韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2003. 11. 제 7권, 제 2호, 75-84.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2003, Vol. 7, No. 2, 75-84.

과학과 연결된 함수 교수·학습 자료 개발방향[1)]

조완영 (충북대학교)
김남균 (토성초등학교)

1. 서론

함수 개념은 수학적 세계는 물론 물리적, 사회적, 정신적 세계에서 일어나는 변화 현상 가운데 그 '종속관계'를 설명, 기술, 조직하기 위한 도구로서 도입되었다. 함수 개념과 함수적 사고는 과학, 공학, 의학과 같은 자연 학문은 물론 경제학, 사회학, 심리학, 언어학 등의 인문 학문에서도 중요하다. Klein은 함수적 사고의 중요성은 응용을 포함한 수학전체를 포괄하는 데 있음을 밝히고 학교수학에서의 함수 개념은 대응이라는 추상적인 정의가 아니라 종속성이라는 관점에서 도입되어야 하며 기본적인 예들을 통해 살아있는 자산으로 학생들에게 전달되어야 할 것이라고 주장하였다(정영옥, 1997). 프로이덴탈은 함수교육은 '종속적인' 관련성을 갖는 학습자 주변의 다양한 현실적인 변화 현상으로부터 출발하여 종속 관계에 대한 심상의 구성을 바탕으로 점진적인 수학화 경험을 거쳐 집합사이의 대응 관계로서의 현대적임 함수 개념에 이르도록 해야 한다고 주장한 바 있다. 7차 수학과 교육과정 7학년에서 함수 개념을 변화와 규칙, 관계의 개념이 반영된 종속적인 변화로서 도입한 것도 이러한 흐름과 맥을 같이 한다.[2)]

학생들에게 현실적인 변화현상은 실생활 및 타교과와 관련된 현상과 수학적인 현상으로 구분하여 생각할 수 있다. 많은 교과서에서 도입하고 있는 음료수나 승차권의 자동판매기에서의 돈 투입에 따른 산출물의 변화, 몸무게에 따른 저울 눈금의 변화, 산의 높이에 따른 온도의 변화, 용수철의 늘어난 길이와 무게 등은 실생활이나 타교과 특히 과학과 관련된 현상이다. 반면 정사각형의 한 변의 길이와 넓이나 둘레 사이의 관계, 원의 반지름과 넓이, 수 패턴, 이항연산 등은 수학적인 현상이다. 특히 타교과와의 관련성은 함수 개념과 함수적 사고가 수학 외의 전문영역에서도 중요하다는 것을 인식시킬 수 있다는 점에서 중요하다. 함수와 관련된 현상은 타교과 특히 과학 교과에서 많이 발견된다. 속도와 가속도의 문제는 함수를 비롯한 해석학과 밀접하게 관련이 있다. 과학적 개념을 탐구함으로써 수학 개념 특히 함수 개념이 수학 내에 고립된 개념이 아니라는 것을 학생들이 인식할 수 있다.

그러나, 수학 특히 함수를 과학과 연결시켜야 한다는 주장은 많지만 함수와 과학을 연결시키는 구체적인 방법에 관한 연구는 많지 않다. 실제로, 함수 개념과 관련된 과학적 개념을 추출 분석하는 것은 간단한 문제가 아니다. 수학 교사의 입장에서 과학 개념에 익숙해 있지 않고, 과학 개념을 수학화하는 과정에서 과학 개념에 대한 오개념을 발생시킬 수도 있다. 수학교과에서 과학적 개념을 다룰 때 과학적인 요인들을 어느 정도 반영할 것인지도 결정하기 어려운 문제다. 과학적 개념을 지나치게 많이 다루면 관심의 초점이 과학으로 옮겨갈 수 있으며, 너무 간결하게 처리하면 과학 개념에 대한 오개념의 발생은 물론 인위적인 상황으로 보일 수 있다.

실제수학과 이론수학 특히, 함수와 과학을 연결시키는 과정은 수학적 모델링 또는 수학화 과정으로 잘 설명될 수 있다. 수학적 모델링이란 실세계의 문제를 수

---

* ZDM분류 : D33
* MSC2000분류 : 97D30
1) 본 연구는 2000년도 충북대학교 발전기금재단의 지원에 의해 연구되었음.
2) 이러한 주장이 7차 수학과 교육과정의 함수 개념 전개방식 전체가 옳다는 것을 의미하지는 않는다. 실제로, 정비례와 반비례에 기초한 함수 개념의 도입에 따른 오개념 가능성, 함수 개념의 계열화 문제와 종속성에 터한 함수의 도입에서 출발하여 대응으로서의 함수 개념으로 점진적 수학화 과정에 대한 문제, 집합 개념에 의존할 수밖에 없는 정의역, 공역, 치역 개념의 모호성 등은 문제의 여지가 있다.

학적 모델을 이용하여 해결하고 그 결과를 다시 실세계에 적용하는 일련의 과정을 말한다. 수학화 과정은 학생들에게 현실적인 상황을 탐구하여 심상을 구성하고 이를 통해 현상을 정리할 수 있는 수학적 본질을 재발명하는 과정이다.

본 연구는 학교수학의 규칙성과 함수 영역의 자료개발에 관한 연구의 일환으로, 본 논문에서는 타교과 특히 과학교과의 내용 중 함수와 관련된 자료들을 분석하여 함수 교수학습 자료의 개발방향을 제시하는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 먼저 수학화 과정과 수학적 모델링을 분석하여 함수와 타교과와의 연결 체제를 개념화한다. 다음에는 이러한 체제에 따라 과학과 연결된 함수 자료의 개발방향을 논의하고 과학 교과서에 나오는 함수와 관련된 현상을 추출하여 함수지도를 위한 자료를 예시한다.

