학연구본부(Coastal and Harbor Engineering Research Lab., Korean Ocean Research and Development Institute)

는 한계가 있을 수밖에 없으며, 수면에 고정된 물체 등이 있어 자유수면에서의 경계조건이 변하는 경우에는 적용할 수 없게 된다. 따라서, 본 연구에서는 계산 효율은 같게 유지되면서 Laplace 방정식을 직접 풀 수 있는 방법에 대해서 연구하였다. 수치해석기법으로는 범용성이 뛰어난 유한요소법을 채택하였다.

기존의 확장형 완경사 방정식을 사용하는 경우와 같은 계산효율을 유지하기 위하여 파동장을 수심방향으로 1층인 유한요소로 나누고, 요소내의 포텐셜을 수면에 위치한 절점에 대한 포텐셜만으로 표시하도록 한 후, Galerkin 기법을 적용하여 수치모형을 구성하였다. 각 요소내 수평방향에 대해서는 통상의 보간함수를 채택하였으며, 수심방향에 대해서는 진행파의 수심방향 거동인 함수를 사용하여 보간함수를 구성하였다. 방사경계조건은 무한요소 개념을 이용하여 처리하였다(Park et al., 1994).

개발된 모형의 검증을 위하여 연직 2차원에서의 파랑 반사 및 전달문제에 적용하였다. 즉, 일정경사면에서의 파의 반사, 바닥의 주기적 기복에 의한 Bragg 반사, 원호형 잠제에 의한 파의 반사 문제 등에 적용하여 기존의 수치해석 결과 및 수리실험결과와 비교하였다. 비교결과, 개발된 유한 요소 모형은 계산상의 효율면에서나 해의 정확도 면에서 기존의 확장형 완경사 방정식에 기초한 모형과 동등한 수준을 보임을 확인하였다.

2. 문제의 정식화

2.1 지배 방정식 및 경계조건

연직 2차원 파랑전파 문제를 정식화하기 위하여 Fig. 1에 보인 바와 같이 직교좌표계(x, z)를 정의하였다. 유체를 비점성, 비압축성으로 가정하고 흐름을 비회전류라고 가정하면 파동장은 다음과 같이 속도포텐셜, ϕ 에 대한 Laplace 방정식으로 표시할 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

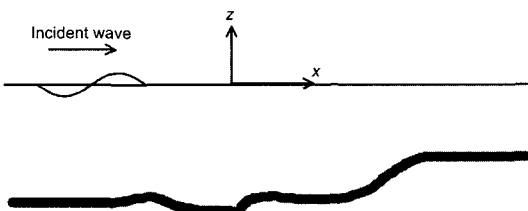


Fig. 1. Coordinate system for wave analysis.

여기서, x 는 수평좌표, z 는 정수면을 기준으로 위쪽이 양이 되도록 잡았다.

기본적인 경계조건으로는 자유수면(S_f) 경계조건과 바닥면(S_a) 경계조건이 있다. 파고가 파장에 비해 매우 작다고 가정하여 자유 수면에서는 선형파 경계 조건을 도입하였으며, 바닥면에서는 불투과 경계조건을 적용하였다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad \text{on } S_f \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_a \tag{3}$$

여기서, ω 는 각주파수를, g 는 중력 가속도를 의미한다.

대상 영역이 바다뿐만 아니라 육지도 포함하는 경우 해안선이나 방파제 등과 같은 해안 구조물이 해석 영역에 포함될 수 있다. 이들은 일반적으로 파 에너지의 일부를 소멸시키기 때문에 이 효과를 고려하기 위하여 육지 경계면에서는 Mei and Chen(1975)의 부분반사 경계조건을 수정한 서와 연(1994)의 결과를 이용하였다. 즉, 육지 경계면을 따라서 다음과 같은 부분반사 경계조건을 적용한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha \phi \quad \text{on } \Gamma \tag{4}$$

여기서 n 은 육지 경계면, Γ 에서 바깥쪽으로 직각 방향을 나타내며, α 는 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha = ik \cos \theta_i \frac{1-K_r}{1+K_r} \tag{5}$$

여기서, $i = \sqrt{-1}$ 이며, K_r 은 육지 경계면에서의 경험적 반사계수로서 일반적으로 파의 주파수와 진폭 및 육지 경계면의 특성에 따라 달라진다. θ_i 은 육지 경계면으로 입사하는 파의 법선 방향으로부터의 각을 의미하는데 일반적으로 대상 영역 내에서 다중 반사가 일어나므로 어떤 일정한 값으로 정의하기 어렵다. 통상적으로 θ_i 은 0° 로 하여 계산하는 경우가 많다.

