

# 공학문제 해결을 위한 프로그램에서의 재사용이 가능한 Matrix의 효율적 자동생성기법

이 미 영<sup>†</sup>

요 약

공학문제 해결을 위한 수치적 프로그램에서 원하는 해와 그 해의 변이 값에 대하여 같은 수준의 오차를 유지할 수 있는 기존의 복합유한 요소방법을 소개하고 이에 대한 효과적인 프로그램 재사용을 이용한 Matrix 생성기법을 소개한다. 또한, 원하는 임의의 차수의 기저에 대한 Matrix의 자동 생성기법을 제안한다. 여기서, 자동 생성된 Matrix는 최소한의 nonzero element를 갖고, 이는 Inverse Matrix 형성에 있어서 최소오차와 효율성을 보장한다. 위에서 제안한 Matrix 생성기법을 최소표면적 문제에 적용하여 본다.

## An efficient technique to generate reusable matrix to solve a problem in the engineering field

Miyoung Lee<sup>†</sup>

ABSTRACT

We show the mixed finite element method which induces solutions that has the same order of errors for both the gradient of the solution and the solution itself. The technique to construct an efficient reusable matrix is suggested. Two families of mixed finite element methods are introduced with an automatic generating technique for matrix with any order of basis. The generated matrix by this technique has more accurate values and is a sparse matrix. This new technique is applied to solve a minimal surface problem.

키워드 : 복합유한 요소법(Mixed Finite Element Method), Newton 반복법(Newton Method), p-version, Gauss-Lobatto quadrature, BDM 공간(BDM Spaces), RT 공간(RT Spaces), Lagrange 다항식(Lagrange Polynomial), Legendre 다항식(Legendre Polynomial)

### 1. 서 론

공학적인 문제해결을 위한 수치 프로그램에서 Galerkin Method가 가장 일반적으로 쓰이고 있는 알고리즘이다. 그러나 이 방법은 단지 우리가 원하는 해를 구하는데에만 주안점을 두고 있다. 그러나, 물체의 비행시, 그 비행물체 주위에 일어나는 공기의 흐름, 공기중의 매연확산 문제에서의 매연확산 속도 측정, 도시 속의 교통량, 주식 값 예측곡선에서의 주식 값의 변화 등, 많은 현실적 문제에서는 우리의 관심객체 그 자체뿐만 아니라 그 객체유동의 속도 및 변화가 더 중요한 관심요인이 되고 있다. 이에, 관심객체의 추적과 그 변화를 같은 중요도로 놓고, 동시에 두 가지 값에 대하여 같은 차수의 오차를 갖고 구할 수 있는 방법으로 제안된 방법이 복합유한요소방법이다[1]. 이 복합유한요소방법을 적용하기 위해 가장 많이 쓰이고 있는 공간은 Raviart-Thomas-Nedelec spaces(RTM공간)이다[6]. 그러나 이에 비해 적은 수의 변수를 포함하면서 같은 수준의 오차

를 유지하는 공간으로 제안된 것이 Brezzi-Douglas-Marini spaces(BDM공간)이다[2]. 본 논문은 이 BDM space를 구성하는 기저를 자동 생성함에 있어서 그 생성한 이 기저를 이용한 Matrix의 각 성분 값이 정확도에 있어서 다른 방법에 의해 생성된 값에 비해 월등히 높고 동시에 Sparse Matrix를 형성함으로써, Iterative Method Solver 또는 Direct Solver를 이용할 때 그 효율성을 보장한다는 것을 보인다[4].

마지막 장의 실험결과에서는 이 기법을 최소표면문제에 적용한다.

이 논문의 차별성은, 이제까지는 모델화된 공학문제를 풀기 위한 수치 프로그램을 작성하는데, 그 문제의 정확성 및 성질에 의해 선택되어진 기저의 차수에 따라서 매번 다른 프로그램을 해야만 했다. 그러나, 이 논문에서 제안된 프로그램 기법을 이용한다면, 프로그램을 다시 작성하지 않고도, 같은 프로그램을 이용하여 원하는 임의의 차수의 기저에 대해 프로그램을 실행시킬 수 있다. 또한 행렬의 각 성분 값을 구하는 데에도 Gauss quadrature를 이용하면 기존의 일반적인 방법에 비해 약 두 배의 정확도를 갖는다[5].