II. 함수와 과학과의 연결 체제

이론수학과 실제수학 특히 함수와 과학을 연결하는 여러 과정 중의 하나가 수학적 모델링과 수학화 과정이다. 수학적 모델링은 수학적 개념이 들어있는 실세계 상황의 문제로부터 수학문제를 만들고 이를 수학적 모델을 이용하여 해결한 후 실세계상황에 해석, 적용하는 일련의 과정을 말한다. 프로이덴탈이 주장하는 수학화과정도 학생들에게 현실적인 의미가 있는 실세계 상황에서 출발하여 심상을 구성하고 이를 통해 수학적 본질을 재발명해 가는 일련의 과정을 일컫는다. 수학적 모델링과 수학화 과정은 현실세계를 출발점으로 삼고 이를 수학적 모델을 이용하여 수학의 세계로 끌어들여 해결한다는 점에서 매우 유사한 개념이다.

본 장에서는 수학적 모델링과 수학화 과정을 분석하여 함수와 과학을 연결시키는 개념체제를 구성한다. 이를 위해 먼저, 과학과 수학의 연결의 필요성을 알아본다. 다음에는 과학적 상황을 수학교육에 연결시키는 개념체제로서의 수학적 모델링과 수학화 과정을 분석한다.

1. 과학과 수학의 연결의 필요성

과학적 방법에 대한 과학자들의 관심은 과학적 탐구를 보다 효율적으로 수행하고자 하는 데 있으며 이런 점에서 실천적인 성격이 강하다. 반면 수학자들은 과학적 탐구 결과를 논리적, 수학적으로 설명하고자 하는 데 관심이 있다는 점에서 이론적이라 할 수 있다. 과학은 현상을 관찰, 조작하여 환경과 환경 내에서의 인간의 본질을 탐구한다. 과학자들은 확인할 수 있는 불변의 패턴을 찾아 지식의 기초로 삼고 이것을 이용하여 실세계를 설명한다. 이러한 방법은 경험적이고 귀납적이며 비형식적이다. 반면 수학은 관찰 가능한 세계와 관계에 국한하지 않고 패턴과 관계를 찾는 모델링 활동과 밀접한 관련이 있다.

프로이덴탈(1973)의 재발명 방법은 수학의 역사발생과 개체발생의 평행성과 동형성을 가정하고 학습자의 현실로부터 수학화 경험을 시킴으로써 현실을 수학적 수단으로 조직하는 지혜를 얻게 하려는 것이다. 즉 진정한 의미의 수학적 정신은 현실적인 현상을 수학화하려는 경향이라 할 수 있으며 수학적 활동은 현상을 정리하는 수단을 활동이라 할 수 있다. 수학화를 지향하는 수학교육은 현실적인 상황에서 문제가 제기되고 발생되어야 하며 학생은 상황에서 문제를 인식하는 경험을 해야 한다. 이러한 입장에서 보면 수학의 구조를 잘 알면 수학을 실세계에 적용할 수 있다는 생각은 잘못된 관점이며 실세계의 문제를 먼저 생각한 다음 수학화해야 한다. 여기서 현실적인 상황 또는 실세계는 실생활은 물론 타교과 상황이나 수학적 상황도 포함된다. 타교과 상황중 수학과 밀접한 관련이 있는 교과가 과학 특히 물리이다.

공간과 양에 관한 학문으로서의 수학은 실세계를 이해하는데 직접적인 공헌을 한다. 자연현상을 탐구할 때 수학이 중요한 역할을 한다. 물리문제가 수와 기하의 언어로 이상화되고 형식화되면 곧 수학 문제가 된다. 역사적으로 과학과 수학은 밀접한 관련이 있었으며 과학 현상을 탐구하는 가운데 수학 개념이 발생되어 왔다. 아르키메데스, 뉴턴, 리만 같은 위대한 수학자들은 한편 위대한 과학자이기도 하다. 수학과 과학은 개념적으로 연결되어 있음은 물론 수학활동 과정과 과학 활동 과정도 연결되어 있다. 따라서, 학교수학에서 수학과 과학의 연결을 강조할 필요가 있다.

그렇지만 수학과 과학의 상호 보완적인 성격은 학교교육과정에서 소홀히 다루어지고 있다. 물리는 철저히 탈수학화되었으며 매우 낮은 수준의 수학이 적용된다. 비중은 비례관계나 일차함수 관계의 개념을 피해 단위

부피의 무게로 정의되고(우정호, 2000), 변위와 속도, 가속도에 내재되어 있는 핵심 수학적 개념인 미적분 개념 역시 과학에서는 강조되지 않는다. 또한 지레의 법칙은 반비례의 언급없이 모멘트로서 도입되고 기성 공식을 부과함으로써 수학을 불필요하게 만들고 있다. 물리 교육자들은 학생들이 물리학을 배우는데 필요한 수학적 지식을 갖추는 것은 전적으로 수학교사의 책임으로 생각하며 가능한한 적은 수학을 이용하여 물리를 가르치려고 시도한다. 과학 교과서 도처에서 영향을 끼치고 있는 함수 개념과 함수적 사고를 언급하지 않고 물리를 가르치고 있으며 대학수준으로 갈수록 탈수학화된 물리를 강조하게 된다. 한편 수학교육자들은 물리 개념 특히 수학과 밀접한 관련이 있는 물리 개념을 가르치는 것은 과학교사들의 몫이라 생각하고 형식화되고 체계화된 수학을 가르치려고 한다. 즉, 수학교육과 물리교육은 상호 무관심 속에 서로의 관계를 무시해 오고 있다. 과학의 탈수학화나 수학의 탈과학화는 수학교육과 과학교육 모두에 도움이 되지 않는다.