한편 입사파를 제외한 산란파, ϕ_s 는 무한 원방에서 Sommerfeld(1896)가 제안한 무한 방사 경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial r} - ik \phi_s \right) = 0 \tag{6}$$

여기서, r 은 산란파의 발생지점으로부터의 거리를 의미하며, k 는 입사파의 파수를 나타낸다.

3. 복합 요소 모형의 구성

3.1 유체 영역의 이산화

연직 2차원 파랑전파 문제를 효율적으로 해석하기 위해 대상 영역을 주된 관심 영역을 포함하는 유한 요소 영역, Ω_1 과 이를 둘러싼 무한 요소 영역, Ω_2 로 분리한 후, 영역 Ω_1 에서는 입사파 포텐셜, ϕ_I 와 산란파 포텐셜, ϕ_S 의 합인 총 포텐셜 $\phi_1 = \phi_I + \phi_S$ 를 미지수로 하고, 영역 Ω_2 중에서 파가 입사하는 쪽은 입사파 포텐셜 ϕ_I 를 기지의 값으로 가정하여 $\phi_2 = \phi_S$ 를 미지수로 하고 파가 전달되어 나가는 쪽(우측)은 영역 Ω_1 에서와 같이 포텐셜 $\phi_2 = \phi_I + \phi_S$ 를 미지수로 하였다(Fig. 2참조). 또한, 무한요소 영역인 Ω_2 에서는 수심이 일정한 것으로 가정하였다.

유한 요소 해석을 위해서는 해석 영역을 적당한 수의 유한 요소로 이산화하고 각 요소 내의 임의의 지점에서 속도 포텐셜, ϕ_i 를 요소의 절점 포텐셜 벡터, $\{\phi_i^e\}$ 와 미리 규정한 보간 함수 벡터, $\{N\}$ 으로 근사하는 것이 필요하다. 즉,

$$\phi_i = \{N\}^T \{\phi_i^e\} \quad (7)$$

여기서, 위첨자 T 는 전치 행렬을 만드는 연산자를 의미한다.

식 (7)을 식 (1)에 대입하고 보간 함수 $\{N\}$ 을 가중 함수로 사용하는 Galerkin 방법을 적용하면 앞에 보인 파랑 전파문제를 이산화할 수 있다. 즉, Galerkin 기법을 적용하면 각 요소의 가중 잔차를 다음과 같이 정의되며,

$$R^e = \int_{\Omega} \{N\} \nabla^2 \phi d\Omega^e \quad (8)$$

Green의 제2 정리를 이용하고 식 (2)-(4)의 경계조건을 도입하여 각 요소의 시스템 행렬을 조합해서 잔차를 영으로 취하면 다음과 같은 전체 행렬이 정의된다.

$$\sum_e [(K_{\Omega^e} - K_{S_f^e} - K_{S_w^e}) \phi^e = F^e] \quad (9)$$

여기서 K_{Ω^e} , $K_{S_f^e}$, $K_{S_w^e}$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

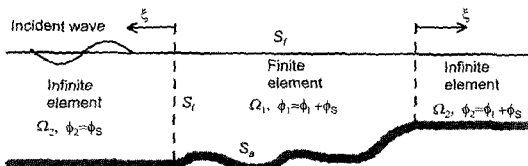


Fig. 2. Definition of computational fluid domain.

$$K_{\Omega^e} = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \frac{\partial \{N\}}{\partial z} \right) d\Omega^e \quad (10)$$

$$K_{S_f^e} = \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f^e} \{N\} \{N\}^T dS_f^e \quad (11)$$

$$K_{S_w^e} = \alpha \int_{S_w^e} \{N\} \{N\}^T dS_w^e \quad (12)$$

그리고 우변의 외력 항, F^e 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n \{N\} dS_f^e \quad (13)$$

여기서 V_n 은 파가 입사하는 쪽의 유한요소영역, Ω_1 과 무한요소영역, Ω_2 의 경계면인 S_f 에서의 직각 방향으로의 물 입자 속도를 의미한다.

