韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2003. 11. 제 7권, 제 2호, 85-99.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2003, Vol. 7, No. 2, 85-99.

초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구

권성룡 (공주교육대학교)

1. 서론

수학은 인류가 오랜 시간에 걸쳐서 축적해온 지식이다. 이런 측면에서 보면, 학습자가 수학적 지식을 획득하도록 하는 것이 수학교육의 목표가 될 수 있다. 그러나 수학적 지식의 획득을 강조한 수학학습은 학습자가 '수학을 하도록' 하기 보다는 완성된 형태의 지식을 학습자에게 제공하여 권위적으로 제시된 수학의 기록을 수용하도록 한다는 비판을 받아왔다. 다른 한편으로 수학은 인간이 수학적 활동을 하면서 경험하는 사고활동이다. 수학적 지식을 획득할 때 결과로서의 지식만큼 중요한 것이 결과에 이르기까지의 사고과정이다. 수학을 이렇게 보면 수학교육의 목표는 학습자의 수학적 사고능력의 개발이다. 최근에 수학교육에서 학습자가 활동을 통해서 지식의 의미를 구성하도록 하는 것이나 역사 발생적 원리에 충실하게 지도하는 것 등은 학습자가 '수학을 하도록 한다.'는 취지에서 바람직하다 할 수 있다. 수학을 보는 두 관점을 종합해보면 수학교육의 목표는 학습자가 사고활동을 통해서 수학적 지식을 획득함과 동시에 수학적 사고능력을 개발하는 것이다.

수학적 사고능력의 개발을 위해서 학교수학에서 중점을 두었던 것이 증명이다. 증명은 수학적 사고능력의 근원이라 할 수 있는 추론 가운데 특히 연역적 추론능력의 개발에 도움이 되는 것으로 인식되어왔다. 이런 이유로 연역적 추론을 통해 가정으로부터 결론을 이끌어내는 증명은 학교수학에서 중요하게 다루어져 왔으며 앞으로도 그 중요성은 변하지 않을 것이다 (Hanna, 1995). 그러나 증명의 중요성을 인정하고 많은 시간을 할애하고 있음에도 불구하고 학생들의 증명 능력 검사의 결과는 기대에 미치지 못하며(우정호, 1994; 류성림, 1993; Miyazaki, 2000), 증명이 무엇이며 왜 하는지, 또 어떻게 하는지를 이해하지 못하고 있다(류성림, 1998; 나귀수, 1998; 서동엽, 1999; Fischbein, 1982; Senk 1985; 조완영, 2000). 이런 상황에서 증명은 풍부한 수학적 사고 방법으로서의 의미를 상실한 채 피상적이고 형식적으로 지도되므로 학생들은 기계적인 방식으로 증명을 암기하고 있다는 지적을 받고 있다.

수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이다(Almeida, 1996). 수학은 어떤 지식이 참이고 어떤 공식이 효과적인지를 알아내는 활동만큼이나 왜 그 지식이 참이며 왜 그 공식이 효과적인지를 다른 사람에게 설명하고 납득시키는 활동이 핵심인 학문이다. 따라서 학습활동에서도 자신의 생각이나 활동의 결과를 다른 사람에게 설명하고 납득시키는 활동이 중심이 되어야 할 것이다.

증명의 의미와 역할은 수리철학의 관점에 따라 상이하지만, 일반적으로 '가정으로부터 명제를 연역적으로 추론하고 형식적 언어로 이를 나타내는 활동'이라고 할 수 있다. 증명을 이렇게 규정하면 증명활동은 특정시기 이후에나 도입이 가능하다. 왜냐하면 구체적 조작기의 아동은 가설적 추론이나 기호를 이용한 연역추론을 할 수 없기 때문이다(Semadeni, 1984). 7차 수학과 교육과정에서도 8-나 단계에서 처음으로 삼각형의 합동조건과 삼각형의 중점 연결의 정리에 대한 증명을 다루고 있는데, 7차 수학과 교육과정에서의 증명에 대한 관점은 다음과 같다(교육부, 1999, pp. 74-75).

> 중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 조리 있게 설명하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지도한다. 추론의 과정을 정확하고 간결하게 표현하는 능력을 배양하는 것은 매우 중요하나, 이런 능력은 단시일 내에 달성될 수 있는 것은 아니므로 처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 사용하여 표현해 보도록 한다.

---
* ZDM 분류: E53
* MSC2000 분류: 97D99

아동이 연역적 추론을 이해하고 숙달하기 위해서는 이성의 발달과 더불어 일정 수준의 지식을 가지고 있어야 하며, 특히 이성의 발달은 시간이 요구되는 점진적인 과정이다(Godino & Recio, 1997). 연역적으로 추론할 수 있다고 해도 추론한 내용을 간결한 기호를 통해서 논리를 전개하고 표현하는 것은 단시일에 달성될 수 있는 것이 아니다. 그럼에도 불구하고 수학수업에서 지나치게 형식적 증명을 강조하고 있다(Hanna, 1989).

수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이므로 초등학교 저학년부터 자신의 주장을 조리 있게 설명하고 자신의 생각과 활동결과를 다른 사람에게 납득시키는 비형식적인 증명활동이 이루어질 필요가 있다. NCTM(2000)에서도 이와 같은 맥락에서 K-12학년의 전 수준에서 모든 학생들이 다음을 할 수 있어야 함을 강조하고 있다(p. 122).

- 추론과 증명을 수학의 중요한 측면으로 인식해야 한다.
- 수학적으로 추측하고 이것을 조사할 수 있어야 한다.
- 수학적으로 주장하고 증명하고 이를 평가할 수 있어야 한다.
- 여러 가지 추론유형과 증명방법 중 선택하여 이용할 수 있어야 한다.

이 글에서는 먼저 증명과 관련된 이전의 연구를 통해서 다양한 증명의 유형들을 살펴보고 이를 바탕으로 초등학생의 수학적 정당화 활동을 통해서 얻어진 반응을 고찰해볼 것이다. 마지막으로 고찰을 통해 얻어진 사실을 바탕으로 초등학교에서의 수학적 정당화 활동에 관한 몇 가지 시사점을 논의하고자 한다.

2. 정당화[1] 유형의 고찰

1) 증명이라는 말에서 느껴지는 의미가 주로 형식적 연역적 증명이 강하기 때문에 이 글에서는 형식적인 증명과 비형식적인 증명 모두를 포함하는 말로 정당화라는 용어를 쓸 것이다. 따라서 여러 연구자들의 증명유형에 관한 연구 또한 넓은 의미에서 정당화유형에 관한 연구로 생각할 수 있다.

정당화에는 몇 개의 예를 이용하거나, 실험이나 실측을 활용하거나 시각적인 그림을 이용하여 어떤 명제나 주장이 참이며 왜 참인지를 설명하는 경험적 정당화와 연역적 추론을 통한 형식적인 증명인 연역적 정당화로 크게 나눌 수 있다. 연구자에 따라서 증명의 유형은 다양하게 분류된다; Balacheff(1987)의 증명의 유형, Harel & Sowder(1998)의 증명방법, Tall(1995)의 표상과 증명의 인지발달, Miyazaki(2000)의 분류, Hanna(1989)의 '입증하는 증명'과 '설명하는 증명' 등.

Harel과 Sowder(1998)는 자신이나 남을 납득시키기 위해서 어떤 활동을 하는가에 따라 증명을 외적 증명방법, 경험적 증명방법, 분석적 증명방법으로 구분하였다.

