

치면 프로파일 모델에 따른 기어 치면 내부의 응력 분포

구영필[†] · 오명석 · 김형자 · 김영대

부경대학교

Sub-surface Stress Distribution beneath the Contact Surface of the Gear Teeth for Two Profile Models

Young-Pil Koo[†], Myung-Suck Oh, Hyung-Ja Kim and Young-Dae Kim

School of Mechanical Engineering, Pukyong National University

Abstract – The sub-surface stress field beneath the gear's contact surface caused by the contact pressure in lubricated condition has been calculated. To evaluate the influence of the clearance shape on the stress field, two kinds of tooth profile models were chosen. One is the conventional cylinder contact model and the other is the new numerical model. Love's rectangular patch solution was used to obtain the sub-surface stress field. The analysis results show that the sub-surface stress is quite dependent on both the contact pressure and the profile model. The maximum effective stress of the new model is lower than that of the old model. The depth where the maximum effective stress occurs in the new model is not proportional to the intensity of the external load.

Key words – spur gear, sub-surface stress, elastohydrodynamic lubrication, profile model.

1. 서 론

정밀 기계공업의 발전과 더불어, 대부분의 기계장치에 적용되는 동력 전달 요소인 기어에 대하여 신뢰성을 고려한 설계기술이 요구되어져 왔다[1-2]. 신뢰성을 향상시키기 위해서는 거시적 강도 측면에서의 설계뿐만 아니라 장기간 사용 후에도 기어 치면의 손상을 예방할 수 있는 표면 설계도 필요하다.

기어 치면의 설계에는 치형 프로파일 설계, 치폭 방향의 프로파일 설계, 표면의 경화 깊이 등이 다루어지며 이를 위해서는 치면에 작용하는 접촉 압력 분포와 접촉 압력에 의하여 야기되는 치면 내부의 응력 분포를 파악해야 한다. 동력 전달을 위하여 하중이 기어 이에 작용하면 두 이의 접촉면 사이에는 접촉 압력이 형성된다. 접촉 면적이 접촉 물체의 크기에 비하여 매우 작은 경우에는 접촉부의 극부적인 압력이 급격히 증대하고 그 영향으로 접촉부와 접촉부 부근의 응력장이 변화하므로, 접촉 압력은 표면의 수명에 크게 영향을 미

치게 된다[3-4].

무 윤활 상태에서 접촉면의 형상은 타원으로 단순화될 수 있으므로 접촉 압력으로서 Hertz의 정확해가 이용되고 있다[5]. 그러나 기어 치면의 접촉 형상은 타원이 아니며 또한 치면 사이에는 윤활유가 존재하므로 Hertz의 정확해를 이용할 수 없다. 윤활 상태의 접촉 압력은 탄성유체 윤활해석에 의하여 얻어질 수 있으며 이것을 내부 응력해석에 적용하면 무윤활 접촉에 비하여 실제에 근접한 운전 조건에 대한 응력해석 결과를 얻을 수 있다. 윤활해석에서 치면의 압력 분포는 치면 사이의 틈새 형상에 크게 영향을 받으므로 윤활해석 이전에 정밀한 틈새 형상을 먼저 알아야 한다[6]. 치면 사이의 틈새 형상은 두 개의 실린더 접촉으로 근사하여 계산되거나[7], 또는 치형 프로파일과 기어의 회전을 고려하여 수치적으로 구해질 수 있다[8].

본 연구에서는 치면 설계에 보다 정밀한 설계 데이터를 제공하기 위하여, 서로 접촉하고 있는 스퍼 기어의 치면에 실제의 운전 조건에서 발생할 수 있는 윤활 상태의 접촉 압력을 적용하여 접촉 영역 아래의 내부 응력을 해석적으로 구하고, 치면 프로파일 모델에 따른

[†]주저자 · 책임저자 : ypkoo@naver.com

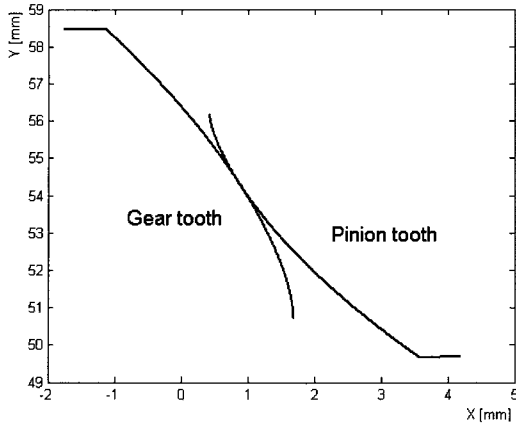


Fig. 1. Profile configuration of the contacting teeth.