3.2 복합 요소 모형

경계치 문제를 효율적으로 풀기 위해 각 요소의 보간 함수를 다음과 같이 연직 방향의 보간함수, N_z 와 자유 수면에서의 수평방향 보간 함수 $\{\bar{N}\}$ 의 곱으로 나타내었다.

$$N = N_z \{\bar{N}\} \quad (14)$$

여기서,

$$N_z = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (15)$$

식 (14)를 식 (10)-(13)에 대입하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻는다.

$$\begin{aligned} K_{\Omega^e} = & \int_{\Omega^e} \left(\left(\frac{\partial N_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_z}{\partial z} \right)^2 \right) \{\bar{N}\} \{\bar{N}\}^T d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} N_z \frac{\partial N_z}{\partial x} \left(\frac{\partial \{\bar{N}\}}{\partial x} \{\bar{N}\}^T + \{\bar{N}\} \frac{\partial \{\bar{N}\}}{\partial x} \right) d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} N_z^2 \left(\frac{\partial \{\bar{N}\}}{\partial x} \frac{\partial \{\bar{N}\}}{\partial x} \right) d\Omega^e \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_{S_f^e} = \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f^e} N_z^2 \{\bar{N}\} \{\bar{N}\}^T dS_f^e \quad (17)$$

$$K_{S_w^e} = \alpha \int_{S_w^e} N_z^2 \{\bar{N}\} \{\bar{N}\}^T dS_w^e \quad (18)$$

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n N_z \{\bar{N}\} dS_f^e \quad (19)$$

적분에 필요한 각각의 값들은 부록에 제시하였다.

3.3 무한 요소의 구성

반사파 또는 전달파 등의 산란파는 식 (6)의 방사경계

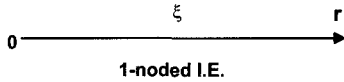


Fig. 3. Coordinate systems for infinite elements ($r = \infty$).

조건을 만족하여야 한다. 이를 적절히 모형화하기 위하여 Fig. 3과 같은 1절점 무한 요소를 이용하였다. 무한 요소의 형상함수는 다음 식으로 주어진다.

$$\{N\} = N_r(\xi)N_z \quad \text{for } 0 \leq \xi < \infty \quad (20)$$

여기서, N_z 는 식 (15)에 보인 수심방향 보간함수이며, $N_r(\xi)$ 는 다음 식으로 주어지는 수평방향 보간함수이다.

$$N_r(\xi) = e^{(\epsilon k - \epsilon)\xi} \quad (21)$$

여기서, ϵ 는 식 (21)의 적분을 위해 인위적으로 도입된 강제 감쇠계수이다($\epsilon < k$).적분이 끝난 뒤에 ϵ 값을 영으로 취함으로써 실제 식에서 값의 변화가 없게 하였다. 강제 감쇠계수, ϵ 을 제외한 형상함수 $N_r(\xi)$ 는 연직 2차원에서의 진행파의 수평방향 거동으로부터 유도되었으며, 식 (6)의 방사경계조건을 만족한다

식 (16)-(19)로 주어지는 시스템 행렬은 무한 요소 영역에서 다음과 같이 해석적으로 재구성할 수 있다.

$$K_{\Omega^e} = \int_{\Omega^e} \left(N_z^2 \left(\frac{\partial N_r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_z}{\partial \xi} \right) N_r^2 \right) d\Omega^e \quad (22)$$

$$K_{S_f^e} = \frac{\omega^2}{g} \int_{S_f^e} N_z^2 N_r^2 dS_f^e \quad (23)$$

$$K_{S_w^e} = \alpha \int_{S_w^e} N_z^2 N_r^2 dS_w^e \quad (24)$$

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n N_z dS_f^e \quad (25)$$

식 (25)는 무한요소 영역과 유한요소 영역에서 중복하여 고려하지 않아야 하며, 파가 입사하는 방향의 무한요소영역의 미지수가 전체 포텐셜이 아니고 산란파만의 포텐셜임을 고려하여야 한다. 이를 고려하면 식 (25)는 다음과 같이 변형된다.

$$F^e = \int_{S_f^e} V_n N_z dS_f^e + [K_{\Omega^e} + K_{S_f^e} + K_{S_w^e}] \phi_f(x_1) \quad (26)$$

여기서, $\phi_f(x_1)$ 은 x_1 위치에서의 입사파의 포텐셜을 나타내며, x_1 은 S_f 면의 x 좌표이다.

4. 모형의 성능 검토

개발된 모형의 성능을 검토하기 위하여 확장형 환경사 방정식에 기초한 수치 해석 결과와 수리 실험 결과가 존재하는 경우에 대한 해석을 실시하였다. 첫번째로 기존의 해저면이 급경사 갖는 경우에 대한 해석의 타당성을 검증하기 위하여 일정 경사면에서 경사각이 변하는 경우에 대한 해석을 실시하였으며, 두 번째는 해저면의 주기적 기복에 의한 Bragg 반사에 대해 해석하였다. 마지막으로 원호형 잠제에 대해 적용하였다.

