퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2003, Vol. 13, No. 2, pp. 175-179

주파수 영역에서 반복 학습 제어의 수렴 조건

Convergence Conditions of Iterative Learning Control in the Frequency Domain

도태용* · 문정호**
Tae-Yong Doh* and Jung Ho Moon**

* 한밭대학교 전기전자제어공학부 제어계측공학과
** 강릉대학교 공과대학 정보전자공학부 제어계측공학전공

요 약

반복 학습 제어에서 수렴 조건은 수렴 속도와 잔존 오차와 같은 성능을 결정한다. 따라서, 덜 신중한 수렴 조건을 구할 수 있다면, 그 성능은 향상될 것이고 사용 적합한 학습 제어기의 수는 증가된다. 주파수 영역에서, 연속적인 오차들간의 전달함수의 H_∞ 놈(norm)을 학습 시스템의 수렴성을 조사하기 위해 사용해왔다. 그러나, H_∞ 놈을 바탕으로 한 수렴 조건이 단조 수렴성에 대하여 명확한 특성을 가진다하더라도, 특히, 다중 입출력 시스템에서 몇 가지 단점을 가진다. 본 논문에서는 수렴 조건과 수렴의 단조성간의 관계를 밝힌다. 또한 주파수 영역에서 기존의 수렴 조건을 대신할 수 있는 수정된 수렴 조건을 주파수 영역 리아프노프(Lyapunov) 방정식을 이용하여 구한다.

Abstract

Convergence condition determines performance of iterative learning control (ILC), for example, convergence speed, remaining error, etc. Hence, the performance can be elevated and a feasible set of learning controllers grows if a less conservative condition is obtained. In the frequency domain, the H_∞ norm of the transfer function between consecutive errors has been currently used to test convergence of a learning system. However, even if the convergence condition based on the H_∞ norm has a clear property about monotonic convergence, it has a few drawbacks, especially in MIMO plants. In this paper, the relation between the condition and the monotonicity of convergence is clarified and a modified convergence condition is found out using a frequency domain Lyapunov equation, which supersedes the conventional one in the frequency domain.

Key Words : 반복 학습 제어(iterative learning control), 수렴성(convergence), 신중성(conservativeness), 단조성(monotonicity), 주파수 영역 리아프노프 방정식(frequency domain Lyapunov equation)

1. 서 론

궤환 제어의 안정도처럼 수렴성은 반복 학습 제어(iterative learning control)에서 핵심적인 문제이다. Arimoto 등 [1]이 λ-놈(norm)을 기반으로 한 수렴 조건을 제시한 이래, 시간 영역에서 반복 학습 제어의 구조를 개선하고 반복 학습 제어의 특성을 파악하기 위한 수많은 연구가 수행되어 왔다. 한편, 주파수 영역에서는 연속적인 오차간의 전달 함수의 H_∞ 놈을 수렴 조건으로 사용해 왔다. 다시 설명하면, H_∞ 놈이 1보다 작으면, 오차는 0 또는 유한한 값으로 수렴한다. 이 조건은 지금까지 반복 학습 제어의 수렴을 위한 충분 조건으로 존재해왔다. 비록 Goh [2]가 어떤 면에서는 이 조건이 필요 충분하다는 것을 밝히기 위한 시도를 했지만, 위에서 언급한 이 조건이 L_2 수렴을 위한 충분 조건이라는 자명한 결과만을 얻었다. 본 논문에서는 H_∞ 놈을 이용한 수렴 조건이 L_2 수렴을 위한 충분 조건이고 단조 L_2 수렴을 위한 필요 충분 조건이라는 것을 보인다.

Owens와 Rogers [3]는 주파수 영역에서의 Lyapunov 방정식을 이용한 수렴 조건을 제시하였다. 그들의 수렴 조건은 단조성을 포기하는 대신 덜 신중하다. 그러나, 성능 한계를 계산하는데 있어서 까다로운 제한과 복잡성 때문에, 실제 상황에 그것을 적용하는데 다소 어려움이 있다. 이런 단점을 극복하기 위해서, 선형 행렬 부등식(linear matrix inequality, LMI)을 이용한 L_2 수렴을 위한 간단한 조건을 구한다. 일반적인 고유치 문제(generalized eigenvalue problem, GEVP)를 풀어냄으로써, 반복 제어 시스템이 제안된 수렴 조건을 만족하는지를 결정한다.