내부 응력 분포의 변화를 비교 평가하고자 한다.

2. 접촉 표면 내부 응력장

Fig. 1에 나타난 기어 이의 접촉에서 표면 압력이 작용하는 영역이 기어 이 크기에 비하여 매우 좁기 때문에 기어 이를 반 무한체로 가정하여 접촉 표면 아래의 내부 응력 분포를 구할 수 있다. 기어 치면의 접촉 압력, 즉 전달 하중에 의한 표면에서의 수직압력 분포가 주어져 있다면 하중에 작용하는 기어 치면 위의 하중 작용영역을 n 개의 미소 사각조각 표면들로 나누어, 각 미소요소의 수직압력이 치면 내부의 임의의 점에 미치는 영향을 중첩함으로써 접촉 표면 아래 내부의 응력을 구할 수 있다. 즉, 기어 치면 내부의 임의의 점에서의 응력은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ij,k} \quad (1)$$

여기서, σ_{ij} 는 수직분포하중에 의한 기어 내부의 임의의 점에서의 응력이고, $s_{ij,k}$ 는 하나의 사각조각 표면에 작용하는 수직분포하중 p_k 에 의한 임의의 점에서의 응력성분으로서 Love가 제시한 식 (2)에 의하여 계산된다[9].

$$s_{11,k} = \frac{p_k}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \right)$$

$$s_{22,k} = \frac{p_k}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \right)$$

$$s_{33,k} = \frac{p_k}{2\pi} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \right)$$

$$s_{12,k} = -\frac{p_k}{2\pi} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \right)$$

$$s_{23,k} = -\frac{p_k}{2\pi} z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial z}$$

$$s_{31,k} = -\frac{p_k}{2\pi} z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z \partial x} \quad (2)$$

where,

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

식 (2)에서 Γ 와 Λ 는 포텐셜 함수로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma = \iint p_k \log(z+r) d\xi d\zeta$$

$$\Lambda = \iint \frac{p_k}{r} d\xi d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + z^2} \quad (3)$$

3. 수치해석

3-1. 해석 절차

Fig. 2에 전체 해석 절차를 나타내었다. 먼저, 치면 사이의 틈새 형상을 계산하고 3차원 탄성접촉해석을 수행하여 하중조건을 만족하는 접촉 압력 분포를 구한다. 다음에는 접촉 압력 분포를 윤활해석의 압력 초기치로 적용하여 탄성유체 윤활해석을 수행하여 윤활 상

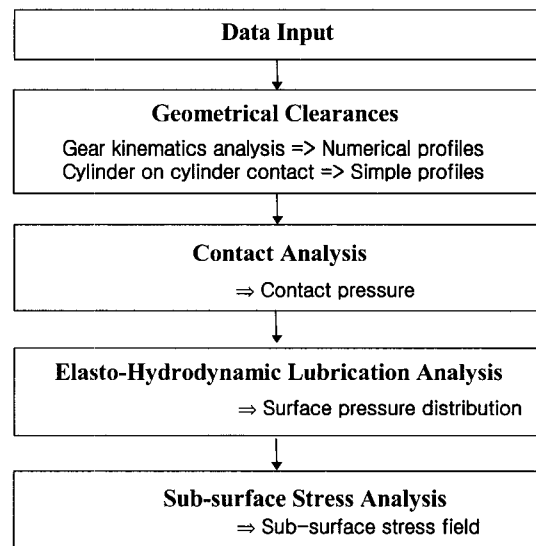


Fig. 2. Overall analysis procedure.

태의 접촉 압력을 구한다. 최종적으로 윤활 상태의 접촉 압력을 입력 데이터로 적용하여 부표면 응력해석을 수행한다. 결과로서 접촉 표면 내부의 응력장이 구해진다.

해석 대상으로서 인벌류터 스피어 기어를 선정하였다. 모듈 4.5 mm, 압력각 20°, 치폭 20.0 mm, 기어와 피니언의 잇수는 각각 24, 16, 회전속도는 1460 min⁻¹, 2190 min⁻¹이다. 기어 재료의 항복강도는 830 MPa, 상당탄성계수는 220 GPa, 프와송 비는 0.3을 적용하였다. 기어는 윤활 상태에서 작동되고 피치점 주위에서는 미끄럼이 작으므로 마찰은 무시될 수 있다고 가정하였다. 격자 수는 운동방향으로 47개, 치폭 방향으로는 41개, 치면 내부 깊이 방향으로는 50개로 하였고 격자 크기는 각각 0.0179 mm(2a), 0.50 mm(2b), 0.0045 mm(a/2)로 하였다.