과학교육을 하면서 수학 개념을 적용할 것인지의 문제는 전적으로 과학교육의 문제이다. 마찬가지로 수학교육의 입장에서 보면 과학과 수학을 연결시키는 문제는 전적으로 수학교육의 문제이다. 수학교육의 입장에서는 과학과 수학을 통합하려는 시도보다는 과학 내용을 수학적으로 조직할 필요가 있는 분야로 다루면서 과학의 수학화를 지향하는 것이 바람직할 것이다(우정호, 2000). 이 때, 과학내용을 어느 정도로 다룰 것인지 즉, 과학적 개념에 대한 오개념이 생기지 않도록 하면서 학생들에게 현실적인 의미를 줄 수 있는 과학 내용의 도입 수준을 어느 정도로 할 것이지가 중요한 문제가 된다. 수학 개념을 배우기 전에 학생들이 이미 학습한 과학 내용은 문제가 없지만 과학 교육과정에서 아직 배우지 않은 과학내용들은 어떻게 도입할 것인지도 고려해야 한다. 과학 내용을 지나치게 많이 다루면 수학적 개념에 대한 관심이 떨어질 수 있고 과도하게 단순화, 이상화하면 현실적인 의미가 사라질 수 있다.

2. 수학적 모델링과 수학화 과정

실제수학과 이론수학을 연결하는 여러 과정 중의 하나가 모델링이다. 어떤 것을 이해한다는 것은 자신이 알지 못하는 것을 자신이 알고 있는 것과 관련시키는 활동이다. 알지 못하는 것을 U(unknown), 알고 있는 것을 K(knowledge)라고 하자. 그러면 U에 대한 이해는 다음과 같이 생각하면서 시작된다(Deakin, 1990).

"U는 K와 비슷하다."

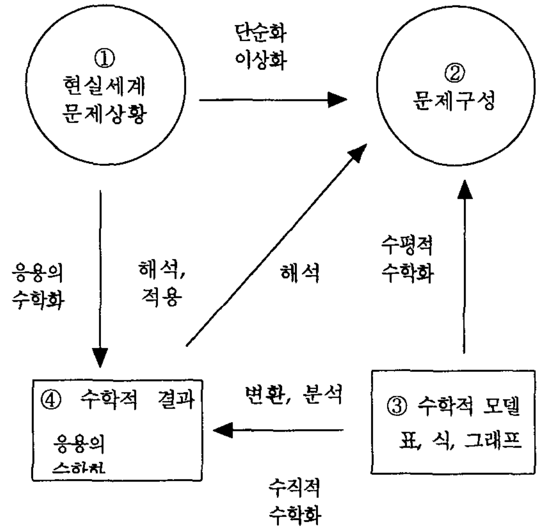
수학적 모델링의 경우 K는 우리가 알고 있는 수학적 지식 체계의 일부이다. 즉, 추상적 체계로 알려진 수학적 이론(정리, 법칙, 알고리즘 등)이다. 이런 수학 체계의 일부분과 실세계의 문제 상황을 비교함으로써 우리는 실세계 상황의 전형적인 예라고 할 수 있는 P(protytype)에 접근하게 된다. P와 관련된 수학적인 이론체계의 일부분이 P의 수학적 모델 M(model)이다. 따라서, P에 대한 수학적인 이해나 분석은 다음과 같은 문장으로 시작된다.

"P는 M과 비슷하다."

예를 들어, "할아버지의 나이는 손자 나이의 12배이고 두 사람의 나이의 합은 78이다. 두 사람의 나이를 구하여라."는 문제를 실생활 문제 P라고 하자. 이 문제를 해결하기 위해서는 P와 관련된 수학적 모델 M을 생각해야 한다. 이 때의 수학적 모델 M은 학생의 수준이나 성향에 따라 다를 수 있다. 예를 들어, 손자의 나이를 A라 놓고 12A+A=78이라는 식을 이용할 수도 있고 표를 수학적 모델로 생각하여 시행착오 방법으로 해결할 수도 있다. 이 과정이 수학적 모델링에서 가장 중요한 과정이며 학생들이 어려워하는 부분이다. 실세계 상황을 수학적으로 이해하려면 실세계와 수학 즉, P와 M 사이의 대응이나 사상의 관계를 설정해야 한다. 실세계 P에 대한 수학적 모델 M은 다양하다.

"자동차가 시속 x km로 60km의 거리를 달렸을 때 걸린 시간이 y 시이다. x와 y 사이의 관계식을 구하여라."라는 문제에서 자동차가 달리는 실세계 상황 P에 대한 수학적 모델 M을 관계식으로 제한한 것으로 볼 수 있다. 그러나 이러한 실세계 상황을 다양하게 표현해 보는 것이 이 상황과 관련된 추상적인 수학적 개념을 이해하는 데 도움이 된다. 딘즈의 지각적 다양성 원리에 따르면 수학적으로는 동형이지만 지각적으로는 다양한 구체물을 이용할 때 추상적인 수학적 개념에 대한 이해가 용이하다.

수학적 모델링 과정은 P를 M과 대응시키는 것에서 시작되며, 일반적으로 <그림1>의 ①,②,③,④의 순으로 진행된다. 이러한 네 단계에는 문제구성, 적당한 수학적 모델 만들기, 모델 분석, 모델 분석결과 해석하기 등의 활동이 포함되어 있다.