반복 제어 시스템은 시행 오차들의 회귀적인 형태를 가진 알고리즘으로 표현된다. 이를 반복 학습 제어 프로세스를 위한 다음과 같은 반복 모델로 주파수 영역에서 표현할 수 있다 [3], [4].

$$E_{k+1}(s) = L(s)E_k(s) + D_{k+1}(s), \;\; k \in \mathbf{Z}_+ \qquad (1)$$

여기서, $L(s)$는 오차 전달 함수로 $n \times n$ 다항식 행렬이다. 그리고, $D_{k+1}(s)$와 $E_{k+1}(s)$는 $k+1$번째 반복 학습 제어를 수행할 때, 외란과 오차를 각각 모델링한 것으로 n-차 다

접수일자 : 2002년 7월 3일
완료일자 : 2003년 1월 27일

항식 벡터이다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 Moore 등 [5]과 Goh [2]에 의해 제안된 조건들이 단조 L_2 수렴을 위한 필요 충분 조건임을 보인다. 3장에서는 단조 L_2 수렴인지 보장할 수 없으나, 앞의 것들보다 덜 신중한 수렴 조건을 제시한다. 4장에서 결론과 함께 본 논문을 마무리한다.

2. 단조 수렴

식 (1)과 같은 반복 학습 제어 프로세스의 L_2 수렴을 충분 조건은

$$\|L(s)\|_\infty < 1 \tag{2}$$

로 잘 알려져 있다. 이 장에서는 이 조건이 오차를 단조적으로 0이나 어떤 유한 값으로 수렴시킴을 보인다.

가정 1. $L(s) \in H_\infty$은 실수의 계수를 가지고, 극점-영점 소거 항이 없다.

가정 2. $E_0(s) \in H_2$은 실수의 계수를 가진다.

정리 1. γ가 $0 < \gamma < 1$에 존재하는 상수라 하자. 가정 1과 2하에서, 모든 $k \in \mathbf{Z}_+$에 대해서 $D_{k+1}(s)=0$을 가진 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스가 단조 L_2 수렴할 필요 충분 조건은 다음과 같다.

$$\|L(s)\|_\infty = \gamma < 1 \tag{3}$$

증명) (충분 조건) 입출력 관계의 표준적인 결과 [6], [7]를 적용하면,

$$\begin{aligned}\|E_{k+1}(s)\|_2 &= \|L(s)E_k(s)\|_2 \\ &\le \|L(s)\|_\infty \|E_k(s)\|_2\end{aligned}$$

의 관계를 가진다. 식 (3)으로 인해,

$$\|E_{k+1}(s)\|_2 \le \gamma\|E_k(s)\|_2 \le \gamma^2\|E_{k-1}(s)\|_2 \le \cdots \le \gamma^{k+1}\|E_0(s)\|_2$$

의 결과를 얻을 수 있다. $k \to \infty$로 됨에 따라, $\|L(s)\|_\infty^k = \gamma^k \to 0$이 된다. 따라서, $\|E_{k+1}(s)\|_2$는 수렴율 γ을 가지고, 0으로 단조 수렴한다.

(필요 조건) 모순을 이용하여 필요 조건을 증명하자. ω_0를 $\|L(s)\|_\infty = \bar{\sigma}[L(j\omega_0)] \ge 1$일 때의 각주파수라고 하자. $L(j\omega_0)$의 특이값 분해를

$$\begin{aligned}L(j\omega_0) &= \bar{\sigma}[L(j\omega_0)]u_1(j\omega_0)v_i^*(j\omega_0) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{r}\sigma_i[L(j\omega_0)]u_i(j\omega_0)v_i^*(j\omega_0)\end{aligned}$$

로 다시 쓸 수 있다. 여기서, r은 $L(j\omega_0)$의 랭크(rank)이고, u_i와 v_i는 단위 길이를 가진다. 또한, $\sigma[\cdot]$와 $\bar{\sigma}[\cdot]$는 각각 구조적인 특이값(structured singular value)과 그것의 최대값이다 [7].