3-2. 치면 프로파일 모델

기어 이의 프로파일은 연속적인 인벌류터 치형이지만 해석에서는 치형 프로파일의 이산적인 값이 사용된다. 본 연구에서는 기존의 실린더 접촉 프로파일 모델과 새로운 수치적 프로파일 모델에 관하여 윤활해석과 응력해석을 수행하여 그 결과를 비교 평가하고자 한다. 실린더 접촉 프로파일 모델은 기어 이와 피니언 이의 접촉점에서 각각의 접촉 곡률 반경을 그 반지름으로 하는 두 개의 실린더 접촉으로 근사한 것이다. 틈새 형상 데이터로서 식 (4)의 상당 반경을 갖는 실린더가 평면에 접하고 있을 때 접촉점 주위의 간격(gap)이 해석에 이용된다.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{4}$$

한편, 인벌류터 치형의 곡률 반경은 접촉점 주위에서도 연속적으로 변화하므로 접촉점 주위에서 일정한 곡률 반경을 갖는 실린더 접촉 모델로써는 정밀한 기어 이 사이의 틈새 데이터를 얻을 수 없다. 수치적 프로파일 모델은 이러한 문제를 보완하기 위한 것으로서 기어 이의 회전을 고려하고 매 회전 단계에서 접촉점을 구하여 실제 기어 이의 형상을 추종하는 틈새를 수치적으로 구한 것이다[8]. 이 절차에 대한 간략한 설명은 다음과 같다. 식 (5)에 의하여 기어 이와 피니언 이에 대한 프로파일을 생성시키고 두 이의 최초 접촉점을 구하여 회전 시작 단계에서 두 이의 기준 자세를 결정한다.

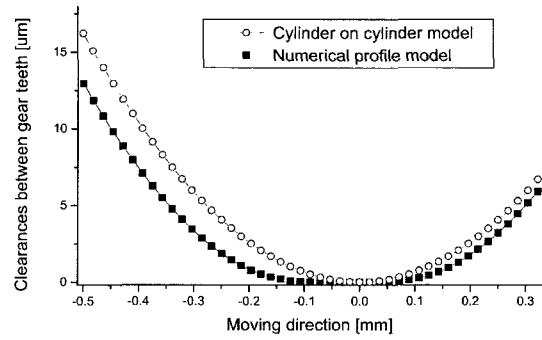


Fig. 3. Comparison of two profile models.

$$\begin{aligned} x_i &= R_{bi}(\theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_i) \\ y_i &= R_{bi}(\cos \theta_i + \theta_i \sin \theta_i) \end{aligned} \tag{5}$$

직교좌표계를 극좌표계로 변환하여 두 이를 각도 단계별로 회전시킨 다음, 회전한 상태에서 접촉점을 찾고, 접촉점 전후로 두 프로파일에서 각각 동일한 거리를 계산 영역으로 선정한다. 기어 이와 피니언 이의 격자점들이 서로 짝을 이루도록 접촉점을 기준으로 하여 프로파일을 따라서 등간격으로 격자점들을 재배열한다. 최종적으로 식 (6)에 의하여 두 프로파일에서 짝을 이루는 격자점 사이의 거리를 계산하여 각 회전 단계별 기하학적 틈새를 구한다.

$$h_g = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{6}$$

Fig. 3에 피치점에서 두 프로파일 모델에 대한 틈새 형상을 나타내었다.

3-3. 탄성유체 윤활해석

응력해석 입력 데이터인 접촉부의 표면에 작용하는 압력을 결정하기 위하여 탄성유체 윤활해석을 수행하였다. 3차원 탄성유체 윤활해석에 이용되는 지배방정식은 Reynolds에 의하여 식 (7)과 같이 주어진다[6]. 또한, 탄성유체 윤활영역에서는 압력이 높기 때문에 윤활제 점도와 밀도의 압력 의존성이 고려되어야 한다 [10-11].

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) = 12u \frac{\partial(\rho h)}{\partial \xi} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \tag{7}$$

식 (8)의 무차원화된 Reynold 방정식에 유한차분법과 Newton-Rapson법을 적용하여 외부 하중과 평형을 이루는 표면 압력을 구하였다. Fig. 4, Fig. 5에 상대적으로 낮은 외부하중과 높은 외부하중에 대한 두 프