<sup>†</sup> 정 회 원 : 건국대학교 경영정보학과 교수  
논문접수 : 2002년 12월 31일, 심사완료 : 2003년 1월 15일

이 방법은 자동차의 엔진 주위에서의 열 변화 문제나 급격한 기류변동 문제 등 기존의 고깔기저(1차 방정식에 의한 기저)를 이용해서는 풀기 어려운 문제에 적용하는 소위 p-version을 이용한 프로그램에 효과적이다[3, 7, 8].

**2. 복합유한요소법**

다음의 모델문제에 복합유한 요소법을 적용하여 설명하여 본다.

다음의 관계를 만족하는  $u$  값을 구하고자 한다.

$$Lu = -\text{div}(a \text{ grad } u) = f, x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u = -g, x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

여기서 우리의 관심은  $u$  값 자체 뿐 만 아니라  $u$  값의 변화를 나타내는  $\text{grad } u$  즉,  $\nabla u$ 에 더 많이 있다고 하자. 그렇다면 위의 식은 다음과 같이 변형된 모습으로 Solver에 들어야 할 것이다.

$$c = c(x) = a(x)^{-1} \tag{2.3}$$

$$q = -a \text{ grad } u \tag{2.4}$$

라고 할 때, 식 (2.1)과 식 (2.2)는 다음과 같다[1].

$$c q + \text{grad } u = 0, x \in \Omega, \tag{2.5}$$

$$\text{div } q = f, x \in \Omega. \tag{2.6}$$

이것을 다음과 같이 유한공간의 기저를 이용하여 컴퓨터를 이용하여 풀 수 있는 문제로 형상화한다.

다음의 시스템으로부터  $(\rho, v) \in \mathcal{J} = (V, W)$ 을 만족하는  $\rho$  값과  $v$  값을 추출한다.

$$\text{div}(c\rho, v) - (\text{div } v, v) = \langle g, v \cdot n \rangle, v \in V, \tag{2.7}$$

$$(\text{div } \rho, w) = (f, w), w \in W. \tag{2.8}$$

여기서  $V$ 와  $W$ 는 각각 유한개의 요소를 갖는 벡터공간과 스칼라 공간을 나타낸다.

위에서  $(\cdot, \cdot)$ 는  $V$ 가 정의된 공간에서의 내적을 말하고,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는  $V$ 가 정의된 공간 보다 한 차원 낮은 공간, 여기서는 풀고자 하는 문제 정의된 구역의 경계선에서의 내적을 말한다. 또한  $n$ 은 경계선에서의 외향단위법선 벡터를 말한다.

**3. Brezzi-Douglas-Marini 공간**

이 BDM 공간은 기존의 RTN 공간에 비해 같은 오차범위를 갖으면서도, 적은 요소의 수를 가짐으로서, 적은 컴퓨터 비용을 가지고 같은 효과를 나타낼 수 있다[2].

공학문제를 풀기 위해, 우선 공학문제를 모델링 하여 수치적인 문제형태로 만든 다음, 이것을 위의 1장에서와 같이

유한 또는 복합유한요소법을 적용하여 약형식을 만든다. 여기에 위에서와 같이 만들어진 약형식을 효과적인 유한요소 공간에 적용한다. 이제 식 (2.7)과 식 (2.8)에서 구하여진 약형식의 유한요소공간을 나타내는  $V$ 와  $W$ 를 BDM 공간으로 택한다. 즉,

$$V = V^p = \widehat{P}_p(T), W = W^{p-1} = P_{p-1}(T) \tag{3.1}$$

로 한다. 여기서, 우리가 문제를 풀고자 하는 영역을 우선 작은 조각의 삼각형 내지는 사각형의 작은 요소들로 나누는데 이 작은 요소들의 집합을  $T$ 라고 정의한다. 잠시  $T$ 를 삼각형 요소들의 집합이라고 가정하자.  $P_p(T)$ 란  $\{x^i y^j : i + j \leq p\}$ 를 만족하는 다항식의 모임이고,  $\widehat{P}_p(T)$ 란 2차 벡터(s, t)형태들의 집합으로서 각각의 s와 t는  $P_p(T)$ 에 속한다.

이 BDM 공간과 같은 차수를 갖는 RTN 공간의 벡터공간은

$$V = \widehat{R}^p = \widehat{P}_p \oplus x P_p(T)$$

로 정의되고  $x$ 는 2차 공간에서의 단위벡터를 나타낸다. 이 공간에 대한 스칼라공간은  $P_p(T)$ 다. 여기서 BDM 공간과 RTN 공간의 미지수의 개수를 비교해 보면 BMD 공간의 미지수는  $\frac{1}{2}(3p^2 + 7p + 4)$ 이고 RTN 공간의 미지수는  $\frac{1}{2}(3p^2 + 11p + 8)$ 로서 BDM 공간의 미지수의 개수보다  $2p + 2$ 개가 더 많은 것을 알 수 있다.