$v_1(j\omega_0)$을 $v_1(j\omega_0)=[\alpha_1 e^{j\theta_1}\ \alpha_2 e^{j\theta_2}\ \cdots\ \alpha_n e^{j\theta_n}]^T$와 같이 쓸 수 있다고 하자. 여기서, $\alpha_i \in \mathbf{R}$이고, $\theta_i \in (-\pi, 0]$이다. β_i가 θ와

$$\theta_i = \angle\left(\frac{\beta_i - j\omega_0}{\beta_i + j\omega_0}\right)$$

의 관계를 가지고, $E_0(s)$가

$$E_0(s) = \left[\alpha_1\frac{\beta_1 - s}{\beta_1 + s}\ \alpha_2\frac{\beta_2 - s}{\beta_2 + s}\ \cdots\ \alpha_n\frac{\beta_n - s}{\beta_n + s}\right]^T \hat{E}_0(s)$$

와 같이 주어진다. 여기서, 스칼라(scalar) 함수 $\hat{E}_0(s)$을

$$|\hat{E}_0(j\omega)| = \begin{cases} c & \text{if } |\omega - \omega_0| < \varepsilon \text{ or } |\omega + \omega_0| < \varepsilon \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

으로 선택한다. 여기서, $0 < \varepsilon \ll 1$이고, $c = c_0\sqrt{\pi/2\varepsilon}$이다. 그러면,

$$\|E_0(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Trace}\,[E_0^*(j\omega)E_0(j\omega)]d\omega = c_0^2$$

가 되고, $\|E_1(s)\|_2$의 경우에는 $\|L(s)\|_\infty$가 1보다 크기 때문에,

$$\begin{aligned}\|E_1(s)\|_2^2 &= \|L(s)E_0(s)\|_2^2 \\ &= \frac{c_0^2}{2\pi}\{\bar{\sigma}[L(-j\omega_0)]^2\pi + \bar{\sigma}[L(j\omega_0)]^2\pi\} \\ &= \|L(s)\|_\infty^2 \cdot c_0^2 \ge c_0^2 = \|E_0(s)\|_2^2\end{aligned}$$

와 같은 결과를 얻게 된다. 유사하게, 모든 $k \in \mathbf{Z}_+$에 대해서, $\|E_{k+1}(s)\|_2 \ge \|E_k(s)\|_2$을 보일 수 있다. 따라서, $\|L(s)\|_\infty$가 1보다 크면, k가 증가함에 따라, 오차는 발산한다. ■

참조 1. 정리 1은 최악의 경우 수렴율 γ로 오차가 수렴한다는 것을 의미한다. 따라서, 식 (3)을 만족하는 반복 학습 제어 프로세스는 모든 주파수 영역에서 γ와 같거나 작은 수렴율을 가진다. □

보조 정리 1. γ가 $0 < \gamma < 1$에 존재하는 상수라 하자. 가정 1과 2하에서, 모든 $k \in \mathbf{Z}_+$에 대해서 $D_{k+1}(s) \ne 0$을 가진 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스가 잔존 오차를 가지고 단조 L_2 수렴할 필요 충분 조건은 아래와 같다.

$$\|L(s)\|_\infty = \gamma < 1$$

증명) 정리 1과 유사함으로 생략한다. ■

반복 학습 제어에서 수렴의 단조성은 오차의 증가 없이 오차가 0 또는 어떤 유한한 값으로 수렴한다는 것을 보장한다. 그러나, 이것은 굉장히 신중한 결과로, 학습 제어기를 구하는 것을 어렵게 만들고, 반복 제어 알고리즘을 실제 플랜트에 적용하는데, 장애물이 된다.

3. 주파수 영역 리아프노프 방정식을 이용한 수렴 조건

이 장에서는 단조 수렴성을 보장하지는 않지만, 식 (2)으로 표현되는 일반적인 수렴 조건보다 덜 신중한 수렴 조건을 주파수 영역의 리아프노프(Lyapunov) 방정식을 이용하여 구한다.

Owens와 Rogers [3], [4]는 수학의 균일 수렴성(uniform convergence)을 이용하여, 반복 학습 제어 프로세스의 수렴

성을 다음과 같이 정의하였다.

정의 1. [3], [4] 만약 $\|L^k\| \le M\lambda^k$를 만족하는 양의 상수 $M < \infty$와 $\lambda \in (0,1)$가 존재한다면, 반복 학습 제어 프로세스

$$e_{k+1} = Le_k + b_{k+1}, \quad k \in \mathbf{Z}_+ \tag{4}$$

는 수렴한다. 여기서, L은 연속적인 오차간의 관계를 정의하는 선형 연산자이다. 주파수 영역에서는 $L(s)$와 같은 오차 전달 함수로 표현된다.