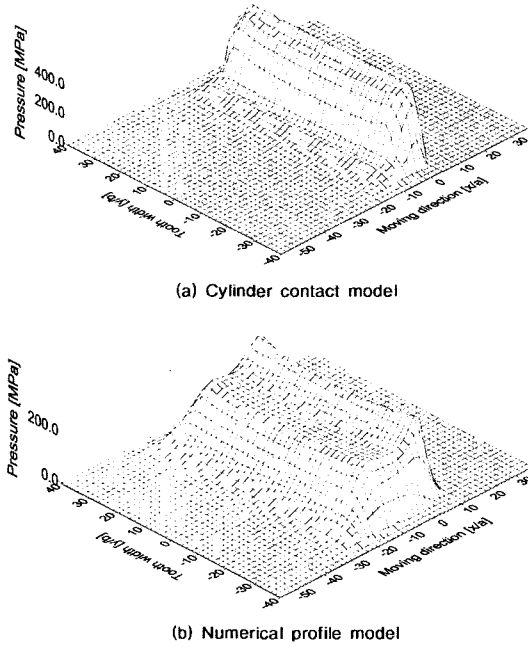


Fig. 4. Surface pressure at low load.

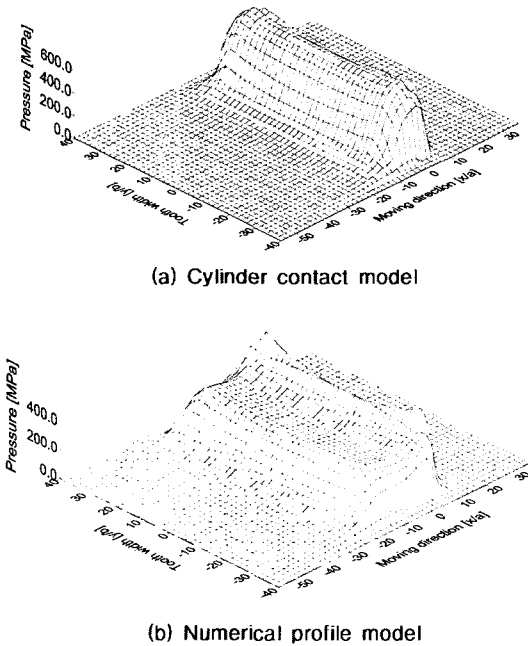


Fig. 5. Surface pressure at high load.

로파일 모델의 기어 치면에서의 탄성유체 윤활압력 분포를 각각 나타내었다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 12U \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial X} + 6V \frac{\partial (\bar{\rho} H)}{\partial T}$$

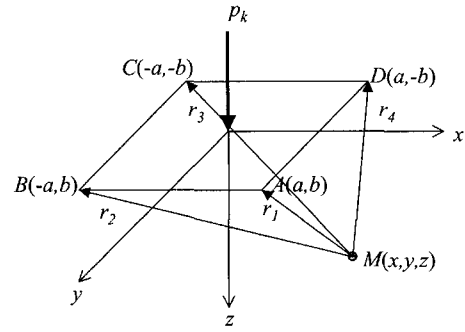


Fig. 6. Configuration of the rectangular patch.

$$X = \frac{\xi}{R}, Y = \frac{\zeta}{R}, H = \frac{h}{R}, \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, P = \frac{p}{E}, T = \frac{\omega t}{2\pi}$$

$$U = \frac{\eta_0 \dot{u}}{ER}, V = \frac{\omega_1 \eta_0}{\pi E} \quad (8)$$

3-4. 부표면 응력해석

균일 압력 p_k 가 작용하는, 크기가 $(2a \times 2b)$ 인 사각조각을 표면에 설정하고 Fig. 6에 보인바와 같이 좌표계의 원점이 사각조각의 중점과 일치하도록 두고 사각조각의 격자점 A, B, C, D와 재료 내부 부표면 위의 임의의 점, M까지의 거리를 식 (9)에 의하여 계산한다.

$$r_1 = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2 + z^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + z^2}$$

$$r_4 = \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2 + z^2} \quad (9)$$

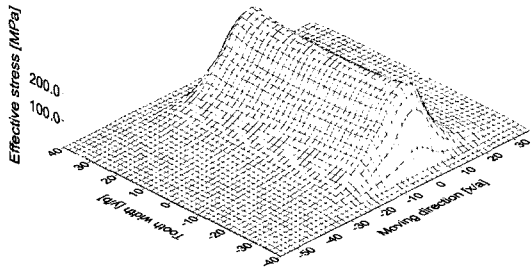
다음에는 식 (2)에 포함된 포텐셜 함수의 편미분 항들을 Love가 제시한 식을 이용하여 계산한다[9]. 부록에 편미분 항들의 계산식을 첨부하였다. 편미분 항의 값을 식 (2)에 적용하여 하나의 사각조각에 작용하는 압력에 의한 재료 내부의 임의의 점에서 응력성분을 계산한다. 다음에는 식 (1)에 의한 누적 합산에 의하여 전체의 표면 압력에 의한, 주어진 부표면에서의 응력성분을 계산하고 이 절차를 모든 부표면 영역에 적용하여 재료 내부의 응력장을 구한다.