* 외적 증명 - 자신이나 남을 납득시키거나 설득시키는 근원이 자신이 아닌 외부에 있는 것으로 생각하고 행하는 증명. 이 부류에 속하는 아동들은 자신의 생각을 바탕으로 옳고 그름을 판단하기 보다는 지식의 외적인 근원이라고 할 수 있는 교사나 교과서 또는 부모로부터 들은 것을 참으로 받아들인다. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) '10+10+10=30'이 참임을 어떻게 알 수 있는지를 물었을 때 "엄마가 그렇게 말했어요."라고 답하는 것

* 경험적 증명 - 예를 이용해서 증명하는 방법 - 지각적 증명, 예를 기반으로 하는 증명

① 지각적 증명 - 하나의 예로부터 지각한 것을 바탕으로 주장의 옳고 그름을 판단하는 방법. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) 정삼각형만을 삼각형으로 인식하고 있는 아동이 일반삼각형을 삼각형으로 생각하지 않는 것.

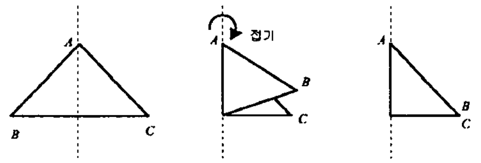
② 예를 기반으로 하는 증명 - 자신이나 남을 납득시키기 위해 한 가지 이상의 예를 이용하는 방법으로 구체물을 이용해서 경험적으로 정당화하는 것. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) '2+3=5'를 보이기 위해서 손가락이나 바둑알을 이용하는 경우. 시각적 단서를 이용(예. 네 개의 작은 정사각형이 모이면 하나의 큰 정사각형이 된다)하거나 하나의 특정한 예(예. 5×5=25이고 25÷5=5이므로 나눗셈은 곱셈의 역연산이라고 주장하는 것)를 들어 자신의 주장이 참임을 보이는 것.

* 분석적 증명 - 수학적 관계에 대한 추론을 통해서 일반적인 주장을 하는 방법. 구체물을 이용하지 않

는다. 일반적인 진술과 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) 셈 전략(counting strategy)을 이용해서 덧셈과 뺄셈문제의 답에 대한 옳고 그름을 판단하는 것. 9+5=14에 대해서 '9는 10이 되려면 1이 필요하므로 5에서 1을 빼서 9에 주면 10이 되고 4가 남으니까 14가 된다.'고 설명하는 것.

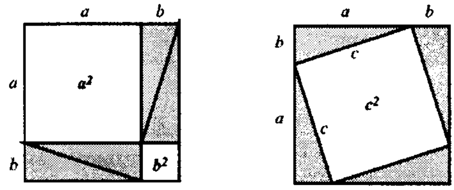
Tall은 개념과 표상의 발달에 관한 Bruner의 주장을 바탕으로 신체적인 활동이나 몸짓을 통한 환경과의 상호작용과 의사소통에 근거를 둔 활동적 증명, 시각적 표현과 기호적 표현이 서로 상호 작용하는 수준에서의 시각적 증명, 형식적 정의와 공리체계를 토대로 이루어지는 전통적인 의미에서의 형식적 증명 등 일련의 증명의 발달단계를 기술하였다(조완영과 권성룡, 2001).

* 활동적 증명 - 어떤 대상이 참임을 보이기위해서 물리적인 활동을 실행하는 방법. 이 과정에서 시각적이고 언어적인 요소도 포함되지만 관계를 보여주기 위해서 물리적인 움직임이 필요하다는 것이 가장 중요하다. 구체적인 사례에만 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 보이기 위해서 이등변삼각형을 대칭축으로 접어 포개어봄으로써 확인하는 것. 삼각형의 세 내각의 합이 180°임을 보이기 위해서 삼각형의 세 각을 오려서 한 곳에 붙여보는 것.



<그림 1> 활동적 증명의 예

* 시각적 증명 - 활동적 증명과 마찬가지로 활동적인 요소와 언어적 요소가 수반되지만 활동과정보다 결과가 중시되는 방법. 주로 구체적인 사례에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 그러나 구조를 보여준다는 의미에서는 Balacheff의 포괄적 예와 유사하다. 예) 3×4=4×3임을 보이기 위해서 가로 세 줄과 세로 네 줄의 바둑알을 배열하는 것. 25÷5=5를 증명하기 위해서 25개의 바둑알을 5개씩 5개의 묶음으로 나누는 것. 피타고라스정리를 그림으로 증명하는 것.



<그림 2> 시각적 증명의 예

위 증명을 이해하기 위해서는 위 그림에서 삼각형 네 개의 변화와 그 결과로 얻어지는 정사각형 사이의 관계를 파악해야만 한다. 이 예는 그림에 나타난 수치가 구체적인 값이 아니라는 측면에서 앞에서 제시된 두 예보다 더 발달된 것이다.

* 조작적 증명 - 대수식과 같은 기호를 조작함으로써 증명하는 방법. 일반적인 진술이나 구체적인 사례 모두에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) (2+7)×5=2×5+2×7과 같이 식의 조작을 통해 등식이 성립함을 보이는 것.

* 형식적 증명 - 연역적 추론을 통한 증명.

Balacheff(1987)는 개념화의 특징, 형식화, 정당화의 세 가지 기준을 바탕으로 증명을 활동적 증명, 지적 증명, 논증의 세 수준으로 구분하였다.

* 활동적 증명 - 실제적인 행위나 보여주기를 통한 증명. 순수한 경험주의(naive empiricism)와 결정적 실험(crucial experiment)

① 순수한 경험주의 - 몇 가지의 예를 바탕으로 명제를 정당화하는 방법. 일반적인 진술에만 적용될 수 있는 증명유형이다. 예) 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 3배와 같다라는 명제에 대해 2, 3, 4의 합은 3의 3배와 같다와 같이 예를 드는 것.

② 결정적 실험 - 극단적인 사례를 이용하여 점검함으로써 나머지 일반적인 사례에도 모두 적용됨을 보이는 정당화방법. 일반적인 진술에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 3배와 같다라는 명제에 대해 10001, 10002, 10003을 활용함으로써 모든 수에 적용됨을 보이려는 것.

* 지적 증명 - 활동은 없지만 문제에 제시된 특성을 형식화하고 그들 간의 관계에 의존하여 행하는 증명. 포괄적 예(generic example)와 사고실험(thought experiment)

① 포괄적 예 - 한가지의 예를 명확하게 분석하여 전체 대상의 구조적인 특징을 보임으로써 증명하는 방법. 일반적인 진술에 적용될 수 있는 증명 유형이다. 예) 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 3배와 같다는 진술에 대해 4, 5, 6에서 6을 5+1로 생각해서 1을 4에 주면 4+1, 5, 6-1이 되어 모두 5, 5, 5가 되므로 가운데 수의 3배와 같다고 반응하는 것.

② 사고실험 - 한가지의 예 대신 추상적이고 일반적인 경우를 조사함으로써 대상의 구조를 보이려는 방법. 일반적인 진술에 적용될 수 있는 증명 유형이다.

* 논증 - 이론으로 조직되어 수학계에서 인정을 받을 수 있는 방법.

Miyazaki는 증명의 수준을 설정할 수 있다는 Balacheff의 주장을 바탕으로 증명의 내용, 증명의 표현, 아동사고의 발달수준을 기준으로 증명의 유형을 다음과 같이 구분하였다.

<표 1> Miyazaki의 증명의 분류

구체적 조작

표현 / 내용	귀납적 추론	연역적 추론
1	증명 D	
2	증명 C	[illegible]

형식적 조작

표현 / 내용	귀납적 추론	연역적 추론
1	[illegible]	[illegible]
2		[illegible]

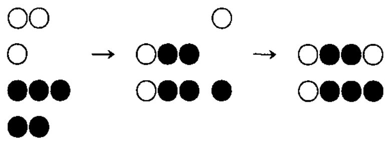
1=논증의 기능적 언어2)

2=논증의 기능적 언어 외의 언어, 그림, 조작 가능한 대상

* 구체적 조작에서의 증명 C - 귀납적 추론, 일상적 언어 표현. 예) 3+4+5=3*4, 7+8+9=3*8, 569+570+571=3*570. 따라서, 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 세 배와 같다.