<그림 1> 수학적 모델링과 수학화(Dossey et al. (2002)와 Klaoudatos(1994)의 수학적 모델링과 De Lange (1987)의 수학화 과정을 혼합하여 수정한 것임)

일반적으로 이러한 수학적 모델링 과정에는 사상(mapping), 단순화(shorting), 실용성(pragmatic)이라는 세 가지 특성(Blum, 1989)이 포함되어 있다. 첫 번째 가장 기본적인 단계가 P에서 M으로의 사상과정으로(Deakin, 1990), 이 과정에서 단순화와 이상화가 이루어진다. 예를 들어, 시속 100km로 5시간 동안 자동차가 달린 거리를 구한다고 생각해 보자. 실제 상황에서는 매순간 시속 100km를 유지할 수 없을 뿐 아니라 5시간 동안 운전을 계속하는 것은 현실적으로 무리이며 휴게소에서 쉴 수도 있다. 즉, 실세계 상황이 단순화, 이상화된다. 이 과정에서 P의 요소들 중 중요하지 않은 것은 배제된다. 무엇을 배제하고 어떤 것을 보전할 것인지에 대한 판단은 문제의 성질과 상황을 도입하는 목적에 따라 달라질 수 있으며 이에 따라 선택되는 모델 역시 달라진다. 이러한 모델들은 어느 것이 맞고 틀리느냐의 문제에서 벗어나 목적에 따라 다양하게 이용될 수 있다(실용성).

프로이덴탈의 수학화 과정은 수학적 모델링 과정과 관련이 있다. 프로이덴탈(1991, 우정호, 2000에서 재인용)은 수학적 사고활동의 본질을 수학화로 보고 인류의 수학 학습과정인 수학의 발생과정, 수학화과정을 학습자의 현재의 상황에서 재발명하도록 안내하는 재발명 과정으로 수학을 가르칠 것을 주장한다. 학습자의 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화에 적합한 풍부한 문맥과 학습 상황에서 출발하여, 정신적 대상을 구성하고 이를 바탕으로 개념을 형성하는 수직적 수학화가 이루어지도록 지도해야 한다. 학습자에게 현실적인 문맥과 학습상황은 수학이 응용되는 상황 즉, 실세계 상황과 수학적 상황 모두를 포함한다. 수평적 수학화는 실세계 상황을 수학적인 모델을 이용하여 수학적인 상황으로 변환하는 과정(<그림 1>의 ①에서 ②를 거쳐 ③으로의 변환)이다. 수평적 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등의 경험적 접근방법을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 것으로, 도식화 활동, 시각화 활동, 관계를 발견하는 활동, 규칙성을 발견하는 활동, 실세계문제를 수학적 문제로 변형하는 활동 등을 들 수 있다. 수직적 수학화는 수평적 수학화 이후에 따라오는 수학적 과정으로 수학적 경험이 축적되어 이루어진 수학자체의 수학화(<그림 1>에서 ③에서 ④로의 변환)를 말하며, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정으로서 수준상승 과정과 관련이 있다. 관계를 공식으로 표현하는 활동, 규칙성을 증명하는 활동, 모델 자체를 다듬고 변형하는 활동, 모델을 결합하고 통합하는 활동, 새로운 수학적 개념을 명확히 표현하는 활동, 일반화하는 활동 등이 여기에 속한다. 다음에는 수직적 수학화의 결과로 재발명된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 응용의 수학화 과정(정영옥, 1997)이 있다(④에서 ①로의 변환)

과학과 연결된 함수 자료의 개발은 수학적 모델링과 수학화 과정의 각 단계에서 이루어질 수 있다. 실세계 현상을 수학적 문제로 조직하는 단계(①에서 ②로의 과정), 수학적 개념을 현실세계에 적용하는 단계(④에서 ①로의 과정)에서의 자료 개발이 특히 중요하다. 본 논문에서는 실세계 현상을 수학적 문제로 조직하는 단계에서의 자료 개발에 초점을 맞춘다.

Ⅲ. 과학과 연결된 함수 자료의 개발방향

함수 개념과 함수적 사고가 과학 특히 물리에서 이용되고 있음에도 물리와 함수를 연결하려는 노력이 부족하였다. 함수를 학생들의 이전의 수학경험이나 과학과 관계없이 도입하거나 실제적인 연결없이 도입하는 경우가 대부분이다. 7차 수학과 교육과정에서는 실생활과의 연결을 강조하면서 변화하는 양 사이의 관계라는 종속의 관점에서 함수가 도입되고 있지만 함수를 도입하는 상황은 현실적인 상황을 이상화, 단순화시킨 수학적인 상황이 대부분이다. 예를 들면, 자동차의 속력과 주행거리 사이의 관계를 도입하지만 속력과 거리 사이의 과학적 개념이 제거된 경우가 대부분이다. 자동차가 일정한 속력으로 달릴 때의 운동이 등속운동이라는 것을 언급하지 않는다. 이러한 '변형된' 상황은 함수 개념의 본질을 재발명하는 데는 도움이 되지만 학생들의 입장에서 현실성이 떨어진다.

본 장에서는 수학적 모델링과 수학화 과정을 토대로 과학과 연결된 함수 자료 개발 방향을 제시하고 개발 방향에 따른 자료의 예를 제시한다.