4. 해석 결과 및 검토

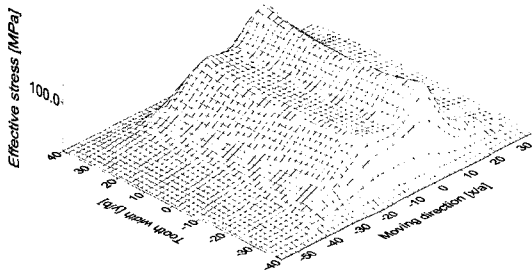
재료 내부의 응력 상태를 파악하기 위하여 식 (10)에 나타낸 von Mises의 유효응력을 사용하여 재료 내부의 응력 분포를 표현하였다[12].

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2}$$

$$J_2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] \quad (10)$$

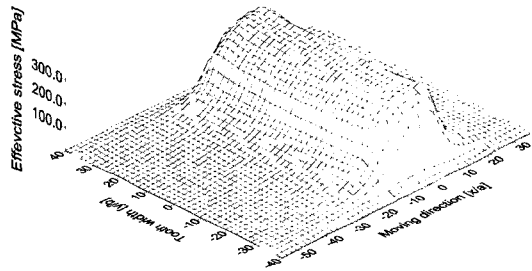


(a) Cylinder contact model

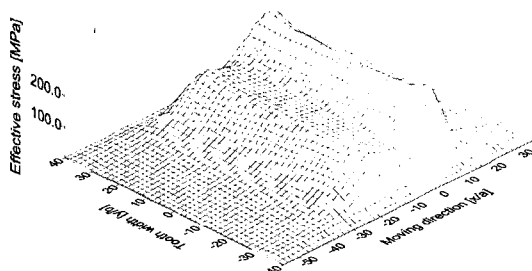


(b) Numerical profile model

Fig. 7. Effective sub-surface stress at low load.



(a) Cylinder contact model

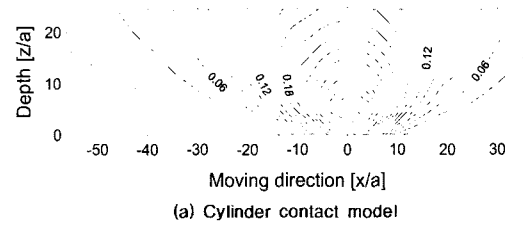


(b) Numerical profile model

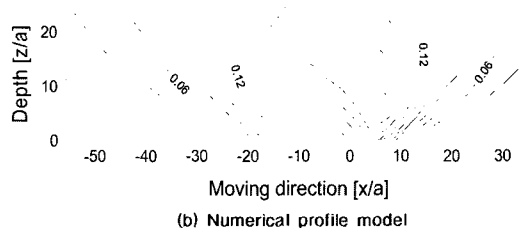
Fig. 8. Effective sub-surface stress at high load.

Fig. 7과 Fig. 8은 각각 낮은 하중과 높은 하중에 대하여 최대 유효응력이 발생하는 기어 치면 내부의 수평 단면에서 유효응력의 분포를 나타낸 것이다. 유효응력의 분포 형상은 표면에서의 압력 분포와 유사한 경향을 보이고 있다. 실린더 접촉 모델은 접촉 영역이 작으므로 유효응력의 분포 영역이 작으며 동일한 하중에 대해서 수치적 프로파일 모델에 비하여 유효응력의 최대치가 더 높게 나타나고 있다.

Fig. 9와 Fig. 10은 각각 낮은 하중과 높은 하중에 대하여 최대 유효응력이 발생하는 수직 단면에서 유효응력의 등고선을 나타내었다. 등고선의 값은 항복강도

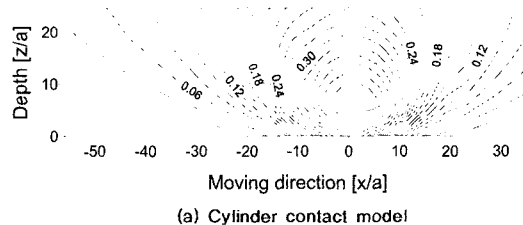


(a) Cylinder contact model

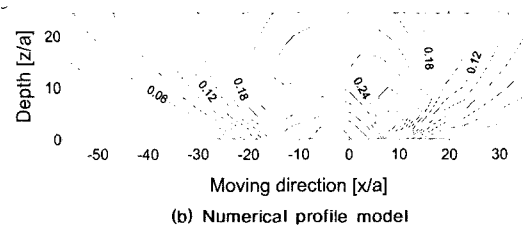


(b) Numerical profile model

Fig. 9. Contour of σ_e/S beneath the surface on x-z plane at low load.