* 구체적 조작에서의 증명 D - 귀납적 추론, 기능적 언어 표현. 예) a+b+c=3b (a, b, c: 연속된 세 수), e+f+g=3f (e, f, g: 연속된 세 수), i+j+k=3j (i, j, k: 연속된 세 수). 따라서 연속된 세 수의 합은 가운데 수의 세 배와 같다.

* 구체적 조작에서의 증명 B - 연역적 추론, 일상적 언어 표현. 예) 세 쌍의 짝지어진 공기 돌을 모으고 서로 다른 공기 돌을 짝지며 다른 한 쌍이 만들어진다. 결과적으로 전체는 네 쌍의 공기 돌이 된다.



* 형식적 조작에서의 증명 B - 연역적 추론, 일상적 언어 표현. 예) 인접한 두 줄의 공기 돌을 두 개씩 짝짓고 나면 두 가지 색깔 공기 돌 모두 몇 쌍의 공기돌과 한 개의 나머지가 생긴다. 다음에 이렇게 짝지어진 공기 돌들을 모우고 나면 몇 쌍의 공기돌과 두 개의 나머지를 볼 수 있다. 마지막으로 남은 두 개의 공기 돌을 모으면 새로운 한 쌍의 공기돌이 생긴다. 따라서 전체는 몇 쌍의 공기돌이 된다.

* 형식적 조작에서의 증명 A - 연역적 추론, 기능적 언어 표현. 예) 연속되는 세 수를 n-1, n, n+1이라고 하자.

$$(n-1)+n+(n+1)$$
$$= n+n+n-1+1 \quad [\text{결합법칙/교환법칙}]$$
$$= 3n \quad [\text{배분법칙}]$$

Miyazaki는 구체적 조작에서의 증명 D와 형식적 조작에서의 증명 D는 이론적으로 구분해야할 필요가 있지만 실제로 둘을 구분하는 것이 쉽지 않음을 인정하고 있다. 구체적 조작에서의 증명 B에서는 진술문만을 이용해서 연역적 추론을 할 수 없다는 것이 형식적 조작에서의 증명 B와의 차이점이다.

지금까지 여러 연구자들의 증명에 관한 연구를 바탕으로 여러 가지 증명 유형을 살펴보았다. Harel과 Sowder가 주장한 세 가지의 증명 유형은 수학적 생각

2) Miyazaki는 다음의 조건을 충족시키는 논증언어를 '논증의 기능적 언어'라고 했다.
- 대상과 그들의 특성 및 그들 간의 관계를 나타내는 기호와 배열규칙
- 명제를 나타내기 위한 용어와 배열규칙.
- 일련의 명제를 나타내기 위한 문장과 배열규칙 및 약어

이나 주장이 참임을 알 수 있는 근거가 어디에 있는가를 기준으로 분류한 것으로 바람직하지 않은 것부터 바람직한 유형까지 모두 포함된다. Tall은 Bruner의 개념과 표상의 발달에 관한 EIS이론을 바탕으로 신체적인 활동이나 몸짓을 통한 활동적 증명, 시각적 표현과 기호적 표현이 서로 상호 작용하는 시각적 증명, 형식적 정의와 공리체계를 토대로 이루어지는 전통적인 의미에서의 형식적 증명 등 일련의 증명의 발달단계를 기술하였다. Balacheff는 증명을 예를 활용하는 활동적 증명, 지적 증명과 논증의 세 수준으로 구분하였다. Miyazaki는 증명의 내용, 증명의 표현, 아동사고의 발달수준을 기준으로 증명의 유형을 구분하였다.

연구자들이 구분한 증명유형은 위계적인 측면이 있으므로 아동들의 반응을 통해서 그들의 수준을 파악하는데 도움이 될 뿐 아니라 다른 증명유형의 활용을 통해서 아동들의 증명능력의 발달을 기르는데 도움이 될 수 있다.

3. 초등학생들의 정당화 활동

초등학교 수학교실에서 이루어지는 정당화활동은 이후 중학교에서 본격적으로 이루어지는 증명활동의 기초가 된다는 점에서 중요하다. 그러나 중학교에서는 증명과제를 제시하고 이를 직접 다루는 것과는 달리 초등학교 수학교실에서의 정당화활동은 교수-학습의 과정에서 비형식적으로 이루어진다. 따라서 초등학교 수학교실에서 이루어지는 정당화활동의 실제는 교실마다 다양하다. 몇 가지의 과제를 통해서 실제를 정확히 알기는 힘들다. 그러나 구체적인 아동의 반응을 살펴봄으로써 교실에서 이루어지는 정당화활동의 모습을 추측해 보려고 한다.

초등학생의 수학적 정당화활동을 살펴보기 위해서 서울 성북구의 J초등학교 5학년 한 학급[3](N=34)을 대상으로 선정하여 2002년 10월 19일(토요일) 1, 2교시에 7개 문항을 제시하고 각각에 대해서 참인지의 여부와 그 이유를 쓰도록 하였다. 그리고 10월 23일에 그 중 6명(상 2명, 중 2명, 하 2명)의 아동들을 대상으로 추가 조사 및 면담을 실시하였다.

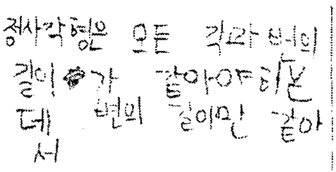
1) 정당화 활동 결과의 분석

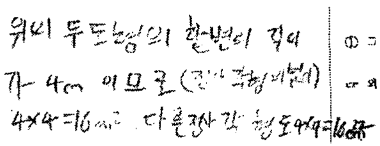
7개 문항에 대한 아동들의 반응을 각 문항별로 살펴보면 다음과 같다.

* 한 변의 길이가 4cm인 두 정사각형은 합동입니까? 그 이유는 무엇입니까?

① 추론을 이용한 반응 - 문제에서 주어진 가정은 '한 변의 길이가 4cm로 같은 두 정사각형'이다. 대부분은 '정사각형은 한 변의 길이가 같으면 나머지 변도 모두 같고 각도 같기 때문에 합동'이라는 추론을 활용하여 반응하였다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 형식적 증명에 해당된다.

이 문항에 대한 반응 중에서 한 명은 아래 반응과 같이 '정사각형'의 개념을 잘못 알고 있는 아동도 있었고, 또 '두 정사각형의 넓이가 같기 때문에 합동'과 같이 '합동'의 개념을 잘못 이해하고 있는 아동들도 있었다. 아동들의 이해에 대한 정보를 제공한다는 측면에서 정당화과제는 좋은 평가상황을 제공해준다.


정사각형은 모든 각과 변의
길이가 같아야하는
데 변의 길이만 같아
서


위의 두 도형의 한변의 길이
가 4cm 이므로

② 시각적 예를 이용한 반응 - 이 문제는 도형과 관련되어 있기 때문에 시각적인 예를 이용한 반응을 찾아볼 수 있었다. 5명의 아동이 그림을 이용해서 설명을 하였다. 그러나 한 변의 길이를 4cm로 작도하여 실제로 본을 떠서 포개어 보는 실험이나 실측을 이용한 반응은 없었다. 대신 두 정사각형을 나타내는 그림을 이용해서 설명하였다.