정의 1에 의하면, 정리 1과 같은 단조 수렴성을 만족하는 수렴 조건의 경우는 $M=1$이다. $M > 1$인 경우는 더 이상 오차의 단조 수렴성은 보장되지 않는다. 즉, 초기 반복 시행시에는 오차가 증가하다가 반복 학습의 횟수가 증가함에 따라 오차가 0이나 어떤 유한한 값으로 수렴하게 된다.

정리 2. [3], [4] 가정 1과 2하에서, 식 (1)과 같은 반복 학습 제어 프로세스는

$$L^T(-s)P(s)L(s) - P(s) = -I_n \tag{5}$$

의 리아프노프 방정식을 만족하는 유리 다항 행렬 $P(s)$ 존재하면, 수렴한다. 여기서, $P(s)$는 1보다 크거나 같은 실수 β_1과 β_2에 대해서, 다음 두 가지 특징을 만족해야 한다.

$$P(s) = P^T(-s) \tag{6}$$

$$\beta_1^2 I_n \le P(j\omega) = P^T(-j\omega) \le \beta_2^2 I_n, \quad \forall\omega \ge 0 \tag{7}$$

식 (5)는 리아프노프 함수 $V_k(j\omega)$를

$$V_k(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_k^T(-j\omega)P(j\omega)E_k(j\omega)d\omega \tag{8}$$

와 같이 취함으로써 얻을 수 있다. $E_k(j\omega)$가 식 (1)의 해라면, 고정된 $P(j\omega)$에 대해서 k가 증가함에 따라, $V_k(j\omega)$의 증감이 중요하다.

$$\begin{aligned} &V_{k+1}(j\omega) - V_k(j\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_k^T(-j\omega)[L^T(-j\omega)P(j\omega)L(j\omega) \\ &- P(j\omega)]E_k(j\omega)d\omega \end{aligned}$$

위 식이 0과 같거나, 0보다 작기 위해서, 정리 2에서는 $L^T(-s)P(s)L(s) - P(s)$를 $-I_n$을 정했다.

$P(s)$의 특성을 활용하면, $P(s)$를

$$P(s) = R^T(-s)R(s) \tag{9}$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서, $R(s)$는 안정하고 최소 위상이며, 안정하고 최소 위상의 역을 가진다.

필터링된 오차를

$$\hat{E}_k(s) = R(s)E_k(s), \quad k \in \mathbf{Z}_+ \tag{10}$$

와 같이 정의하자. 이 신호와 정리 2를 사용하면, 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스의 성능을 예측할 수 있다. 식 (9)과 식 (10) 때문에, $V_{k+1}(j\omega) = \|\hat{E}_{k+1}(j\omega)\|_2^2$가 성립한다. 식 (5)에 의해,

$$\|\hat{E}_{k+1}\|_2^2 = \|\hat{E}_k\|_2^2 - \|E_k\|_2^2$$

를 얻을 수 있고, 식 (7)로부터, 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\beta_1^2\|E_k\|_2^2 \le \|\hat{E}_k\|_2^2 \le \beta_2^2\|E_k\|_2^2$$

따라서, $\|\hat{E}_{k+1}\|_2^2 \le (1-\beta_2^{-2})\|\hat{E}_k\|_2^2$가 된다. 즉, 필터링된 오차 $\hat{E}_k(s)$는 0으로 단조 감소하고 다음의 부등식을 만족한다.

$$\|\hat{E}_k\|_2 \le \lambda^k\|\hat{E}_0\|_2, \quad k \in \mathbf{Z}_+ \tag{10}$$

여기서, $\lambda := (1-\beta_2^{-2})^{1/2} < 1$. 식 (7)과 식 (10)으로부터,

$$\beta_1\|E_k\|_2 \le \lambda^k\|\hat{E}_0\|_2 \le \beta_2\lambda^k\|E_0\|_2$$

와 같은 부등식을 얻는다. 결국, 실제 오차 $E_k(s)$는

$$\|E_k\|_2 \le M\lambda^k\|E_0\|_2$$

와 같이 한정된다. 여기서, $M := \beta_2\beta_1^{-1} \ge 1$.