(a) Cylinder contact model



(b) Numerical profile model

Fig. 10. Contour of σ_e/S beneath the surface on x-z plane at high load.

S로써 무차원화하여 표시되어 있다. 실린더 접촉 모델에서 최대 유효응력이 발생하는 위치는 구름/미끄럼 방향으로 낮은 하중과 높은 하중 모두 접촉 중심선에 근접하고 있다. 깊이 방향으로는 하중이 클 때 더 깊은 위치에서 최대 유효응력이 발생하고 있는데 이것은 Hertz의 이론과도 일치하는 것이다[3]. 수치적 프로파일 모델에서 최대 유효응력이 발생하는 위치는 구름/미끄럼 방향으로 출구 쪽으로 이동되어 있으며 하중이 클수록 편심량이 더 크다. 깊이 방향으로 최대 유효응력이 나타나는 위치는 하중의 크기에 따라 크게 변화하지 않으나 세밀하게 관찰하면 하중이 높을수록 표면에 더 접근하는 흥미로운 결과를 볼 수 있다. 이것은 수치적 프로파일 모델의 표면 압력의 분포 형상이 Fig. 4(b), Fig. 5(b)와 같이 두 개의 봉우리를 가지므로 두 봉우리에 의한 중첩 효과와 실린더 접촉 모델에 비하여 접촉 면적이 넓으므로 응력도 더 넓게 분산되기 때문인 것으로 판단된다.

Fig. 11은 낮은 하중에 대하여 최대 유효응력이 나타나는 수평단면에서 무차원화 유효응력의 등고선을 보여주고 있다. 수치적 프로파일에서 응력의 최대치는 0.189이지만 실린더 접촉 모델의 응력 최대치는 0.343으로서 수치적 모델에 비하여 1.8배 정도의 높은 값을 보이고 있다. Fig. 12의 높은 하중에 대한 수평단면에

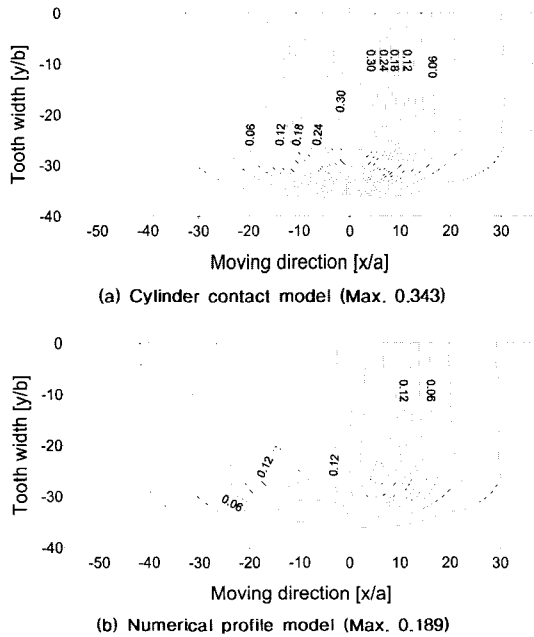


Fig. 11. Contour of σ/S beneath the surface on x-y plane at low load.

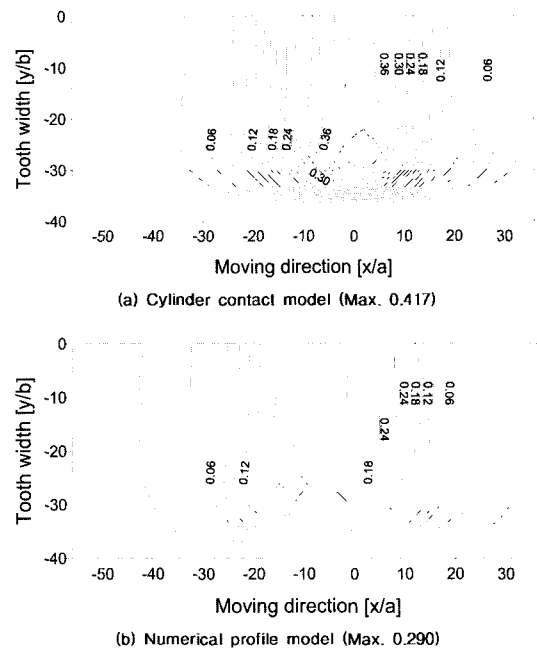


Fig. 12. Contour of σ/S beneath the surface on x-y plane at high load.