이 문제는 구체적인 치수가 제시되어서 아동들이 수월하게 추론하고 옳은 반응을 보일 수 있었고, 대부분의 아동이 주어진 가정을 잘 인식하고 이를 활용하여

---

3) 한 학급(N=33)을 대상으로 실시한 이 조사의 목적은 실제 아동의 반응을 얻는 것이었다. 보다 다양한 반응을 얻거나 결과를 일반화하기 위해서는 조사대상을 더 많이 할 필요가 있다.

결론을 이끌어냈다. 가정의 올바른 인식이 형식적 증명의 출발점이라는 측면에서 보면 바람직한 모습이다.

* 직사각형은 평행사변형이라 할 수 있습니까? 그 이유는 무엇입니까?

① 추론을 이용한 반응 - 많은 아동들이 '직사각형은 마주보는 두 쌍의 대변이 평행하기 때문에 평행사변형'이라는 추론을 이용하였다. 이 추론을 활용하기 위해서는 '직사각형은 마주보는 두 쌍의 대변이 평행하다'는 성질을 알고 있어야 한다. 이 유형은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 형식적 증명, Balacheff의 지적 증명에 해당된다.

4명은 직사각형이나 평행사변형과 같은 관련된 개념을 제대로 이해하지 못하였다. '네 변이 길이가 같지 않기 때문에', '4변과 크기가 같기 때문에'와 같은 반응과 함께 아래 제시된 반응이 그 예이다.

그 직사각형이 변의 길이
가 같거나 평행인지 알
지 못하여.

평행 사변형은 한쌍이 마주보는
도형이라서

② 시각적 예를 이용한 반응 - 실제로 직사각형과 평행사변형을 그려서 자신의 답을 설명한 아동이 9명 있었다. 그러나 그림에서의 시각적 단서(마주보는 두 변이 평행하다)를 이용해서 결론을 유도한 아동은 없었으며 개념정의를 바탕으로 추론하고 이를 설명하기 위한 방법으로 그림을 이용하였다. 이 문제가 일반적인 진술임에도 불구하고 그림이 추론에 핵심적인 역할을 하지 않은 이유는 아동들이 두 가지 개념에 대해서는 성질과 관계를 이용해서 추론할 수 있는 수준에 있기 때문인 것으로 생각된다.

③ 조건추론을 이해하지 못한 경우 - '직사각형은 평행사변형이다'라는 말은 '직사각형이 가진 성질은 평행사변형이 가진 성질을 만족시킨다.'는 것을 의미한다. 그러나 '직사각형은 네 변이 모두 직각이고 평행사변형은 직각이 한 군데밖에 없어서'나 아래 제시된 예와 같이 '직사각형은 평행사변형과 같다'라는 것으로 해석하는 아동도 있었다.

예를 들자면 정사각형 모양의
시계가 있는데.. 그 시계를 원모
양의 시계라고 말할수는 없기
때문에 여기서 말한 직사각형
을 평행사변형이라고 말하
지 못하는 것이 된다.

한편 '밑변이 같고 옆면이 같으면 (직사각형은 평행사변형이라고 할 수) 있고 아니면 없다'는 반응도 있었는데 이 반응 역시 가정을 바탕으로 결론을 내려야 한다는 것에 대한 이해의 부족으로부터 기인된 것으로 볼 수 있다.

이 문제에서는 구체적인 치수도 제시되어 있지 않고 일반적 진술만이 주어졌다. 따라서 두 도형의 성질을 이용해서 추론을 하지 못할 경우에는 직사각형을 구체적인 예로 제시하고 이를 바탕으로 결론을 유도해야 한다. 그러나 그림을 이용한 9명 가운데 시각적 단서를 바탕으로 추론한 아동은 없었다. 추측컨대 직사각형과 평행사변형의 개념에 익숙해져 있기 때문에 시각적인 단서의 도움 없이도 추론이 가능했기 때문인 듯 하다.

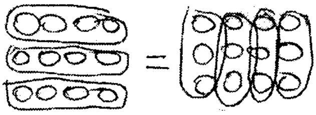
* 4×3=3×4는 참입니까? 그 이유는 무엇입니까?

① 계산결과를 이용한 반응 - 대부분이 두 수의 계산결과가 같기 때문에 참이라고 답했다. 계산식의 경우 가장 쉽게 확인할 수 있는 방법이 직접 계산을 하는 것이고 교과서에 제시된 대부분의 계산문제도 이와 같은 방법으로 확인할 수 있다. 따라서 아동들 반응 중 대부분이 이 유형에 속하는 것은 자연스럽게 보인다. 이 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명에 해당한다.

4×3의 답도 3×4의 답도 모두
12이기 때문이다.

② 시각적 예를 이용한 반응 - 계산결과를 설명하는 과정에서 그림을 이용한 아동이 3명 있었다. 이 경우에도 최소한 곱셈의 의미가 무엇인지를 알고 있어야 아래와 같은 그림을 이용해서 문제를 설명할 수 있다. 이 그림 외에도 산가지와 도형영역의 그림을 이용한 반응이 있었다. 이것은 Harel/Sowder의 예를 기반으로 하는 증명, Tall의 시각적 증명에 해당된다.

4개씩 3묶음이나 3개씩 4묶음이나
같기 때문이다.



이 문제는 계산결과가 제시되어 있지 않았기 때문에 등식 양변의 곱셈계산결과가 같다는 것만을 이용해도 참이 된다는 것을 보일 수 있다.

③ 등식에 대한 이해가 부족한 반응 - 2명의 아동은 등호 뒤에 답이 아닌 또 다른 문제가 제시되었기 때문에 틀렸다는 반응을 보였다. 이들은 등호의 앞에는 문제가, 뒤에는 답이 제시되어야 한다는 생각을 가지고 있었다.

그러한 이유는 위와 같은 4×3=3×4
풀이 아니다. 왜 그러냐면 먼저 4×3
을 곱하면 12가 된다. 그러나 어떻게 다시
3×4가 될수는 없는 것이다. 답이 12가
된다면 풀이라고 할수 있지만 4×3의
답이 다시 답이 아닌 다른식으로 바뀌게
되지는 못한다는 것이다

식이 나타내는 의미를 바르게 이해하기 위해서는 등식에서 이용되는 기호의 의미를 알고 바르게 사용할 수 있어야 한다. 이런 능력은 Miyazaki가 언급한 증명의 기능적 언어의 이용에 꼭 필요하다.

* 2+3=5는 참입니까? 그 이유는 무엇입니까?

① 추론을 이용한 반응 - 아래에 제시된 것과 같이 덧셈의 역연산인 뺄셈을 이용해서 계산결과가 참임을 보인 아동이 3명 있었다.

2+3을 하면 5이고
5-3을 하면 2이고
5-2를 하면 3이므로
이 계산은 참이다.

역연산을 이용한 반응은 가수와 합 사이의 관계를 이용하여 추론한 것으로 덧셈뿐만 아니라 다른 연산에서도 이용될 수 있는 추론방법이다. 이 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 조작적 증명에 해당한다.

② 그림을 이용한 반응 - 대부분의 아동들이 그림을 그려서 계산결과가 옳음을 보였다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 예를 기반으로 하는 증명, Tall의 시각적 증명에 해당된다.

00+000 =00000
그러므로 2+3=5

앞의 문제와는 달리 문제와 답이 모두 제시되어 있으므로 이 식이 참임을 보이는 방법은 그림이나 구체물을 이용해서 등식의 양변이 같음을 보이는 것이다. 이 방법은 아동들이 필산알고리즘을 형식화하기 전 단계에서 사칙연산의 이해를 위해서 구체물이나 그림을 이용해서 많이 경험했던 방법이다.