참조 2. 필터링된 오차 $\hat{E}_k(s)$가 수렴율 λ를 가지고 0으로 단조 수렴하는 반면, 실제 오차 $E_k(s)$는 같은 수렴율로 수렴하나 더 이상 단조 수렴하지는 않는다. 이는 매개변수 M으로 표현된다. □

정리 2는 실제 상황의 학습 시스템의 수렴성을 검사할 때, 몇 가지 단점을 가지고 있다. β_1과 β_2가 1보다 작을 가능성이다. $P(s)$의 하한 β_1의 경우, 그럴 가능성이 더욱 크다. 더욱이, 식 (5)를 만족하는 $P(s)$를 찾는 것이 쉽지 않다. 이러한 단점을 해결하기 위한 새로운 방법을 모색하여야 한다.

$V_{k+1}(j\omega) - V_k(j\omega)$를 음으로 만들어주는 $P(s)$의 존재에 의해서, 학습 시스템의 수렴이 결정된다는 사실에 유의하자. 따라서, 식 (5)대신에

$$L^T(-s)P(s)L(s) - P(s) < 0$$

의 부등식을 풀어낼 경우, 식 (5)의 해를 포함한 보다 더 큰 해집합을 구할 수 있다.

정리 3. 가정 1과 2하에서,

$$\|R(s)L(s)R(s)^{-1}\|_\infty < 1 \tag{11}$$

를 만족하는 안정하고 최소 위상 $R(s)$가 존재하면, 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스가 L_2 수렴한다. 이 때, $R(s)$는 양의 실수 η_1과 η_2에 대해서, 다음과 같은 특성을 가진다.

$$\eta_1^2 I_n \le P(j\omega) := R^T(-j\omega)R(j\omega) \le \eta_2^2 I_n, \quad \forall\omega \ge 0 \tag{12}$$

증명) $V_{k+1}(j\omega) - V_k(j\omega)$는 식 (8)과 같다. k가 증가함에 따라, $V_k(j\omega)$를 감소시키기 위해서,

$$L^T(-s)P(s)L(s) - P(s) \le -\nu^2 I_n < 0 \tag{13}$$

이 성립되어야 한다. 여기서, ν는 양의 실수이다. 앞서 설명한 것처럼, $P(s) = R^T(-s)R(s)$이므로,

$$L^T(-j\omega)R^T(-j\omega)R(j\omega)L(j\omega) - R^T(-j\omega)R(j\omega) < 0, \ \forall\omega$$

이다. 양변에 $R^T(-j\omega)$와 $R(j\omega)$의 역수를 각각 곱하면, 다음 부등식을 얻는다.

$$[R(-j\omega)L(-j\omega)R^{-1}(-j\omega)]^T \cdot$$
$$[R(j\omega)L(j\omega)R^{-1}(j\omega)] < I_n, \ \forall\omega$$

위의 부등식으로부터, 식 (11)을 구한다.

결론적으로, 안정한 $L(s)$을 가지는 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스가 식 (11)을 만족하면, k가 증가함에 따라 $V_k(j\omega)$가 감소한다. 결국, $E_k(s)$가 0으로 수렴한다. ■

정리 3의 수렴율 λ와 단조성과의 벗어나는 정도인 M은 정리 2에서 얻은 것들과 다소 다르다. 식 (13)으로부터,

$$\| \hat{E}_{k+1}\|_2^2 - \| \hat{E}_k\|_2^2 \le -\nu^2\|E_k\|_2^2$$

가 유도된다. 식 (12)의 특성에 의해,

$$\begin{aligned}\| \hat{E}_{k+1}\|_2^2 &\le \| \hat{E}_k\|_2^2 - \nu^2/\eta_2^2\| \hat{E}_k\|_2^2 \\ &= (1-\nu^2/\eta_2^2)\| \hat{E}_k\|_2^2\end{aligned}$$

의 관계를 가진다. 식 (12)와 (13)에 의해, $\eta_2^2\| \hat{E}_k\|_2^2 \ge \nu^2\| \hat{E}_k\|_2^2$의 관계가 성립된다. 이 부등식에서 등호는 $\hat{E}_k(s)=0$일 때 성립된다. 따라서, $1-\nu^2/\eta_2^2$는 양수이면서 1보다 작다. 결국, 필터링된 오차 $\hat{E}_k(s)$는 다음 부등식을 만족한다.

$$\| \hat{E}_k\|_2 \le \lambda^k\| \hat{E}_0\|_2, \ k \in \mathbf{Z}_+.$$

여기서, $\lambda=(1-\nu^2/\eta_2^2)^{1/2} < 1$이다. 실제 오차 $E_k(s)$는 다음 부등식을 만족하면서 수렴한다.

$$\|E_k\|_2 \le M\lambda^k\|E_0\|_2$$

여기서, $M := \eta_2\eta_1^{-1} \ge 1$이다.