이 논문에서는 BDM 공간을 공학에서 더 많은 경우에 사용되고 있는 사각형의 요소에 적용해 볼 것이다. 즉 우리의 관심 영역을 사각형의 요소들로 구성한 후 그 위에 BDM 공간을 이용한 복합유한요소법을 최소 표면적 문제에 적용하여 볼 것이다. 이 사각형의 요소에서는 BDM 공간을 다음과 같이 구성할 수 있다[2].

$$V = \widehat{P}_p(T) \oplus \text{Span}\{\text{curl } x^{p+1} y, \text{curl } x y^{p+1}\}, \tag{3.2}$$

$$W = P_{p-1}(T). \tag{3.3}$$

**4. 직교기저를 이용한 BDM 공간기저 생성 방법**

이 장에서는 위에서 보여준 BDM 공간의 실질적인 생성 방법을 보여주고자 한다.

공학문제를 풀기 위하여 우리는 궁극적으로 행렬을 형성하고 그것의 역행렬을 구해야 한다. 이때 행렬의 각각의 성분은 식 (2.7)과 식 (2.8)을 이용하여 기저함수들의 곱을 적분한 형태로부터 그 값을 구한다. 이때, 각 기저함수를 직교함수들로 만든다면 서로 다른 두 개의 기저함수로부터 만들어지는 행렬성분은 0값을 갖게된다. 이 성질을 만족하는 동시에 BDM 공간의 성질을 만족하게 하는 기저함수를 만드는 방법이 이 논문에서 보여주고자 하는 것이다. 즉,

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  라고 할 때,  
 $(v_i, v_j) \neq 0$ , if  $i = j$  이고  $(v_i, v_j) = 0$ , if  $i \neq j$ ,

를 만족하도록 기본적인 기저함수들을 재생성 하는 것이다. 또한 스칼라 공간인  $W$ 의 요소들도 위와 같은 직교 성질을 만족하도록 만들어야 할 것이다.

우리가 사용하고자 하는 복합유한요소 공간은 식 (3.2)과 식 (3.3)에서 정의된 바와 같다. 일반적으로 공간의 기저는 등거리 점에서의 값들을 이용한 Lagrange 다항식 형태이며 미지의 값들은 그 점들에서의 값이 된다. 이러한 기저로부터 구해지는 행렬의 성분은 이러한 점에서의 값들로부터의 사다리꼴 공식이나 또는 각 기저에 따라서 프로그램을 디자인 할 때 직접 그 적분 값을 입력하는 것이 일반적인 방법이었다.

그러나, 여기서 제안하는 방법은 가장 정확도가 높은 Gauss-Labatto 적분을 이용하는 것이다[5]. 이것의 장점은 기저의 적분 값, 즉 행렬의 성분의 값들이 정확하고, 값들의 규칙성에 의해 임의의 차수의 기저에 대해 프로그램 내에서 자동적으로 행렬의 성분 값들을 생성해 내는 것이다. 또한, 기저들의 직교성질에 의해 대부분의 행렬의 성분 값들이 0이 된다는 것이다.

즉 4차 기저를 이용한다고 하면, (그림 1)과 같은 형태의 행렬이 될 것이다.

*	0	0	0	0
0	*	0	0	0
0	0	*	0	0
0	0	0	*	0
0	0	0	0	*

(그림 1)

우리가 사용하는 기저를 이용할 때, 우리가 구하고자 하는 도메인 내부 지점에서 해는 각 기저의 그 지점에서의 값의 합으로 나타내어진다.

이러한 성질들을 이용하여, BDM 공간의 기저를 생성하여 보도록 하자.

다음은 직교 Legendre 다항식들이다.

$$L_0(x), L_1(x), \dots, L_p(x), \quad L_i : i \text{ 차 다항식}$$

$$(L_i, L_j) = 0 \text{ if } i \neq j \ \& \ (L_i, L_j) \neq 0 \text{ if } i = j.$$

이때, BDM 공간의 기저는 다음과 같이 정의된다.

$$W = \{ L_i(x) L_j(y) : 0 \leq i + j \leq p - 1 \}, \quad (4.1)$$

$$V = \{ (L_i(x) L_j(y), 0) : 0 \leq i + j \leq p \} \oplus$$

$$\text{Span} \{ (0, L_m(x) L_n(y)) : 0 \leq m + n \leq p \} \oplus \quad (4.2)$$

$$\text{Span} \{ -\text{curl } y \int_{-1}^x L_p(\tau) d\tau, \text{curl } x \int_{-1}^y L_p(\tau) d\tau \}.$$

위에서 정의된 동치기저를 정의해 보자.