③ 증명이 불필요하다는 반응 - 6명의 아동은 '2+3=5이기 때문에'라는 반응을 보였다. 이 반응의 이면에는 진술자체가 자명하기 때문에 왜 참인지를 설명할 필요가 없다는 생각이 자리 잡고 있는 듯 하다. 실제로 아래와 같이 '상식적으로 알고 있는 것이어서'라는 반응을 볼 수 있었다.

2+3=5니까 참입니다.

2+3은 사람들 머리에
상식적으로 알고있는
것이어서

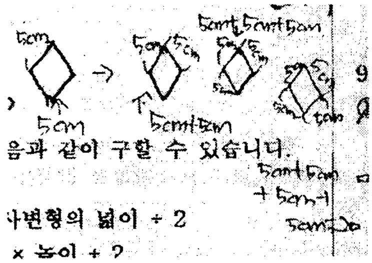
이 문제와 같이 계산결과가 제시된 문제의 경우 아동들이 이용할 수 있는 가장 흔한 방법은 직접 그림을 그려서 계산결과가 참임을 보이는 방법이다. 따라서 이런 유형의 문제는 아동들이 구체적인 예를 이용해서 정당화할 수 있는 대표적인 문제라고 할 수 있다.

* 한 변의 길이가 5cm인 마름모의 둘레의 길이는 20cm입니까? 그 이유는 무엇입니까?

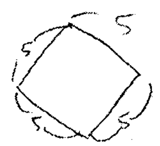
① 추론을 이용한 반응 - 대부분이 '마름모는 네 변의 길이가 같기 때문에 한 변의 길이를 네 배하면 둘레의 길이가 된다.'는 마름모의 성질을 이용해서 위 진술이 참이라고 설명하였다. 이 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 형식적 증명에 해당된다.

마름모는 4변의 길이가 같아야
하므로 둘레는 20cm이다

② 그림을 이용한 반응 - 설명을 하기 위해서 그림을 이용한 아동이 9명 있었다. 그러나 그림이 제공하는 시각적인 단서보다는 추론(마름모는 네 변의 길이가 같다)을 설명하기 위한 수단으로 이용했다. 한 명의 아동만이 여러 가지 마름모의 그림을 제시하여 '어떤 모양의 마름모이든 관계없이 한 변이 5cm이면 둘레는 20cm가 된다.'는 것을 보이려고 하였다. 이 반응은 Harel/Sowder의 예를 기반으로 한 증명에 해당된다.



위 그림에서 알 수 있는 사실은 아동이 제시한 마름모의 모양이 모두 동일하다는 것이다. 이것은 마름모에 대한 전형적인 예를 통해서 개념을 학습한 이유인 것으로 생각된다.



이 문제의 경우에도 실제로 한 변의 길이가 5cm인 마름모를 작도하고 각 변의 길이를 측정하여 답한 아동은 없었다. 대부분의 아동이 마름모의 개념과 성질에 익숙하기 때문에 시각적인 단서 없이도 문제를 해결할 수 있었기 때문인 것으로 생각된다.

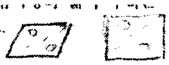
* 다음의 식이 참임을 설명하여라. 삼각형의 넓이 = 평행사변형의 넓이 ÷ 2 = 밑변 × 높이 ÷ 2

① 추론을 이용한 반응 - 이 문제에 대한 설명을 위해서는 평행사변형과 삼각형의 관계를 이해하는 것이 필요하다. 11명의 아동이 '평행사변형을 반으로 자르면 삼각형이 되므로 넓이 구하는 공식인 밑변×높이에 ÷2를 하면 된다.'고 설명하였다.

세요. 삼각형은 평행사변형의
$\frac{1}{2}$이기 때문에, 평행사변형
÷2이다

다른 10명의 아동은 '삼각형은 평행사변형의 $\frac{1}{2}$이기 때문에 평행사변형÷2이다'와 같다고 설명하였다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명에 해당된다.

② 그림을 이용한 반응 - 그림을 이용한 반응의 대부분은 평행사변형을 반으로 나누면 삼각형이 된다는 것을 보이기 위한 것이었다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 시각적 증명에 해당된다.

세요. 
위와 같이 사각형을 반으로 쪼개면
삼각형이 되기 때문에 사각형의 넓이
에서 ÷2를 해주면 됩니다.

삼각형은 높이×
밑변을 구해야 한다.
만약 3이고 밑변이 2면 3×2
높이가 를 한후 ÷2를하
면 3이다 그럼 답은 3이다
그러니 이계산은 참이다

1명의 아동만이 구체적으로 치수를 제시하고 이를 이용해서 넓이를 구한 후 주어진 식이 참임을 보였다. 이 반응은 Harel/Sowder의 예를 기반으로 하는 증명, Balacheff의 순수한 경험주의에 해당된다.

② 기타 - 제대로 답하지 못한 아동들이 많았다. 이들은 대부분 삼각형의 넓이 구하는 공식은 알고 있으나 이를 유도하는 과정에 대해서 잘 이해하지 못한 아동들로 판단된다. 아래의 반응과 같이 주어진 식이 선생님이 가르쳐준 것이기 때문에 참이라는 Harel/Sowder의 외적증명의 반응을 보인 아동도 있었다. 또 '자로 재본다'라는 반응도 있었다.

이런 생각 형의넘
기는 선생님께
확실히 배워서
짜로 제된다.

이런 반응을 보인 아동들은 스스로 설명하거나 참임을 보이는 활동을 해보는 경험이 더 필요하다.

* 두 홀수를 더하면 항상 짝수가 됩니까? 그 이유는 무엇입니까?

① 추론을 이용한 반응 - 아래에 제시된 것과 같이 짝수와 홀수가 가지는 구조적인 특성을 분석하여 자신의 생각을 정당화한 반응이 있었다.

짝수는 짝이 있는 수이며
홀수는 짝이 없는 수이다.
짝이 없는 아이끼리 같이
있으면 그 둘에겐 짝이
생긴다. 이와 같이 짝이 없는
두 홀수를 더한다면 짝 수가
된다. 1과 1을 더하면 둘이
짝수 2가 되는 것처럼 말이다.

위의 예에서 아동은 분석을 통해서 '짝이 없는 두 아이끼리 같이 있으면 짝이 생긴다.'라는 말로 구조적인 특성을 설명하였고, 아래의 예는 주어진 상황을 같은 홀수를 두 배하는 상황으로 좁게 해석하기는 했지만 '두 배를 하면 항상 짝수가 된다.'는 특성을 이용했다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 형식적 증명에 해당된다. 또 Balacheff의 사고실험에 해당된다.

어떤수에 ×2를 하면 항상
짝수가 된다 (예: 1×2=2 2×2=4 등)
두홀수를 더한다는 이야기는
1+1 이나 3+3 이라는 얘기니까
똑같은 수를 두번 더한다는 것이면 ×2
와 마찬가지 이니까 홀수+홀수는
짝수이다

② 구체적인 예를 이용한 반응 - 두 홀수의 합이 짝수임을 보이기 위해서 구체적인 예를 이용한 반응이다. 대다수 아동의 반응이 이 범주에 속한다. 그러나 주어진 진술이 참임을 보이는데 얼마만큼의 예가 필요한지에 대해서는 아동들마다 차이가 있었다. 이런 반응은 Harel/Sowder의 예를 기반으로 하는 증명, Balacheff의 순수한 경험주의에 해당된다.