1. 과학과 연결된 함수 자료의 개발방향

Ⅱ장에서 논의한 바와 같이 수학적 모델링과정에는 사상, 단순화, 실용성이라는 세 가지 특징이 있다. 수학적 모델링과정은 실세계 상황의 전형적인 예라 할 수 있는 P에서 출발한다. 여기서의 P는 수학화 과정에서 수학적으로 조직될 필요가 있는 현실 상황이기도 하다. 학교수학에서의 수업활동은 실세계 상황 P를 해석하여 이를 수학적 모델로 번역하면서 시작된다. 따라서 이상적인 수학 수업은 P를 해석하는 데서 시작되어야 하지만 P는 수학적인 초점이 분명하지 않고 산만하여 P를 수학적 문제로 재구성하여 학생들에게 제시되는 것이 일반적이다.

따라서, 자료 개발은 수학적으로 조직될 필요가 있으며 가공되지 않은 실세계를 조사하는 것에서부터 시작된다. 과학과 관련된 함수자료를 개발하려면 제일 먼저 과학교육과정과 교과서를 분석해서 함수와 관련된 내용들을 추출해야 한다. 그러나 이러한 문제는 간단하지 않으며 수학교사가 어느 정도의 과학적 지식을 갖고 있어야 하며 때로는 과학교사와의 협동이 필요하다.

다음에는 가공되지 않은 실세계 현상 특히 과학적 현상을 수학적 문제로 재구성하는 과정이 있다. 이 과정에서 단순화, 이상화가 이루어진다. 실제로 이 과정이 자료 개발의 핵심과정이다. 여기서는 두 가지 문제를 고려해야 한다. 즉, 학생들에게 현실적이어야 하며 수학적으로 조직하기가 어렵지 않아야 한다는 다소 상충되는 두 가지 문제를 해결해야 한다. 학생들에게 현실적인 상황이기 위해서는 어느 정도의 과학 내용이 포함되어야 한다. 또한 단순화 이상화 과정으로 과학적 오개념이 발생할 수 있음을 주의해야 한다. 이 때 발생하는 오개념은 학생들이 과학을 배울 때 수정이 어려워진다. 따라서, 현실성을 유지하고 과학 개념의 오개념을 발생시키지 않으면서 수학 내용에 집중할 수 있는 수준의 조절이 필요하다(Frykholm & Meyer, 2002).

Mic(Mathematics in Context)의 Ups and Downs(Abels et al. 1998)에서는 식물과 박테리아의 성장이라는 과학내용을 이용하여 성장 패턴(선형패턴, 지수패턴 등)을 탐구하도록 설계되어 있다. 예를 들어, 세포 분할(박테리아의 성장)은 지수 모델과 관계가 있다. 성장률을 조사하여 시간의 변화에 따른 성장을 계산(표 구성)하고 그래프를 그려서 가설적 상황에 적용해 본다. 여기서의 과학 내용(박테리아의 세포분열)은 지수 성장의 수학적 기호에 의미를 부여하면서도 과학 내용 자체가 수학 내용을 지배할 만큼 복잡하지 않다. 그렇지만 과학이 손상되거나 오개념을 발생시킬 위험성을 갖고 있다. 이 자료에서는 세포 분할에 관한 여러 가지 중요한 과학적 요인들이 이 문제에서 무시되고 있다. 즉, 수학적 개념을 강조하기 위해 박테리아 성장에 영향을 끼치는 요인들을 선택적으로 채택하였다. 세포 분할 사이의 시간을 20분으로 잡은 것은 수학적인 편리성 때문이지만 과학적으로 사실인가의 문제가 제기될 수 있다. 수학 교사의 입장에서는 문제가 될 수 없지만 과학 교사들에게는 세포분할 사이의 시간이 중요하다. 과학 교사들은 실 세계에서 세포 분할 사이의 시간이 어느 정도인지를 논의하고 싶어할 것이다. 다음과 같은 요인들이 이 문제에서 고려되지 않았다(Frykholm & Meyer, 2002).

• 세포분할은 영원히 계속되는가? 느리게 시작하여 지수 모델이 부적절하지는 않는가?
• 박테리아의 성장에 영향을 끼치는 요인들은 어떤 것이 있는가?
• 모든 세포가 동시에 분할되는가? 아니면 교대로 이루어지는가?
• 분할되기 전에 죽는 세포 수는 얼마나 되는가? 분할되지 않는 세포는 얼마나 되는가?

그러나 이러한 문제를 수학에서 모두 다루면 수학에서의 초점이 흐려지고 학생들의 관심이 과학으로 옮겨가는 일종의 메타인지적 이동이 일어날 수 있다. 이러한 문제를 해결하는 한 가지 방법은 수학에서는 과학적 상황을 이상적으로 단순화시켜 논의하는 것이라는 점을 학생들에게 분명히 인식시키는 것이다. 수학에서는 학생들과 이러한 문제를 가볍게 제기하는 정도로 다루고 과학에서의 탐구과제로 넘기는 것이 좋다.

함수와 관련된 과학 내용에서 무엇을 배제하고 어떤 것을 포함할 것인지는 수학 수업의 목표에 따라 달라지며, 이에 따라 대응하는 수학 모델도 달라진다(수학적 모델링의 실용적 특징). 예를 들어, 함수의 뜻을 이해하는 것이 수업의 목표일 때, 함수의 정의와 관련된 상황에 초점을 맞추고 나머지 상황은 배제한다. 따라서, 자료를 개발할 때 수학적인 목표를 분명히 해야 한다.