다음은 Gauss-Lobatto 점들을 이용하여 만든 Lagrange 다항식들이다.

$$l_i^p(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (4.3)$$

여기서,  $x_j$ 는  $p$ 차 Legendre 다항식의 미분함수의  $j$ 번째 근을 이야기하고, 동시에 Gauss-Lobatto 점이다.

식 (4.3)을 이용하여 space  $V$ 의 기저를 다시 정렬하면

$$V = \text{Span} \{ B_1^x, B_2^x, \dots, B_{p+1}^x, B_1^y, B_2^y, \dots, B_{p+1}^y \} \quad (4.4)$$

로 나타낼 수 있다. 정의된 괄호 안의 각각의 원소는 다음과 같이 정의된다.

$$B_k^x = \{ (L_i(x) L_k(y), 0) : 0 \leq i + k \leq p - 2 \} \cup$$

$$\{ ((-1)^{p-k+1} L_{p-k}(x) L_k(y) + (-1)^{p-k} L_{p-k-1}(x) L_k(y), 0) \} \cup$$

$$\{ L_{p-k}(x) L_k(y) + L_{p-k-1}(x) L_k(y), 0 \}$$

if  $0 \leq k \leq p - 2$ ,

$$B_{p-1}^x = \{ (L_1(x) L_k(y) - L_k(y), 0) \} \cup$$

$$\{ (L_1(x) L_k(y) + L_k(y), 0) \},$$

$$B_p^x = \{ ((x-1) L_p(y),$$

$$\frac{1}{2p+1} (L_{p-1}(y) - L_{p+1}(y))) \} \cup$$

$$\{ ((x+1) L_p(y), \frac{1}{2p+1} (L_{p-1}(y) - L_{p+1}(y))) \}.$$

### 5. 최소표면적 문제

관심 영역의 경계에서 주어진 값을 가지며, 영역 내부에서 표면의 넓이가 최소가 되는 최소표면적 문제는 다음과 같이 정의된다.

영역 내부에서는

$$-\text{div} \left( \frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right) = 0$$

의 식을 만족하는 동시에 영역의 경계선에서는

$$u = -g$$

를 만족하는 함수  $u$ 를 구한다. 즉, 경계에서  $u = -g$ 를 만족하며 영역 내부에서 최소표면적을 갖는 함수가  $u$ 가 되는 것이다.

문제를 복합유한요소법을 적용하면 다음의 문제 형태를 갖는다.

즉, 다음 관계를 만족하는  $u^p \in V$ 와  $\sigma^p \in W$ 를 구한다.

$$(b(u^p, \sigma^p), \nu) - (\text{div } \nu, u^p) = \langle g, \nu \cdot n \rangle, \quad \forall \nu \in V,$$

$$(\text{div } \nu, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in W.$$

여기서  $\mathbf{V}$ 와  $\mathbf{W}$ 는 각각 식 (4.1)과 식 (4.4)에서 정의된 바와 같고,  $b(u, \sigma) = -\nabla u = \frac{\sigma}{\sqrt{1-|\sigma|^2}}$  이다.

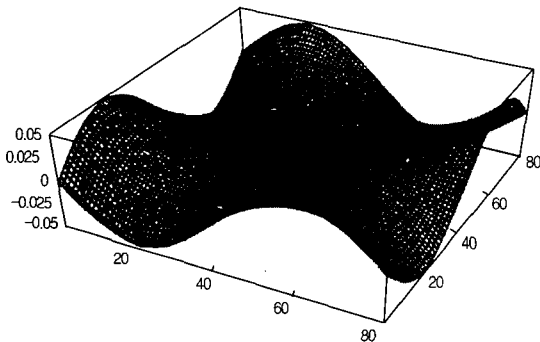
위의 식을 프로그래밍화하기 위하여 Newton 방법을 이용하여 문제를 선형화 한 다음, 위에서 제안한 기저를 이용하여 문제를 풀어보았다.