서도 실린더 접촉 모델의 응력이 수치적 프로파일 모델의 응력보다 약 1.5배 높게 나타나고 있다. 실린더 접촉 모델의 접촉 면적은 하중의 크기에 따라 비선형적으로 민감하게 변화하지만 수치적 프로파일 모델의 접촉 면적은 상대적으로 넓기 때문에 하중이 감소하더라도 접촉 면적의 감소율이 실린더 접촉 모델에 비하여 작으므로 낮은 하중에서 두 모델의 응력 차이가 크게 나타난다고 판단된다.

이상의 결과를 요약하면 Table 1과 같다.

5. 결 론

본 연구에서는 서로 접촉하고 있는 스퍼 기어의 치면에서 치면 프로파일 모델을 다르게 선택하였을 때 치면 내부에 발생하는 응력장의 변화를 조사하였다. 기존의 실린더 접촉 프로파일 모델과 새로운 수치적 프로파일 모델에 대하여 탄성유체 윤활 상태의 접촉 압력을 입력 데이터로 적용하여 재료 내부의 응력장을 해석적으로 구하였다.

실린더 접촉 모델의 응력 분포는 Hertz의 정확해와 분포 경향이 유사하였다. 실제의 기어 이 접촉에 가까운 수치적 프로파일 모델의 응력 분포는 접촉 영역이

Table 1. Comparison of the analysis results

Load [N]	Tooth profile model	Max. surface pressure [MPa]	Max. von Mises stress [MPa]	Position of max. stress		
				z/a	x/a	y/b
970 (low)	Cylinder	526	286	5.5	2	± 28
	Numerical	314	158	5.5	6	± 28
1540 (high)	Cylinder	632	349	7.5	2	± 28
	Numerical	538	242	4	10	± 28

넓기 때문에 응력의 최대치는 실린더 접촉 모델에 비하여 낮게 나타났으며 최대 응력의 발생 깊이는 기존의 경우와 역으로, 높은 하중일 때 더 작게 나타났다.

본 연구를 통하여 동일한 운전 조건에서도 틈새의 프로파일 형상에 따라 윤활 상태의 접촉 압력과 내부 응력장은 큰 차이가 있음을 알게 되었다. 구해진 내부 응력은 기계요소의 수명 예측, 치면 프로파일의 상세 치수, 표면 경화 깊이 등, 구체적인 설계 데이터를 결정하는 데 이용될 수 있으므로 정밀한 해석과 최적설계를 위해서는 합당한 프로파일 모델을 적용해야 한다.

기호 설명

a : Half size of a rectangular patch in moving (rolling & sliding) direction [m]
 b : Half size of a rectangular patch in tooth width direction [m]
 E : Modulus of elasticity [N/m^2]
 H : Dimensionless film thickness
 h : Film thickness [m]
 h_g : Geometrical clearance between gear tooth and pinion tooth [m]
 n : Number of rectangular patches on tooth surface
 P : Dimensionless pressure
 p : Pressure [N/m^2]
 p_k : Normal surface pressure on the contact surface [N/m^2]
 R : Equivalent radius [m]
 R_i : Radius of curvature of gear/pinion tooth [m] ($i=1$ for gear, $i=2$ for pinion)
 S : Yield strength of the gear material [N/m^2]
 $s_{ij,k}$: Stress component on a sub-surface due to the surface pressure [N/m^2]

T : Dimensionless time
 t : Time [s]
 \bar{u} : Mean surface velocity [m/s]
 X, Y : Dimensionless cartesian coordinates
 x_i, y_i : Local cartesian coordinates for gear/pinion ($i=1$ for gear, $i=2$ for pinion)
 x : Coordinate on the sub-surface in moving direction
 y : Coordinate on the sub-surface in tooth width direction
 z : Coordinate on the sub-surface in depth direction
 Γ : Boussinesq's 3-dimensional logarithmic potential
 Λ : Newtonian potential of a surface distribution
 ν : Poisson's ratio
 ξ, ζ : Coordinates on the contact surface
 η : Viscosity [Ns/m^2]
 η_0 : Viscosity at $p=0$ [Ns/m^2]
 $\bar{\eta}$: Dimensionless absolute viscosity
 θ_i : Rotation angle of the gear/ pinion [rad]
 ρ : Density [Ns^2/m^4]
 ρ_0 : Density at $p=0$ [Ns^2/m^4]
 $\bar{\rho}$: Dimensionless density
 σ_e : von Mises' effective stress [N/m^2]
 σ_{ij} : Sub-surface stress [N/m^2]
 ω_1 : Angular velocity of the gear [rad/s]

감사의 글

“이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 일부 지원되었음.”

“This work was partially supported by the Brain Korea 21 Project in 2003.”