일반적으로 수학교육의 목표는 수학 개념의 이해와 활용에 초점을 두고 있으며 특정의 수학 개념에 집중되어 있다. 그러나 과학내용은 수학시간에 가르치고자 하는 내용 외에 여러 가지 다른 수학적 개념과 기능, 표현 방법을 포함하고 있다. '함수의 뜻' 단원에서의 초점은 함수의 뜻에 있으며 일차함수나 이차함수 또는 순서쌍과 그래프를 다루지 않는다. 그러나 함수와 관련된 과학 내용들은 일반적으로 그래프를 다루고 있다. 이러한 문제는 수학의 위계성을 재검토할 필요성을 제기한다. 즉, 정비례와 반비례→함수의 뜻→좌표평면과 순서쌍→함수의 그래프의 순으로 위계화된 함수 단원 교과서 구성이 과연 타당한가의 문제가 발생한다. 정비례와 반비례 외에 비선형 상황 등 다양한 함수상황과 언어, 그래프, 식, 표 등 다양한 표현이 제공될 때 함수 개념의 재구성이 용이해 질 수 있다.

과학적 현상과 관련있는 함수 자료의 개발방향을 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 수학교육과정과 과학교육과정을 비교 분석한다. 이러한 분석을 통해 함수와 관련된 과학적 현상을 추출하고 과학개념과 수학개념의 교육과정상의 순서를 비교한다. 과학 시간에 배운 것과 배우지 않은 것의 구분은 과학적인 탐구활동의 정도를 결정하는 데 중요한 역할을 한다. 둘째, 현실적인 것과 수학적인 것의 조화가 요구된다. 즉, 과학 내용의 포함정도를 적절히 고려하여 수학적 문제를 구성한다. 과학 내용이 너무 복잡해지면 수학 내용의 초점이 흐려질 수 있고 너무 단순화하면 현실성이 떨어지며 과학 개념에 대한 오개념의 여지가 발생한다. 과학 내용의 포함정도는 학생들의 수준, 과학 개념의 특성, 수학수업의 목표에 따라 다를 수 있다. 셋째, 과학 내용에 다양한 수학적 개념이 포함될 수 있음을 주목할 필요가 있다. 즉, 수학 교육의 목표에 따라 같은 현상을 달리 조직해야 한다.

다음 절에서는 이 세가지 개발 방향을 구체적인 예를 통해 논의한다.

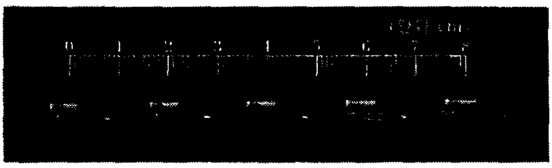
2. 함수와 과학 내용의 연결의 예

함수와 과학과의 연결을 수학적 모델링 또는 수학화의 관점에서 체계화할 수 있다. 함수와 관련된 과학 내용은 함수 개념을 재발명하기 위한 실세계 현상으로 제공된다. 다음은 7차 교육과정 중학교 2학년 과학교과서의 여러 가지 운동에 나오는 내용으로 함수와 관련된 현상이다(이광만 외, 2002, pp. 12-13).

에스컬레이터나 무빙 워크 또는 공장의 컨베이어 벨트 등은 속력이 변하지 않는 일정한 운동을 한다. 이러한 운동을 **등속운동**이라고 한다.(중략)

탐구3 등속운동의 그래프

다음 그림은 등속 운동을 하는 장난감 기차를 0.1초 간격으로 찍은 다중 섬광 사진이다.

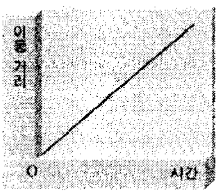


(1) 기차가 찍힌 각 구간의 거리와 속력은 각각 얼마인가?

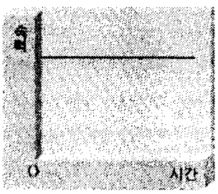
(2) 기차가 이동한 거리를 세로축, 시간을 가로축으로 하여 그래프를 그려보자. 기차가 이동한 거리는 시간에 따라 어떻게 변하는가?

(3) 기차의 속력을 세로축, 시간을 가로축으로 하여 그래프를 그려보자. 기차의 속력은 시간에 따라 어떻게 되는가?

등속 운동을 하는 물체는 같은 시간 동안 같은 거리를 이동한다. 따라서 시간과 물체가 이동한 거리의 관계를 그래프로 그리면 기울기가 일정한 직선이 된다. 이 때 직선의 기울기는 속력을 나타내므로, 기울기가 클수록 속력도 크다는 것을 알 수 있다. 또, 등속 운동을 하는 물체는 속력이 일정하므로, 물체의 시간과 속력의 관계를 그래프로 그리면 시간 축과 평행한 직선이 된다.



시간-이동거리 관계 그래프



시간-속력 관계 그래프

이 예를 보면 과학에서는 등속 운동을 정의하고 등속 운동의 특징을 그래프로 나타내어 변화 관계를 탐구한다(탐구3). 여기서는 거리와 속력을 구하는 문제, 시간과 기차의 이동거리, 시간과 속력 사이의 변화관계를 그래프로 표현하도록 요구하고 있다. 시각적으로 확인하는 정도로 다루어지며 대수적인 식으로 표현하도록 요구하지는 않는다. 과학 교과서에서의 도입 방식은 수학과 달리 주로 양적이다. 위의 예는 수학적으로 조직될 필요가 있는 과학적 현상으로 실세계 문제라 할 수 있다. 수학적 모델링의 출발점인 실세계 상황이다.