1+3=4
짝수

예: 1+1=2, 3+3=6

위의 예와 같이 하나의 예만으로도 주어진 진술이 참이라는 것을 보일 수 있다고 생각하는 아동들이 많았다. 아래의 반응에서는 두 홀수의 합을 같은 홀수의 합으로 해석했다. 대신 예를 몇 가지 더 제시함으로써 주어진 진술이 참임을 보이려고 하였다. 좀 더 나아가서 생략부호(…)를 이용함으로써 더 많은 사례가 포함될 수 있음을 암시하였다. 그러나 이 반응 역시 부분적인 차이는 있으나 Harel/Sowder의 예를 기반으로 하는 증명, Balacheff의 순수한 경험주의에 해당된다.

작은 수를 대입해 보면 된다.
예를 들어 3+3=6 5+5=10 1+1=2이기
때문에 항상 짝수가 된다.

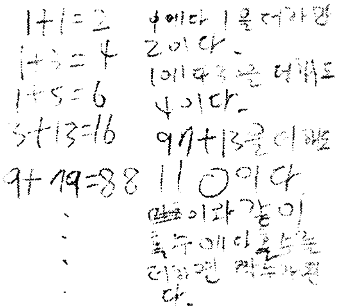
1+1, 3+3, 5+5 …

이와 같이 홀수와 홀수 끼
리 계속 더하면 항상 짝수
가 나온다.

앞의 두 예에서는 작은 홀수의 합부터 순차적으로 예를 든 것과 달리 다음의 예에서는 특정한 홀수의 합을 생각함으로써 주장이 옳다는 것을 보이려고 했다. 따라서 이 반응은 Balacheff의 결정적 실험에 가깝다.

홀수 11+11은 22이고,
1+1도 2처럼 다 짝
수가 되서 그럴 것 같다고 생각
한다.

아동들의 반응 중에는 경험적 정당화임에도 불구하고 앞의 생략부호(…)를 이용한 경우에서처럼 '두 홀수를 더하는 상황'의 다양한 예를 제시함으로써 주장이 일반적으로 참임을 보이려고 노력한 흔적을 찾아볼 수 있다. 다음의 예에서는 생략부호뿐만 아니라 크고 작은 홀수의 합까지 생각함으로써 수가 커져도 주장이 일반적으로 참임을 보이려고 하였다.



9+79나 97+13을 예로 든 것은 수가 커져도 두 홀수의 합은 항상 짝수가 됨을 보여주려는 시도이다.

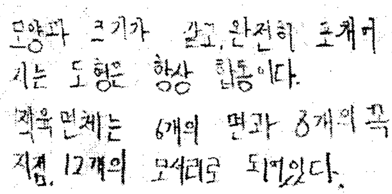
이 문제에 대한 아동 반응의 대부분은 경험적 정당화에 해당된다. 일반적인 진술을 다룬 문제들이 있었지만 이 문제에서는 특히 구체적인 예를 이용한 반응이 많았다. 앞에서 제시된 일반적인 진술을 다룬 문제가 아동들에게 친숙하고 교수-학습과정에서 경험해 봤음직한 과제였던 것에 비해서 짝수와 홀수에 관한 이 문제는 아동이 익숙하지 못한 문제이다. 또 도형개념의 경우 그림을 이용하는 방법이 있지만 이 문제의 경우 짝수와 홀수를 일반적으로 나타내는 방법(예. 짝수는 2m, 홀수는 2m+1)을 알지 못하기 때문에 구체적인 예를 이용한 반응이 많았던 것으로 판단된다.

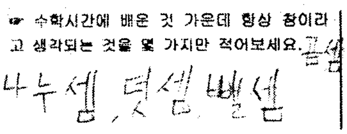
아동들이 구체적인 예를 제시하는 것이 주어진 진술의 참을 보이는데 충분치 않다는 것을 경험하는 것이 필요하다. 이를 위한 한 가지 방법으로 여러 가지 예를 제시하고 이들의 공통적인 특성을 바탕으로 어떤 사실을 추측해내는 활동을 할 수 있다. 추측이 거짓임을 보이는 데에는 하나의 반례로 충분하지만, 추측이 참임을 보이기 위해서는 구체적인 예를 제시하는 것 이상의 무엇이 필요하다는 것을 주어진 예들로부터 규칙성을 찾는 활동을 하면서 자연스럽게 알 수 있게 된다.

2) 비형식적 면담 결과의 분석

학업성취도를 바탕으로 담임교사가 추천한 6명(상 2, 중 2, 하 2)의 아동을 대상으로 정당화에 대한 추가적인 질문과 함께 비형식적 면담을 실시하였다. 이 조사의 목적은 학업성취도에 따라 수학적 정당화에 대한 생각에 어떤 차이가 있는지를 살펴보기 위함이었다. 이를 위해서 몇 가지 질문을 하였는데 그 결과는 다음과 같다.

'수학시간에 배운 것 가운데 항상 참이라고 생각되는 것을 몇 가지만 적어 보세요.'라는 질문에 대해 두 명의 아동이 '삼각형의 세 각의 합은 180°'라고 답했고, 한 명은 '도형'이라고 답했다. '도형'이라고 답한 아동에게 면담을 통해서 왜 그렇게 생각했는지를 물었으나 답을 하지 못했다. 한 아동은 '홀수+홀수는 항상 짝수가 된다.'는 것과 '2×3=3×2처럼 곱하기의 수가 바뀌는데도 답이 같다는 것'을 참이라고 답했다. 이 아동은 먼저 실시했던 정당화과제에서 나왔던 것들을 기억해서 말한 것으로 보인다. 아래의 첫 번째 반응에서와 같이 정의를 참이라고 생각하는 아동도 있었다.





성취도가 높은 아동은 구체적인 사실을 진술한 반면 성취도가 낮은 아동들은 '도형'이나 사칙연산과 같은 답을 하였다.

'위에 적은 것들이 항상 참이라는 것을 어떻게 알게 되었나요?'라는 질문에 대한 반응은 크게 '선생님의 설명을 듣고'와 '직접 계산이나 측정을 해 보아서'의 두 가지로 나누어진다. 성취도가 하에 속하는 아동 중 하나는 '수학을 하다보면 된다.'라는 반응을 보였고 나머지 한 아동은 '다른 것보다 잘 되서'라는 반응을 보였다. 이후 면담에서 이 아동은 도형영역이 다른 영역보다 문제를 잘 풀 수 있어서 참이라고 답했다고 반응했다.

'수학시간에 배우는 것들이 항상 참이라고 생각하나요? 왜 그렇게 생각하나요?'라는 질문에 대해서는 성취도의 상, 중에 속하는 4명의 아동이 모두 '교과서에서 거짓을 가르치지는 않으므로' 또는 '선생님이 거짓을 가르쳐주지 않으므로'와 같은 반응을 보였다. 따라서 성취도가 높은 아동의 경우에도 Harel/Sowder의 외적증명에 해당하는 반응을 보였다.

'자신의 생각이나 문제 푸는 방법 또는 답이 참이 된다는 것을 다른 사람에게 설명하는 것이 필요한가요?'라는 질문에 대해서는 여섯 명 모두가 필요하다는 답을 했다. 따라서 수학교실에서 정당화활동의 필요성은 대부분의 아동이 인식하고 있는 것으로 여겨진다. 그러나 실제로 자신의생각을 설명하거나 주어진 진술이 참임을 보이는 활동은 많이 부족하다는 것을 아동들의 반응으로부터 알 수 있었다.

면담을 통해서 모든 아동이 정당화의 필요성을 인정한 반면 수학시간에 배운 내용이 참인 이유에 대해서는 '교과서에 있기 때문에' 또는 '선생님이 가르쳐 준 것이기 때문에'와 같은 외적인 것에 의존하는 경향이 있었다. 다만 성취도가 중, 상인 아동들은 이외에도 자신이 직접 생각이나 계산을 해 본다는 반응을 함께 보였다.