여기서 사용된 형상 함수는 3절점 일차원 요소를 사용하였으며 요소의 크기는 단주기 영역($2k/K \approx 2.0$)에서 한 파장당 20개 이상의 요소가 들어가게 함으로써 요소의 크기로 인한 오차를 최소화 하도록 하였다.

4.1 경사면의 기울기에 따른 반사 계수의 비교

Booij(1983)는 해저면 경사에 따른 환경사 방정식의 정밀도를 검토하기 위하여 Fig. 4와 같은 일정 경사면에 입사하는 파의 반사 계수를 검토한 바 있다. 입사파의 주기는 2 s이며, 경사면의 양쪽은 각각 수심이 0.6 m 및 0.2 m인 일정수심 구간으로 연결된다. 입사파는 그림의 왼쪽에서 오른쪽으로 진행한다. 경사면의 높이는 0.4 m로 일정하므로 경사면의 수평길이, B를 변화시켜 가면서 기울기 변화에 따른 반사 계수를 계산하였다. 유한요소 영역은 경사면의 양끝에서 상·하류 방향으로 각각 3.0 m 및 1.0 m 떨어진 지점까지 취하였다. 본 모형의 계산 결과와 확장형 환경사 방정식에 기초한 Suh et al.(1997)의 계산 결과를 Fig. 5에 제시하였다. 경사면의 기울기에 상관없이 두 모형의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 해저면의 주기적 기복에 의한 Bragg 반사 비교

주기성을 갖는 해저면 기복이 존재하는 지역에 표면파가 입사할 때, 해저면 기복의 파수가 표면파의 파수의 두

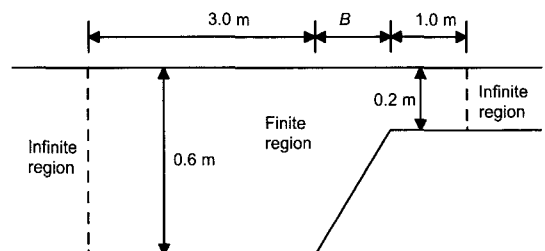


Fig. 4. Schematic diagram for numerical test of wave reflection from a plane slope.

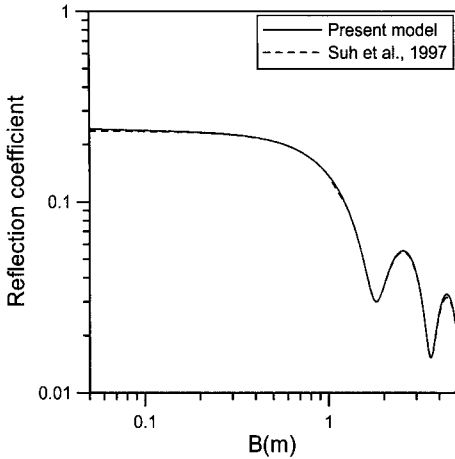


Fig. 5. Reflection coefficient versus horizontal length of a plane slope.

배가 되는 점에서 반사가 크게 발생하는 Bragg 반사 현상에 대하여 본 모형의 성능을 검토하였다. 우선 수심이 식 (27)로 표시되는 정현파 형태의 기복에 대하여 Davies and Heathershaw(1984)가 수행한 수리 실험 결과와 Suh *et al.*(1997)이 계산한 수치 해석 결과를 본 모형의 계산 결과와 비교하였다.

$$h(x) = \begin{cases} h_c, & x \leq 0 \\ h_c - A \sin(Kx), & 0 \leq x \leq n\lambda \\ h_c, & x \geq n\lambda \end{cases} \quad (27)$$

여기서, A , λ 및 K 는 각각 해저면 기복의 진폭, 파장 및 파수이며, n 은 기복의 개수, h_c 는 평평한 부분에서의 수심을 의미한다.

Davies and Heathershaw(1984)는 기복의 개수 및 수심을 변화시키면서 세 가지 경우에 대하여 실험을 실시하였다. 여기서는 환경사 방정식의 오차가 매우 크다고 알려진 한 가지 경우에 대해서만 비교하였다(Suh *et al.*, 1997참조). 이 경우 실험 조건은 $A=5$ cm, $\lambda=100$ cm, $n=10$, $h_c=31.3$ cm이다. Fig. 6은 본 수치모형의 결과를 Suh *et al.*(1997)의 계산 결과 및 Davies and Heathershaw의 수리 실험 결과와 비교한 것이다. $2k/K$ 가 1.5 이상 되는, 반사율이 아주 작은, 부분에서 두 모형이 약간의 차이를 보이지만 그 외의 구간에서는 거의 일치하는 결과를 보이며 실험 결과와도 잘 일치한다.