이 프로그램에서는, 앞에서 언급했듯이, 사용하는 기저의 차수를 입력값으로 넣어 프로그램 내부에서 그 차수에 따르는 기저와 그에 대한 행렬을 자동으로 생성하여 문제를 풀도록 되어 있다. 다음의 (그림 2)는 기저의 차수를 15, 즉 15차 다항식을 기저로 사용했을 때의 해를 구한 모습이다.

이때, 문제가 정의된 영역은  $[0, 1] \times [0, 1] \in \mathbf{R}^2$ 이고 사용된 경계에서의 함수는

$$g(x, y) = \begin{cases} (\log(\cos(y - .5)) - \log(\cos(-.5))) & \text{if } 0 \leq y \leq 1, x = 0, \\ (\log(\cos(y - .5)) - \log(\cos(.5))) & \text{if } 0 \leq y \leq 1, x = 1, \\ (\log(\cos(.5)) - \log(\cos(x - .5))) & \text{if } 0 \leq x \leq 1, y = 1, \\ (\log(\cos(-.5)) - \log(\cos(x - .5))) & \text{if } 0 \leq x \leq 1, y = 0 \end{cases}$$

이었다.



(그림 2)

### 6. 결론 및 결과 이용

공학에서 제기된 문제를 수치적으로 풀기 위해, 그 프로그램을 하는데 있어서 문제의 성질에 따라 일반적으로 쓰이는(1차 다항식의 형태로 된), 그리고 문제를 정확히 풀기 위해 영역의 mesh size를 작게 만들어 가는 기존의 방법으로는 문제가 풀리지 않는 경우가 많다[8]. 특히 값의 변화가 큰 문제에 대해서는 더욱 그렇다. 이때에는, 문제가 풀릴수 있도록 기저의 차수를 높여주어야 하는데, 기존에는 기저의 차수를 높일 경우, 그 기저에 의해 프로그램 내부의 행렬의 성분 값을 변형하여, 다른 프로그램을 작성해야만 했다. 또는 상용 프로그램에서는 프로그램 내부에 기저의 차수를 1차, 2차 그리고 3차 정도에 해당하는 행렬 부분의 코드를 접합하여, 사용자의 요구에 따라 해당하는 차수의 프로그램

을 불러들여 문제를 푸는 방법을 사용하였다. 그러나, 이 논문에서 제안한 방법을 사용하게 되면, 앞장의 최소표면적 문제의 프로그램 결과와 같이 어떠한 높은 차수의 기저라도, 프로그램 내부에서 자동으로 생성하여 프로그램의 어떠한 변형도 없이 하나의 프로그램을 이용하여 풀 수 있다.

이 논문의 결과를 향후 adaptive method에 적용한다면, 어떠한 형태의 변화를 갖는 현상에 대해서도 그 해를 구할 수 있는 매우 유용한 도구로 발전시킬 수 있다.

### 참고 문헌

- [1] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers*, RAIRO, Anal. numer, Vol.2, pp.129-151, 1974.
- [2] F. Brezzi, J. Douglas and L. D. Martini, *Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems*, Numer, Math, 47, pp.217-235, 1985.
- [3] F. A. Milner and M. Lee, *Mixed finite element methods for nonlinear elliptic problem : the p-version*, Numer, Meth, P. D. E., Vol.12, pp.729-741, 1996.
- [4] G. Golub and C. V. Loan, *Matrix Computations, 2nd Ed*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1989.
- [5] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quateroni and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [6] P. A. Raviart and J. M. Thomas, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, in Proceed. Conf. on Mathematical Aspects of Finite Element Methods, G. J. M. Delhays and N. Zuber, eds., Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Vol.606, pp.3-25, 1987.
- [7] L. Demkowicz, J. T. Oden, W. Rachowicz and O. Hardy, *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 1. Constrained approximation and data structure*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engng., 77, pp.79-112, 1989.
- [8] J. T. Oden, L. Demkowicz, *h-p adaptive finite element methods in computational fluid dynamics*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engng., 89, pp.11-40, 1989.



이 미 영

e-mail : yura@konkuk.ac.kr

1986년 서울대학교 수학교육학과(이학사)

1995년 Purdue University 수학과, Scientific Computing 전공(이학박사)

1996년~1999년 Purdue Univ. 서울대학교 Post-Doc.

1999년~2002년 강남대학교 컴퓨터강의 조교수 및 삼성종합 기술원 CSE 센터 기술자문

현재 건국대학교 경영정보학과 조교수

관심분야 : 데이터 마이닝, 지식정보처리 알고리즘, 시뮬레이션 등