4. 결론

몇 가지 정당화활동과제를 이용해서 초등학교 5학년 아동들의 수학적 정당화활동을 살펴보았다. 활동결과와 면담결과의 분석을 통해서 다음의 것들을 알 수 있었다.

첫째, 정당화과제에 대한 5학년 아동들의 반응은 진술문의 참과 거짓에 대한 판단을 교사에게 의존하는 외적 증명으로부터 연역적 추론에 이르기까지 다양했다. 같은 학년 아동이지만 정당화활동의 능력은 큰 차이를 보였다. 또, 익숙한 개념이나 활동에 대해서는 추론을 이용한 반면 그렇지 않은 과제의 경우에는 구체적인 예를 이용한 반응이 많았다.

수학의 본질은 증명에 있으며(Ross, 1998), 증명은 수학을 행하고 의사소통하고 기록하는 활동의 핵심으로 수학과 분리될 수 없으므로(Schoenfeld, 1994), 정당화활동은 수학활동의 전반에서 이루어져야 한다. 특히 외적 증명과 같은 바람직하지 않은 증명 유형을 보이는 아동은 교사의 권위에 의존해서 옳고 그름을 판단하는 외적증명에서 벗어나 스스로 자신이나 친구의 생각이나 주장의 옳음을 판단하는 충분한 경험이 제공될 필요가 있다. 또 경험적 정당화에서 점진적으로 추론을 이용한 연역적 정당화가 이루어질 필요가 있다.

아동들의 정당화활동에 대한 회의적인 시각도 없지 않다(Porteous, 1990). 특히 Coe & Ruthven(1994)에 따르면 아동들은 비형식적인 정당화활동을 통해서는 연역적 증명의 기능이나 역할에 대해서 이해할 수 없다고 주장한다. 그러나 비형식적인 정당화활동은 학습자의 수준에서 의미있는 방법을 활용하는 것이며, 나아가 연역적 추론의 필요성을 인식할 수 있을 뿐만 아니라 적절한 환경이 제공된다면 연역적 추론으로 발전될 수 있다(Almeida, 1996). 아동들의 반응 가운데 문제에서 주어진 가정을 활용하여 결론을 이끌어내는 활동은 연역적 증명의 출발점이다. 또 도형개념과 관련된 문제에서는 일반적인 진술임에도 불구하고 아동들이 친숙한 개념이었기 때문에 추론을 활용하여 정당화하는 예를 찾아볼 수 있었다.

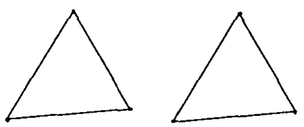
둘째, 여러 가지 사례로부터 추측을 만들어내고 이를 정당화하는 활동이 제공될 필요가 있다. 증명은 현재의 문제를 조사하여 추측을 형성하는 발견의 맥락 이후에 그 추측이 참인지 거짓인지를 조사하는 정당화의 맥락이 오며, 마지막으로 그 결과를 다른 사람에게 설명하여 확신시키는 사회적 맥락이 온다(나귀수, 1998). 따라서 여러 가지 사례로부터 추측을 만들고 정당화하는 것으로부터 활동이 이루어질 필요가 있다. 이 경우, 몇 가지의 사례가 주어진 진술의 참을 보장하지는 못한다는 사실을 인식하는데 도움이 될 것이다. 연역적 정당화의 필요성을 인식시키기 위해서라도 여러 가지 사례로부터 추측하고 이를 스스로 정당화하는 활동이 많이 제시될 필요가 있다.

* 다음 연속된 세 수의 합을 구하여라.
1) 3+4+5=
2) 14+15+16=
3) 143+144+145=
4) 510+511+512=
* 위 계산결과로부터 추측할 수 있는 것은 무엇인가?
* 이 추측은 다른 경우에도 적용되는가?

셋째, 아동들이 형식적이고 연역적인 증명을 하기위해서는 논증의 기능적 언어에 대한 더 깊은 이해가 필요하다. 수학의 특성은 형식화와 기호화에 있다. 따라서 수학적으로 받아들여지고 있는 다양한 기호의 의미와 활용에 대한 이해가 필요하다. 수학적 기호를 이해하지 못할 경우 이후의 수학학습은 많은 제한을 받게 되며, 산술에서 대수로의 이행도 어렵게 된다. 따라서 수학적 기호의 이해와 활용에 대해서도 이해할 필요가 있다. 이것은 Harel/Sowder의 분석적 증명, Tall의 조작적 증명, Balacheff의 포괄적 예나 사고실험과 같은 정당화 유형 활용의 바탕이 된다.

넷째, 정당화 과제의 특성을 고려하여 다양한 방법으로 정당화할 수 있는 과제가 제공될 필요가 있다. 여러 연구자들이 제안한 증명의 유형은 아동들의 다양한 반응을 분석하고 이후의 정당화활동의 지도방안을 구안하는데 도움이 된다. 그러나 여러 연구자가 분류한 증명유형은 증명과정과 그 결과를 바탕으로 이루어진 것이다. 증명의 과정과 결과에 영향을 미치는 요인에는 과제의 특성도 있다. 다음의 예를 생각해보자.

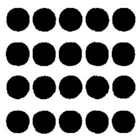
예제 1) 다음 두 삼각형이 합동임을 보여라.

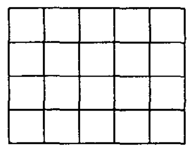


위의 두 삼각형이 합동임을 보일 수 있는 방법은 3가지 정도이다. 첫 번째는 하나를 잘라서 다른 하나에 포개어 보는 방법, 두 번째는 하나를 본떠서 포개어 보는 방법, 세 번째는 세 변의 길이를 측정하거나 각을 측정하여 비교하는 방법이다. 세 가지 방법 가운데 처음 두 가지는 합동의 정의에 충실한 활동이고 세 번째 방법은 삼각형의 합동조건을 알고 있어야 생각할 수 있는 방법이다. 그러나 이 세 가지 방법은 모두 예를 이용한 증명활동으로 Tall의 활동적 증명의 예이다. 주어진 도형이 이등변삼각형인지, 선대칭도형인지를 확인하는 것과 같이 도형을 제시하고 그것이 어떤 특성을 가지는지를 확인하는 과제는 모두 이런 유형에 속한다. 결론적으로 초등학교 아동의 경우 시각적 단서를 기초로 한 활동적 증명에 익숙해질 수밖에 없다. 따라서 과제의 특성을 고려하여 다양한 증명의 방법을 경험하도록 하는 것이 필요하다.

예제 2) 4×5=20이 참인지 확인하여라.

위 계산이 옳음을 보이는 방법은 다음과 같다.
방법 1) 4+4+4+4+4=20
방법 2) 20÷4=5, 20÷5=4
방법 3) 방법 4)





방법 5) 수직선을 이용한 방법

예제 2는 계산결과를 확인한다는 측면에서 초등학생이 쉽게 접할 수 있는 문제이다. 초등수학에서 사칙연산이 차지하는 비중이 큰 만큼 이런 활동의 비중 역시 크다. 방법 1은 동수누가의 의미를 바탕으로 확인하는 것이고, 3, 4, 5는 곱셈의 모델로 자주 등장하는 그림들이다. 다만 방법 2는 역연산을 이용해서 계산결과를 정당화한 것이다. 그러나 나눗셈은 곱셈보다 늦게 학습하게 되므로 곱셈단원에서 위 문제를 제시한 경우에는 이용할 수 없는 방법이다. 방법 3, 4, 5는 시각적 증명에 속하며 방법 1, 2는 Harel/Sowder의 분석적 증명이나 Tall의 조작적 증명에 속한다.