이러한 과학 현상이 수학에 도입될 때는 가르치고자 하는 수학적 개념이 무엇이냐에 따라 달라진다. 이 자료는 '함수의 뜻', 일차함수의 기울기를 도입할 때 이용될 수 있으며, 미분에서 변화율을 도입할 때도 유용한 자료로 이용될 수 있다. 함수의 뜻은 이 내용을 배우기 전에 도입되고 일차함수와 미분에서의 변화율은 이러한 과학 내용을 배운 후에 다루어진다. 따라서, 함수의 뜻 단원에서는 시간과 거리 사이의 관계를 직관적으로 탐구하는 활동이 요구된다. '함수의 뜻'을 도입할 때 탐구3의 내용을 중심으로 자료를 재구성할 수 있다(수학적 모델링의 ②). 그러나 일차함수와 변화율과 관련된 자료를 개발할 때는 과학적인 탐구활동을 상당히 줄일 수 있다.

이러한 현상이 수학에 도입될 때 수학에 관련이 없는 요소들은 무시되거나 단순화 되고 이상화된다. 시간, 거리, 속력 사이의 관계가 7학년의 '함수의 뜻' 단원에서 다음과 같이 도입되고 있다.

> 자동차가 시속 80km로 x 시간 동안 달린 거리를 $y$km라고 하면 y는 x의 함수이다. 이 때, (거리)=(시간)×(속력)이므로 이 함수를 $y=80x$ 또는 $f(x)=80x$ 로 나타낸다.

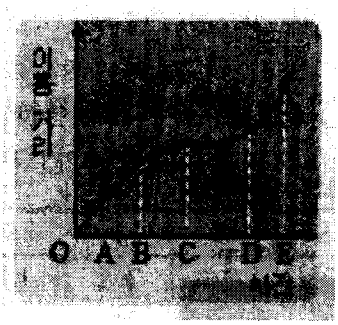
이 상황에서는 거리, 시간, 속력 사이의 탐구활동이 배제되어 있고 과학적 개념인 '등속 운동'의 의미를 설명하지 않는다. 과학과 7차 교육과정에서는 중학교 2학년에서 등속운동을 도입하고 있다는 점을 고려할 때 학생들에게 현실적인 상황이 아니다. 이 상황은 거리와 속력 사이의 관계에 초점을 맞춘 언어적 표현을 대수적인 표현으로 번역하는 상황이다. 함수를 정의한 다음 예로 도입된 상황이더라도 문자가 포함된 언어 표현을 대수적인 식으로 곧 바로 번역하는 것은 문제가 있어 보인다. 그래프 표현은 이 부분에서는 다루어지지 않는다[3]. 그러나 '여러 가지 운동'에 나오는 그래

3) 함수를 정의하는 과정에서 함수의 그래프가 다루어지지 않는 것은 수학의 위계 구조에 의한 것으로 보인다. 좌표평면과 순서쌍 개념을 도입한 후에 그래프를 도입한다. 이러한 수학의 위계 구조에 따른 교과서 구성 방식은 논의의 여지가 있다. 함수와 관련된 실세계 상황은 그래프로 표현된 것일 수도 있다. 딘즈의 다양성의 원리에 따르면 학생들은 함수 개념을 구성하기 전에 지각적, 수학적으로 다양한 상황을 경험할 필요가 있다. 따라서, 정비례와 반비례 외에 일차함수, 이차함수 상황은 물론 구체적인 함수 이름을 갖지 않은 상황을 통해, 그리고 언어적 표현과 대

프는 좌표평면의 개념을 모르더라도 다룰 수 있는 것으로 그래프 표현을 여기서 다루는 것도 큰 문제가 될 것 같지는 않다. 그림, 그래프, 대수적인 식, 언어 표현 사이의 상호 번역활동은 함수의 역동성을 인식하고 함수의 의미를 이해하는 데 도움이 된다.

속력이 일정할 때의 운동은 과학적으로 등속운동이며 수학적으로 해석하면 일차함수가 된다.여기서 속력이 일정하지 않을 때의 운동 상황도 자료에 포함될 필요가 있다(<그림 2>).

다음 그래프는 일직선 위를 움직이는 어떤 물체의 이동거리와 시간과의 관계를 나타낸 것이다. 시간에 따른 속력의 변화를 설명하여라.



<그림 2> 이동거리와 시간

함수 개념의 도입시 정비례와 반비례 외에 일차함수, 이차함수, 특별한 이름을 갖지 않는 함수 등을 함께 다룰 필요가 있다(딘즈의 수학적 다양성의 원리).

이 상황을 중학교 2학년 수학의 직선의 기울기 단원에서도 이용할 수 있다. 7차 수학과 교육과정 2학년 수학 교과서에서는 20%와 같이 도로의 경사도를 나타내는 도로 표지판 등 실생활과 관련된 소재를 이용하여 기울어진 정도를 설명한 후, 일차함수의 그래프에서 기울어진 정도를 기울기로 정의한다. 그러나, 일차함수의 기울기의 의미를 설명하기 위한 더 이상의 노력없이 너무 빨리 일차함수 식과 변화표를 이용하여 대수적이고 형식적으로 기울기를 정의한다. 학생들은 형식적인 기울기의 정의에 초점을 맞추게 되고 기울기의 현실적 맥락에 대한 경험은 사라지게 된다. 기울기 개념은 변화율의 특수한 경우라고 할 수 있다. 학생들에게 현실적인 의미를 갖는 변화 상황은 다양하다. 변화율이 일정한 경우(직선의 기울기)뿐 아니라 일정하지 않는 경우도 제시할 필요가 있으며(<그림2> 상황 등을 이용하여 미분에서의 변화율 개념과 연결), 일정한 변화 상황도 다양하게 제공될 필요가 있다. 이 예에서 '일정한'의 의미를 조사하면서 기울기, 변화율과 관련지을 수 있다.