다음에는 파장이 서로 다른 두 개의 주기적 기복이 중첩되어 있는 바닥 지형에 의한 Bragg 반사에 대하여 검토하였다. 수심은 다음 식으로 주어진다.

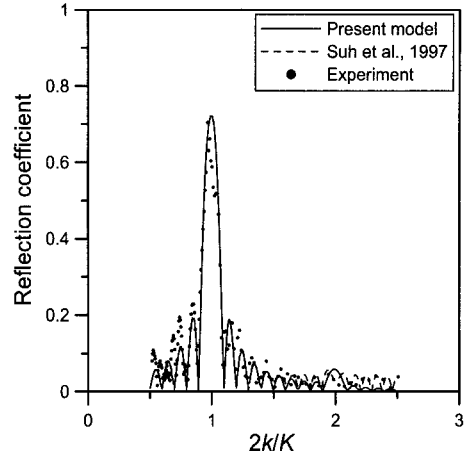


Fig. 6. Comparison of the present model and Suh *et al.*'s (1997) model based on extended mild-slope equation with the experimental data of Davies and Heathershaw (1984).

$$h(x) = \begin{cases} h_c, & x \leq 0 \\ h_c - A[\sin(K_1x) + \sin(mK_1x)], & 0 \leq x \leq l \\ h_c, & x \geq l \end{cases} \quad (28)$$

여기서, l 은 기복이 존재하는 구간의 총 길이, A 는 두 개의 기복에 대하여 동일하게 주어지는 기복의 진폭, K_1 은 두 개의 기복 중 파장이 더 긴 기복의 파수를 나타낸다. m 은 짧은 파장에 대한 긴 파장의 길이를 나타내며, 따라서 mK_1 은 파장이 짧은 기복의 파수를 나타낸다. 즉, 긴 파장의 기복과 짧은 파장의 기복을 각각 아래첨자 1 및 2로 표시할 때, $m = \lambda_1/\lambda_2 = K_2/K_1$ 의 관계를 갖는다.

Guazzelli *et al.*(1992)은 기복의 진폭, 파장 및 개수, 수심 등을 다양하게 변화시키면서 실험을 수행하였다. 여기서는 $A=0.5$ cm, $\lambda_1=6$ cm, $\lambda_2=4$ cm, $m=1.5$, $l=48$ cm에 대하여 h_c 를 2.5 및 4.0 cm로 실시한 실험 자료를 이용하였다. Fig. 7은 본 수치모형의 결과를 Suh *et al.*(1997)의 계산 결과 및 Guazzelli *et al.*의 수리 실험 결과와 비교한 것이다. $2k/K_1$ 의 전 구간에서 두 모형이 약간의 차이를 보이지만, $2k/K_1=1.0$ 및 1.5 부근에서의 Bragg 반사 피크를 잘 나타내고 있다. $2k/K_1=0.5$ 부근에서의 저조파(subharmonic) 피크도, 실험 값에 비해 약간 작지만, 비교적 잘 모의하고 있다.

4.3 원호형 잠제로부터의 반사 계수의 비교

마지막으로 Fig. 8에 나타낸 바와 같이 원호와 바닥면

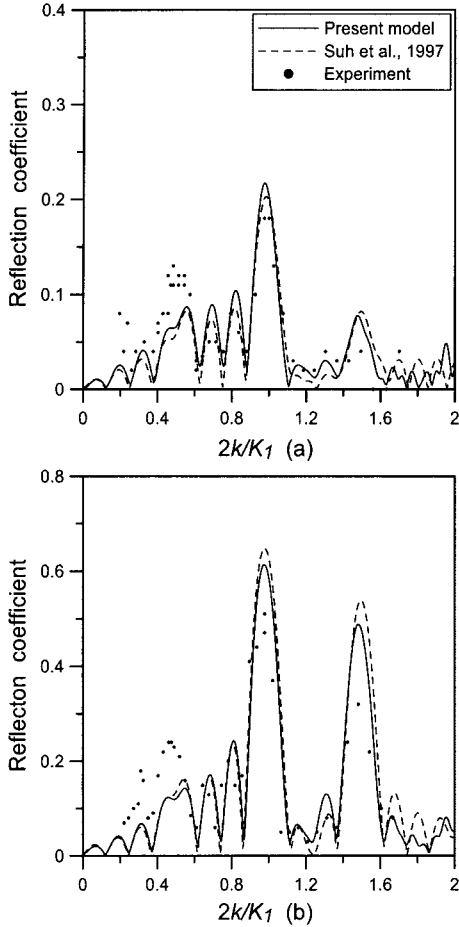


Fig. 7. Comparison of the present model and Suh et al.s(1997) model based on extended mild-slope equation with the experimental data of Guazzelli et al.(1992): (a) $h_c=4$ cm, (b) $h_c=2.5$ cm.