참고 문헌

1. Rao, S. S. and Tjandra, Muljadi, "Reliability-based design of automotive transmission systems," Reliability Engineering & System Safety, Vol. 46, pp. 159-169, 1994.
2. Yang, Q. J., "Fatigue test and reliability design of gears," International Journal of Fatigue, Vol. 18, pp. 171-177, 1996.
3. Johnson, K. L., "Contact mechanics," pp. 11-26, 1985.
4. Fuchs, H. O. and Stephens, R. I., "Metal fatigue in engineering," J. Wiley & Sons, pp. 66-75.
5. Hertz, H, Miscellaneous Papers on the contact of elastic solids, Translation by D. E. Jones, McMillan, London, 1986.
6. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, pp.141-165, 1994.
7. Larsson, R., "Transient non-Newtonian elastohydrodynamic lubrication analysis of an involute spur gear," Wear, 207, pp.67-73, 1997.
8. 구영필, 김형자, 김영대, "스퍼 기어 치면 사이의 탄성유체 윤활해석," 윤활학회지, 제19권, 제2호, pp. 65-71, 2003.
9. Love, A. E. H., "Stress Produced in a Semi- Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary," Phil. Trans. Royal Society, A228, pp. 377-420, 1929.
10. Dowson, D. and Higginson, G. R., "Elastohydrodynamic lubrication, the Fundamentals of Roller and Gear Lubrication," Pergamon, Oxford, 1966.
11. Roelands, C. J. A, Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils, Doctoral thesis, Technische Hogeschool te Delt, Netherlands, 1966.
12. A. P. Boresi, "Advanced Mechanics of Materials".

부 록

아래의 식들은 본문 식 (2)의 응력식들 중에서 편미분 항들을 나타낸 것임.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} &= p_k \left[\tan^{-1} \frac{b-y}{a-x} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a-x} - \tan^{-1} \frac{z(b-y)}{(a-x)r_1} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(b+y)}{(a-x)r_4} + \tan^{-1} \frac{b-y}{a+x} + \tan^{-1} \frac{b+y}{a+x} - \tan^{-1} \frac{z(b-y)}{(a+x)r_2} \right. \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(b+y)}{(a+x)r_3} \right] \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} &= p_k \left[\tan^{-1} \frac{a-x}{b-y} + \tan^{-1} \frac{a+x}{b-y} - \tan^{-1} \frac{z(a-x)}{(b-y)r_1} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - \tan^{-1} \frac{z(a+x)}{(b-y)r_2} + \tan^{-1} \frac{a-x}{b+y} + \tan^{-1} \frac{a+x}{b+y} - \tan^{-1} \frac{z(a-x)}{(b+y)r_4} \\ &\quad \left. - \tan^{-1} \frac{z(a+x)}{(b+y)r_3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial t} &= p_k \log \frac{(z+r_1)(z+r_3)}{(z+r_2)(z+r_4)} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} &= -p_k \left[2\pi - \cos^{-1} \frac{(a-x)(b-y)}{\sqrt{(a-x)^2+z^2}\sqrt{(b-y)^2+z^2}} \right. \\ &\quad \left. - \cos^{-1} \frac{(a-x)(b+y)}{\sqrt{(a-x)^2+z^2}\sqrt{(b+y)^2+z^2}} \right. \\ &\quad \left. - \cos^{-1} \frac{(a+x)(b-y)}{\sqrt{(a+x)^2+z^2}\sqrt{(b-y)^2+z^2}} \right. \\ &\quad \left. - \cos^{-1} \frac{(a+x)(b+y)}{\sqrt{(a+x)^2+z^2}\sqrt{(b+y)^2+z^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} &= -p_k \left[\frac{a-x}{(a-x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_1} + \frac{b+y}{r_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a+x}{(a+x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_2} + \frac{b+y}{r_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} &= -p_k \left[\frac{b-y}{(b-y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_1} + \frac{a+x}{r_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b+y}{(b+y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_4} + \frac{a+x}{r_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} &= p_k \left[\frac{a-x}{(a-x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_1} + \frac{b+y}{r_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a+x}{(a+x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_2} + \frac{b+y}{r_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b-y}{(b-y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_1} + \frac{a+x}{r_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b+y}{(b+y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_4} + \frac{a+x}{r_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} = p_k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial z} &= p_k \left[\frac{z}{(a-x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_1} + \frac{b+y}{r_4} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{(a+x)^2+z^2} \left(\frac{b-y}{r_2} + \frac{b+y}{r_3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial z} &= p_k \left[\frac{z}{(b-y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_1} + \frac{a+x}{r_2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{z}{(b+y)^2+z^2} \left(\frac{a-x}{r_4} + \frac{a+x}{r_3} \right) \right] \end{aligned}$$