과학에서도 "기울기가 일정한 직선…"이라는 설명에서 '기울기'라는 용어를 이용하지만 이 용어는 수학적이라기 보다는 일상적인 의미에 가깝다. 따라서, 교과서의 도로 표지판 상황과 더불어 제시될 수 있다. 다음에는 형식적인 기울기의 정의를 도입하기 전에 이러한 일상적인 의미에서의 기울기를 수학적인 의미의 기울기로 수학화할 수 있다. 즉, 시간의 변화와 그에 따른 거리의 변화의 비율을 조사하면서 불변의 성질(이 상황에서는 변화율이 일정하다)을 학생들이 찾아내고 이를 기울기로 명명할 수 있을 것이다. 수학적인 정의는 그 다음에 이루어지면 된다. 또한 그래프의 기울기를 변화시켜 자동차의 속력과 기울기의 관계를 연결시키면 현실적인 의미도 풍부해지고 일차함수 족의 성질을 이해하는 데도 도움이 될 수 있다. 실제 수학 자료에서는 이러한 현상(수학적 모델링의 ①)을 단순화시켜 장난감 기차의 시간-거리 그래프와 시간-속력 그래프를 초기 상황으로 제시할 수도 있다(수학적 모델링의 ②). 이러한 도입상황은 수학적인 재능이 뛰어나지 않은 학생들에게 대안이 될 수 있다. 교과서에서는 언어적 표현, 식, 대응표, 그래프의 순으로 계열화 되어 있으며 그래프를 언어적 상황으로 번역하는 활동은 거의 없는 실정이다. 함수의 뜻의 경우와 마찬가지로 다양한 직선 그래프가 병렬로 제시될 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 논문은 함수 교수학습 자료를 개발하는 연구의 일환으로 과학 교과와 관련된 함수 자료의 개발방향을 제시하는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 수학적 모델링과 수학화 과정을 분석하여 자료 개발을 위한 개념 체제로 이용하였다.

본 논문에서는 수학적 모델링과 수학과 과정의 출

수적 표현 외에 그래프 표현, 수치적 자료를 포함하는 표 등 다양한 표현을 통해 함수 개념을 도입하는 것이 바람직하다.

발점인 실세계 현상 특히 과학적 현상을 수학적 문제로 구성하는 과정에 초점을 맞추었다. 과학적 현상을 함수 자료로 개발할 때 고려해야 할 점을 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째, 수학교육과정과 과학교육과정을 비교 분석한다. 이러한 분석을 통해 함수와 관련된 과학적 현상을 추출하고 과학개념과 수학개념의 교육과정상의 순서를 비교한다. 과학 시간에 배운 것과 배우지 않은 것의 구분은 과학적인 탐구활동의 정도를 결정하는 데 중요한 역할을 한다. 둘째, 현실적인 것과 수학적인 것의 조화가 요구된다. 즉, 과학 내용의 포함정도를 적절히 고려하여 수학적 문제를 구성한다. 과학 내용이 너무 복잡해지면 수학 내용의 초점이 흐려질 수 있고 너무 단순화하면 현실성이 떨어지며 과학개념에 대한 오개념의 여지가 발생한다. 과학 내용의 포함정도는 학생들의 수준, 과학 개념의 특성, 수학수업의 목표에 따라 다를 수 있다. 셋째, 과학 내용에 다양한 수학적 개념이 포함될 수 있음을 주목할 필요가 있다. 즉, 수학 교육의 목표에 따라 같은 현상을 달리 조직해야 한다.

본 연구의 후속연구로 다음과 같은 연구가 이루어질 필요가 있다. 첫째, 과학교육과정과 교과서를 분석하여 수학과 관련된 현상을 체계화하여 수학 교수-학습 자료로 개발하는 연구가 필요하다. 수학과 과학이 연결되어 있음을 경험함으로써 학생들은 수학의 유용성을 인식할 수 있다. 둘째, 학생들이 과학과 관련된 자료로 학습할 때 수학적 성취도와 태도와 신념의 변화에 대한 전반적인 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

강옥기 외 (2000). 수학 7-가. 서울: (주)두산.

우정호 (2000). 수학학습-지도의 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

이광만 외 (2002). 중학교 과학 2. 서울: 지학사.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Abels et al. (1998). Ups and downs. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education and Freudenthal Institute (Eds.) *Mathematics in Context*. Chicago: Encyclopaedia Britannica Educational Corp.

Blum, W., & Berry, J. S (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*. Chichester, UK: Ellis Horwood

Deakin, M. (1990). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Auther.

Frykholm, J. A., & Meyer, M. R. (2002). Intergrated instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School*. **7(9)**, pp.502-508.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task*. Dordecht: D. Reidel Publishing Company.

The direction for development of function teaching · learning matrials integrating mathematics and science

Cho, Wan Young
Department of Mathematics Education, College Education, Chungbuk National University, 48 Gaesin-Dong, Heungdeok, Cheongju, Chungbuk, 361-763, Korea.
e-mail: wycho@chungbuk.ac.kr

Kim, Nam Gyun
ToSung Elementary school, Poongnap 2-Dong, SongPa-Gu, Seoul, Korea
E-mail: ngvirus@chol.com

The purpose of this study is to suggest the direction for development of function materials integrating mathematics and science.

First, we must investigate curricular scope and sequence of mathematics and science.

Second, the science contexts selected need to support the mathematics concepts, not overwhelm them. The mathematics can easily get lost if science becomes too complicated. We may be tempted, which can result in misconceptions that are hard to correct later.

Third, Many different examples of mathematics-science integration exist, therefore, it is important to find rich science contexts to connect with mathematics.

* ZDM classification: D33

* MSC2000 classification: 97D30