이 이루는 각, β 가 변하는 원호형 잠제에 의한 파의 반사를 검토하였다(Lee et al., 1998참조). 수심은 다음과 같이 주어진다.

$$h(x) = \begin{cases} h_c + \frac{b}{\tan\beta} - \sqrt{\left(\frac{b}{\sin\beta}\right)^2 - (x-x_0)^2}, & |x-x_0| \leq b \\ h_c, & |x-x_0| \geq b \end{cases} \quad (29)$$

여기서, h_c 는 평평한 바닥면에서의 수심, b 는 원호의 반폭, x_0 는 원호의 중심에서의 x 좌표를 나타낸다. $h_c=85$ cm, $b=80$ cm를 사용하였다. β 는 0° 부터 90° 까지 변화하도록 하였으며, 이에 따른 원호 중심($x=x_0$)에서의 수심은 85 cm 부터 5 cm까지 변화하도록 하였다. 입사파의 주기는 1.716 s 로 하여 평평한 바닥에서의 상대수심이 $kh_c=0.42\pi$ 가 되

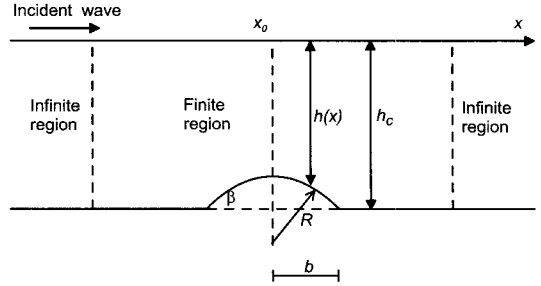


Fig. 8. Computational domain for numerical test of waves propagating over an arc-shaped bar.

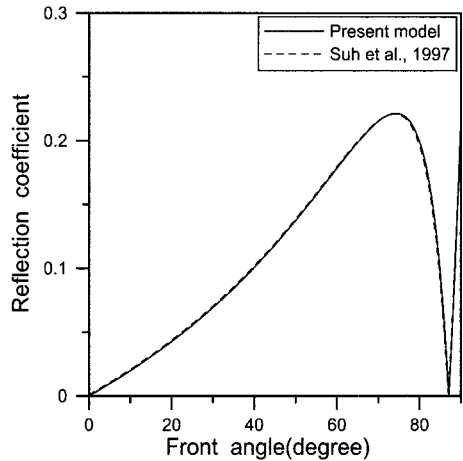


Fig. 9. Reflection coefficient versus front angle of an arc-shaped bar.

도록 함으로써 잠제 끝머리에서의 바닥 곡률의 영향이 두드러지게 나타나도록 하였다(Lee et al., 1998참조).

Fig. 9는 잠제로부터의 반사 계수를 잠제 끝머리에서의 각도, β 의 함수로 나타낸 것이다. 본 모형과 Suh et al.(1997) 모형의 결과가 거의 정확하게 일치함을 알 수 있다. 잠제 끝머리에서의 각도, β 가 증가함에 따라 $\beta = 75^\circ$ 정도 될 때까지 반사 계수가 증가하다가 그 이후로 급격히 감소한다. $\beta = 87^\circ$ 부근에서 거의 영에 가까워졌다가 90° 가 될 때까지 다시 증가한다. 이러한 현상은 수심이 변하는 각 점에서의 반사파의 위상과 크기의 복합적인 영향으로 인해 생기는 현상으로 Bragg 반사와 밀접한 관련이 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 수심이 임의로 변하는 지역에서의 파랑 변형을 Laplace 방정식을 지배방정식으로 사용하면서도 효율적으로 해석할 수 있는 새로운 유한 요소 모형을 개발

하였다. 각 요소내 속도 포텐셜의 연직 방향 분포를 \cosh 함수로 가정하고 자유수면에서의 포텐셜 값만을 수치해석을 통해 구함으로써 계산 시간과 자료의 저장량을 절약하였다. 원해에서의 방사경계조건 처리를 위해서 무한 요소 개념을 결합하여 사용하였다.