위에 제시된 두 가지 예제의 공통점은 구체적인 사례를 다루고 있다는 것과 교과서 활동에서 흔히 접할 수 있다는 것이다. 이런 과제에서 아동들이 활용할 수 있는 방법은 그림을 그리거나 구체적인 예를 활용하거

나 실험, 실측을 하는 것이다. 아동들은 이런 유형의 과제를 통해서 자연스럽게 예를 이용하거나 실험, 실측을 하는 정당화방법에 익숙해지게 된다. 따라서 다양한 방법으로 정당화할 수 있는 과제를 아동들에게 경험시켜주는 것이 필요하다. 이와 더불어 구체적인 경우를 다룬 과제와 일반적인 경우에 관한 진술도 함께 경험할 필요가 있다. 증명은 궁극적으로 같은 구조적 특성을 가지는 모든 경우가 참임을 보이는 것이다. 따라서 구체적인 예에 관한 정당화로부터 출발하여 일반적인 진술문을 다루는 경험도 필요하다.

다섯째, Miyakawa(2002)의 주장[4]처럼 아동들의 증명능력은 사고의 발달수준에만 영향을 받는 것이 아니라 그들이 가지고 있는 지식에 의해서도 영향을 받음을 알 수 있다. 추론을 할 수 있는 아동이라고 해도 관련된 개념이 옳지 않은 경우에는 올바르게 정당화할 수 없었다(예, 직사각형은 네 변의 길이가 같으므로 마름모이다). 따라서 아동들의 정당화능력의 향상을 위해서는 관련된 개념이나 기능의 이해가 선행되어야 한다.

여섯째, 정당화과제는 좋은 평가 상황을 제공한다. 과제에 포함된 개념을 올바로 이해하고 있는지 또는 아동이 가진 개념이 어떤 수준의 것인지를 판단하는데 유용한 정보를 제공해준다. 따라서 정당화과제는 수학의 본질적인 활동인 동시에 수학학습에 대한 유용한 정보를 제공해 준다는 측면에서 수학의 교수-학습과정에서 강조될 필요가 있다.

일곱 번째, 증명의 역할에 대한 교사의 올바른 인식이 필요하다. 교실에서의 수학학습의 관행은 교사의 수학에 대한 지식과 신념에 의해서 영향을 받는다(Borko & Putnam, 1996). 특히 수학교실에서 증명의 역할과 가치를 이해시키는 일은 교사 자신의 증명에 대한 개념에 크게 의존한다(Knuth, 2002). 따라서 교사가 입증, 설명, 의사소통, 발견, 체계화와 같은 서로 다른 증명의 역할과 가치를 명확히 인식하는 것이 증명활동의 출발점이 되어야 한다.

수학적 추론이나 증명은 한 단원에서 지도될 수 있는 것이 아니라 수학학습이 이루어지는 전 학년에 걸쳐서 아동들의 수학적 경험의 일부분이 되어야 한다. 수학적으로 추론하는 것은 마음의 습관이며 다른 모든 습관과 마찬가지로 다양한 맥락에서의 지속적인 활용을 통해서 개발되어야 한다(NCTM, 2000). 이를 위해서는 추론과 증명을 수학의 중요한 부분이라는 인식을 바탕으로 수학적으로 조사하고 추측하고 이를 정당화하고 증명하고 평가하는 활동이 수학학습 실제로 정착되어야 한다.

Wilder(1981)는 "시대뿐만 아니라 문화에 따라서도 '증명'의 의미가 달라진다는 것을 잊지 말아야 한다."고 주장하였다. 문화의 개념을 교실문화로 축소시켜보면 각 교실의 문화에 따라서도 '증명'의 의미는 달라질 수 있다. 어떤 교실에서는 학급 구성원 각자가 주장이나 생각의 옳고 그름을 판단하는 증명자의 역할을 할 것이고 다른 교실에서는 교사만이 그 교실에서 제기되는 많은 주장과 생각의 진위를 판단하는 유일한 근원으로서의 역할을 할 수도 있다. 초등학교 아동들의 수학적 정당화 능력의 향상을 위해서는 먼저 각 교실에서 증명과 정당화를 강조하고 학습자 모두가 증명과 정당화 활동의 주체로 인식되는 사회적 규범과 사회-수학적 규범이 형성될 필요가 있다.

4) Miyakawa는 자신의 연구에서 아동들의 짝수에 대한 개념에 따라서 그들이 활용하는 증명의 유형이 다름을 확인하였다.

참 고 문 헌

교육부 (1999). 중학교 교육과정 해설(III). 서울: 대한교과서주식회사.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석-중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림 (1993). 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

______ (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

우정호 (1994). 증명지도의 재음미. 대학수학교육학회 논문집 **제4권 제1호**, pp.3-24.

______ (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교

원대학교 박사학위논문.

조완영 · 권성룡 (2001). 학교수학에서의 증명. 수학교육학연구, **11(2)**, pp.385-402.

Almeida, D. (1996). Justifying and proving in the mathematics classroom. *Philosophy of Mathematics Education Newsletter* 9.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics,* **18**, pp.147-176.

Borko, H., & Putman, R. (1996). Learning to teach. In R. Calfee & D. Berliner(Eds.), *Handbook of educational psychology*(pp.673-725). New York: Macmillan.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs. *British Educational Research Journal,* **20**, pp.41-53.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, **3(2)**, pp.9-18.

Godino, J. D. & Recio, A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Lahti, Finland.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, **9(1)**, pp.20-25.

_________ (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of Mathematics*, 15, 42-49.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue(Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Paris.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes. In A. Schoenfeld et al.(Eds.), *Research on Collegiate Mathematics*, v3.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof, *Journal for Research in Mathematics Education,* **33(5)**, pp.379-405.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: The case of proof for the sum of two even numbers. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **41**, pp.47-68.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

_________________________________(2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author.

Porteous, K. (1990). What do children really believe?. *Educational Studies in Mathematics*, **21**, pp.589-598.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, **3**, pp.252-255.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, **13**, pp.55-80.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, **4**, pp.32-34.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The mathematics teacher*, **78(6)**, pp.448-456.

Tall, D. (1995). Cognitive developments, representations and proof. *Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education*, London, pp.27-38.

Wilder, R. W. (1981). *Mathematics as a cultural system.* New York: Pergamon.

A study on mathematical justification activities in elementary school

Kwon, sungyong
Gongju National University of Education, 376, Pongwhang-Dong, Gongju, 314-711, Korea
xenolord@gjue.ac.kr

In this paper, firstly examined various proofs types that cover informal empirical justifications by Balacheff, Miyazaki, and Harel & Sowder and Tall. Using these theoretical frameworks, justification activities by 5th graders were analyzed and several conclusions were drawn as follow:

1) Children in 5th grade could justify using various proofs types and method ranged from external proofs schemes by Harel & Sowder to thought experiment by Balacheff.

This implies that children in elementary school can justify various mathematical statements of ideas for themselves. To improve children's proving abilities, rich experience for justifying should be provided.

2) Activities that make conjectures from cases then justify should be given to students in order to develop a sense of necessity of formal proof.

3) Children have to understand the meaning and usage of mathematical symbol to advance to formal deductive proofs.

4) New theoretical framework is needed to be established to provide a framework for research on elementary school children's justification activities. Research on proof mainly focused on the type of proof in terms of reasoning and activities involved. But proof types are also influenced by the tasks given. In elementary school, tasks that require physical activities or examples are provided. To develop students' various proof types, tasks that require various justification methods should be provided.

5) Children's justification type were influenced not only by development level but also by the concept they had.

6) Justification activities provide useful situation that assess students' mathematical understanding.

7) Teachers' understanding toward role of proof(verification, explanation, communication, discovery, systematization) should be the starting point of proof activities.

* ZDM classification: E53
* MSC2000 classification: 97D99