정리 2의 β_1과 β_2와 달리, 정리 3에서는 η_1과 η_2가 더 이상 1보다 클 필요가 없다.

참조 3. 단일 입출력 시스템에서, 어떤 $R(s)$에 대해서도, 식 (11)은 $\|L(s)\|_\infty < 1$과 같다. 따라서, $M=1$이고, 실제 오차는 단조 L_2 수렴한다. 결론적으로, 정리 3의 조건은 단일 입출력 시스템의 경우, 단조 L_2 수렴 조건이다. □

참조 4. 스케일링(scaling)에 의한 놈의 최소 문제를 풂으로써, $\|RLR^{-1}\|_\infty$가 1보다 작은 지 아닌 지를 확인할 수 있다. $L(s)$의 최적 대각화된 스케일링된 놈은

$$\Xi(L) := \inf\left\{ \begin{array}{l}\gamma \mid \|RLR^{-1}\|_\infty < \gamma \text{ for diagonal,} \\ \text{stable, and minimum phase } R(s)\end{array}\right\}$$

로 정의된다. $\Xi(L)$은 일반화된 고유치 문제(generalized eigenvalue problem, GEVP) [8], [9]의 풂으로써 계산할 수 있다. $\Xi(L)$은 다음과 같은 GEVP의 최적값이다.

$$\begin{aligned}&\text{minimize } \gamma \\ &s.t. \ P(j\omega) > 0 \text{ and diagonal,} \\ &\quad L^T(-j\omega)P(j\omega)L(j\omega) < \gamma^2P(j\omega), \ \forall\omega\end{aligned} \tag{14}$$

더 상세한 것은 [8]을 참조하기 바란다. □

다음 예제는 정리 2와 3을 사용하여 학습 시스템의 수렴성을 확인하는 방법을 설명한다.

예제 1. 다음의 식들을 가지는 식 (1)의 반복 학습 제어 프로세스가 있다고 하자.

$$L(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}0 & 0.5\\1 & 0\end{bmatrix}, \ D_{k+1}(s)=[0 \ 0]^T$$

$L(s)$의 H_∞ 놈이 1이기 때문에, 단조 L_2 수렴성은 더 이상 보장되지 않는다. 그럼에도 불구하고, 이 예제에서, 정리 3을 이용하여 비록 단조 수렴은 아니지만, 이 반복 학습 제어 프로세스가 수렴한다는 것을 보인다. 간단하게 종이와 연필만으로 M과 λ를 구해보자.

(풀이)

$R(s)$를 상수의 양한정 행렬

$$R=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0.4 & 0.5\end{bmatrix}$$

로 선정하면, $\gamma := \|RL(s)R^{-1}\|_\infty$는 0.80으로 1보다 작다. 따라서,

$$\eta_1^2I_2 \le P := R^TR = \begin{bmatrix}0.41 & 0.2\\0.2 & 0.25\end{bmatrix} \le \eta_2^2I_2$$

이다. 여기서, η_1은 0.33이고, η_2는 0.74이다. $\|RLR^{-1}\|_\infty = \gamma$로부터,

$$\begin{aligned}L^T(-j\omega)PL(j\omega) &= \gamma^2P \\ &= P-(1-\gamma^2)P, \ \forall\omega\end{aligned}$$

이고

$$L^T(-j\omega)PL(j\omega)-P=-(1-\gamma^2)P \le -\nu^2I_2 \tag{15}$$

이다. 여기서, ν를 0.198로 한다. 위의 결과에 의해 구해진 λ와 M은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lambda &:= (1-\nu^2/\eta_2^2)^{1/2}=0.963 \\ M &:= \eta_2/\eta_1=2.242\end{aligned}$$

따라서, 위의 반복 학습 제어 프로세스는 L_2 수렴한다. □

예제 2. 예제 1의 반복 학습 제어 프로세서를 참조 4에서 언급한 GEVP로 풀어 M과 λ를 구해보자.