개발된 모형의 검증을 위하여 연직 2차원에서의 파랑 반사 및 전달문제에 적용하였다. 즉, 일정경사면에서의 파의 반사, 바닥의 주기적 기복에 의한 Bragg 반사, 원호형 잠체에 의한 파의 반사 문제 등에 적용하여 기존의 수치해석결과 및 수리실험결과와 비교한 결과, 개발된 유한요소모형은 계산상의 효율면에서나 해의 정확도 면에서 기존의 확장형 완경사 방정식에 기초한 모형과 같은 수준을 보임을 확인하였다.

본 모형은 수평 3차원 파랑변형 문제에 대하여 정식화될 수 있지만 본 연구에서는 연직 2차원 문제만을 다루었다. 향후 본 모형을 3차원 문제에 확장하여 다양한 경계 조건하의 항만 정온도 문제 등을 다룰 수 있는 모형으로 개발하고자 한다.

감사의 글

이 논문은 2002년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

부록: 식 (16)-(19)의 적분에 필요한 항들의 유도

연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 N_z 의 도함수를 구해보면

$$\frac{\partial N_z}{\partial x} = \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (A1)$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial y} = \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad (A2)$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = k \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh} \quad (A3)$$

가 된다. 여기서

$$\frac{\partial k}{\partial h} = \frac{-\lambda k}{\sinh^2 kh + \lambda h} \quad (A4)$$

$$\lambda = \frac{\omega^2}{g} \quad (A5)$$

이다. 임의 지점에서의 수심 역시 앞에서 가정한 방법과 동일한 방법으로 나타낼 수 있다.

$$h = \{\bar{N}\}^T \{h_e\} \quad (A6)$$

따라서 x 방향, y 방향으로의 도함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \{\bar{N}\}^T}{\partial x} \{h_e\} \quad (A7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \{\bar{N}\}^T}{\partial y} \{h_e\} \quad (A8)$$

식 (15)를 이용하여 k 및 h 에 대한 N_z 의 도함수를 구해보면 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_z}{\partial k} = \frac{1}{\cosh^2 kh} [(z+h)\cosh kh \sinh k(h+z) - h \sinh kh \cosh k(h+z)] \quad (A9)$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial h} = \frac{1}{\cosh^2 kh} [k \cosh kh \sinh k(h+z) - k \sinh kh \cosh k(h+z)] \quad (A10)$$

식 (16)에서 N_z 와 관련된 항은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_z}{\partial x}\right)^2 &= \left(\frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial N_z}{\partial h}\right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial N_z}{\partial k}\right)^2 \left(\frac{\partial k}{\partial h}\right)^2 + 2 \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial N_z}{\partial h} \frac{\partial k}{\partial h} + \left(\frac{\partial N_z}{\partial h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \quad (A11)$$

$$N_z \frac{\partial N_z}{\partial x} = N_z \left(\frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial N_z}{\partial h}\right) \frac{\partial h}{\partial x} = \left(N_z \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + N_z \frac{\partial N_z}{\partial h}\right) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_z}{\partial y}\right)^2 &= \left(\frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial N_z}{\partial h}\right)^2 \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{\partial N_z}{\partial k}\right)^2 \left(\frac{\partial k}{\partial h}\right)^2 + 2 \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial N_z}{\partial h} \frac{\partial k}{\partial h} + \left(\frac{\partial N_z}{\partial h}\right)^2\right) \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \quad (A13)$$

$$N_z \frac{\partial N_z}{\partial y} = N_z \left(\frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial N_z}{\partial h}\right) \frac{\partial h}{\partial y} = \left(N_z \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h} + N_z \frac{\partial N_z}{\partial h}\right) \frac{\partial h}{\partial y} \quad (A14)$$