(풀이)

MATLAB의 LMI Toolbox [9]를 이용하여, GEVP를 풀면,

$$\|R(s)L(s)R^{-1}(s)\|_\infty < \gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고, 이 때 $R(s)$는

$$R=\begin{bmatrix}0.357\times10^{-4} & 0\\0 & 0.1753\times10^{-4}\end{bmatrix}$$

이다. 따라서,

$$\eta_1^2I_2 \le P = \begin{bmatrix}0.123\times10^{-8} & 0\\0 & 0.0307\times10^{-8}\end{bmatrix} \le \eta_2^2I_2$$

이다. 여기서, η_1은 1.752×10-5이고, η_2는 3.507×10-5이다. 식 (15)를 이용하여 ν를 구하면, 1.2398×10-5이다. 이 결과에 의해 구해진 λ와 M은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\lambda &:= (1-\nu^2/\eta_2^2)^{1/2}=0.935 \\ M &:= \eta_2/\eta_1=2.002\end{aligned}$$

따라서, 위의 반복 학습 제어 프로세스는 L_2 수렴한다. 또한,

GEVP를 풂으로써 얻은 결과이기 때문에, λ와 M 값이 예제 1에서 구한 값들보다 작다. □

정리 3의 수렴 조건은 예제 1과 2에서 보여진 것처럼, 몇 가지 장점을 가진다. 무엇보다도 먼저, $P(s)$가 단지 부등식 (13)을 만족하면 충분하기 때문에, $P(s)$의 차수가 $L^T(-s)L(s)$의 차수보다 작거나 같다. 두 번째, 예제 1에서는 비록 $P(s)$가 최적은 아닐지라도, 예제 2에서는 γ를 최소화하는 최적의 $P(s)$를 참조 4에서 언급한 GEVP를 해결함으로써 얻을 수 있고, λ를 가능한 한 작게 만들 수 있다.

4. 결론

반복 학습 제어 프로세스에서 연속적인 오차간의 전달 함수의 H_∞ 놈이 수렴 조건으로 사용되어져 왔다. 본 논문에서는 이 조건이 단조 L_2 수렴을 위한 필요 충분 조건임을 보였다.

덜 신중한 수렴 조건을 구하기 위해서, 주파수 영역의 리아프노프 방정식이 사용되었다. 제안된 방법에서는, 반복 학습 제어 프로세스가 L_2 수렴인지 아닌지를 GEVP를 해결함으로써 결정할 수 있다. 그러나, 얻어진 수렴 조건은 더 이상 수렴의 단조성을 보장하지는 않는다.

참고문헌

[1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Betterment operation of robots by learning," *Journal of Robotic Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.

[2] C. J. Goh, "A frequency domain analysis of learning control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement*, and Control, vol. 114, pp. 781-786, 1994.

[3] D. H. Owens and E. Rogers, "Frequency domain lyapunov equations and performance bounds for differential linear repetitive process," *System and Control Letter*, vol. 26, pp. 65-68, 1995.

[4] E. Rogers and D. H. Owens, *Stability Analysis for Linear Repetitive Process*, Lecture Notes in Control and Information Science, vol. 175, Springer-Verlag, 1992.

[5] K. L. Moore, *Iterative Learning Conrol for Deterministic Systems*, Springer-Verlag, 1993.

[6] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall, Inc., 1995.

[7] K. Zhou, J. C. Doyle, and K, Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., 1996.

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Books, 1994.

[9] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., 1995.

저 자 소 개

도태용(Tae-Yong Doh)

1992년 : 경북대학교 전자공학과
1994년 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 (공학석사)
1999년 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 (공학박사)
1997년~2001년 : 삼성전자 디지털미디어 연구소(책임연구원)
2001년~2002년 : 한국과학기술원 전자전산학과 (BK21 초빙교수)
현재 : 한밭대학교 전기전자제어공학부 제어계측공학전공 전임강사

관심분야 : 강인 제어, 반복 학습 제어, 반복 제어, 디지털 제어 시스템, 광 디스크 드라이브 서보 시스템
Phone : 042-821-1174
Fax : 042-821-1164
E-mail : dolerite@hanbat.ac.kr

문정호(Jung Ho Moon)

1991년 : 서울대학교 제어계측공학과
1993년 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 (공학석사)
1998년 : 한국과학기술원 전기및전자공학과 (공학박사)
1995년~2002년 : 삼성전자 중앙연구소 및 휴맥스 근무
현재 : 강릉대학교 정보전자공학부 제어계측공학전공 조교수

관심분야 : 학습 제어, 디지털 제어, 디스크 드라이브 서보 시스템
Phone : 033-640-2427
Fax : 033-640-2244
E-mail : itsmoon@kangnung.ac.kr