식 (A11)-(A14)에 관련되어 나타나는 식들은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial N_z}{\partial k}\right)^2 dz = \frac{1}{\cosh^4 kh} \left(I_6 \cosh^2 kh - I_4 \frac{h}{2} \sinh 2kh + I_3 h^2 \sinh^2 kh\right) \quad (A15)$$

$$\int_{-h}^0 \frac{\partial N_z}{\partial k} \frac{\partial N_z}{\partial h} dz = \frac{1}{\cosh^4 kh} \left(I_5 \cosh^2 kh - I_4 \frac{h}{4} \sinh 2kh - I_1 \frac{kh}{4} \sinh 2kh + I_3 kh \sinh^2 kh \right) \quad (\text{A16})$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial N_z}{\partial h} \right)^2 dz = \frac{1}{\cosh^4 kh} \left(I_2 k^2 \cosh^2 kh - I_1 \frac{k^2}{2} \sinh 2kh + I_3 k^2 \sinh^2 kh \right) \quad (\text{A17})$$

$$\int_{-h}^0 N_z \frac{\partial N_z}{\partial k} dz = \frac{1}{\cosh^3 kh} \left(I_4 \frac{\cosh kh}{2} - I_3 h \sinh kh \right) \quad (\text{A18})$$

$$\int_{-h}^0 N_z \frac{\partial N_z}{\partial h} dz = \frac{1}{\cosh^3 kh} \left(I_1 \frac{k \cosh kh}{2} - I_3 k \sinh kh \right) \quad (\text{A19})$$

$$\int_{-h}^0 (N_z)^2 dz = \frac{1}{2 \cosh^2 kh} \left(\frac{\sinh 2kh}{2k} + h \right) \quad (\text{A20})$$

$$\int_{-h}^0 \left(\frac{\partial N_z}{\partial z} \right) dz = \frac{k^2}{2 \cosh^2 kh} \left(\frac{\sinh 2kh}{2k} - h \right) \quad (\text{A21})$$

여기서 사용된 $I_1 \sim I_6$ 의 값들은 다음과 같다.

$$I_1 = \int_{-h}^0 \sinh 2k(h+z) dz = \frac{1}{2k} (\cosh 2kh - 1) \quad (\text{A22})$$

$$I_2 = \int_{-h}^0 \sinh^2 k(h+z) dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k} \sinh 2kh - h \right) \quad (\text{A23})$$

$$I_3 = \int_{-h}^0 \cosh^2 k(h+z) dz = \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{2k} \sinh 2kh \right) \quad (\text{A24})$$

$$I_4 = \int_{-h}^0 (h+z) \sinh 2k(h+z) dz = \frac{h}{2k} \cosh 2kh - \frac{1}{4k^2} \sinh 2kh \quad (\text{A25})$$

$$I_5 = \int_{-h}^0 (h+z) \sinh^2 k(h+z) dz = -\frac{h^2}{4} + \frac{h}{4k} \sinh 2kh - \frac{1}{8k^2} (\cosh 2kh - 1) \quad (\text{A26})$$

$$I_6 = \int_{-h}^0 (h+z)^2 \sinh^2 k(h+z) dz = -\frac{h^3}{6} + \frac{h^2}{4k} \sinh 2kh - \frac{1}{4k^2} \cosh 2kh + \frac{1}{8k^2} \sinh 2kh \quad (\text{A27})$$

참고문헌

- 서승남, 연영진, 1994. Galerkin 유한요소법에 의한 항내 정온도 모형, 한국해양안·해양공학회지, 6(4), 439-451.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc., 13th Int. Conf. Coast. Engrg.*, ASCE, 471-490.
- Booij, N., 1983. A note on the accuracy of the mild-slope equation, *Coast. Engrg.*, 7, 191-203.
- Chamberlain, P.G. and Porter, D., 1995. The modified mild-slope equation, *J. Fluid Mech.*, 291, 393-407.
- Chandrasekera, C.N. and Cheung, K.F., 1997. Extended linear refraction-diffraction model, *J. Wtrwy., Port, Coast. and Oc. Engrg.*, ASCE, 123(5), 280-296.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography, *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443.
- Guazzelli, E. and Rey, V., Belzons, M., 1992. Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds, *J. Fluid Mech.*, 245, 301-317.
- Lee, C.H., Park, W.S., Cho, Y.S. and Suh, K.D., 1998. Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography, *Coast. Engrg.*, 34, 243-257.
- Massel, S.R., 1993. Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *Coast. Engrg.*, 19, 97-126.
- Mei, C.C. and Chen, H.S., 1975. Hybrid-element method for water wave, *Proc. of symp. on Modeling Tech.*, San Francisco.
- Park, W.S., Chun, I.S. and Jeoung, W.M., 1994. Infinite element for the analysis of harbor resonances. *J. of the KSCOE*, 6(2), 139-149.
- Sommerfeld, A., 1896. Mathematische theorie der diffraktion, *Math. Ann.*, 47, 317-374.
- Suh, K.D., Lee, C.H. and Park, W.S., 1997. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coast. Engrg.*, 32, 91-117.

Received January 27, 2003

Accepted August 25, 2003