가중 퍼지 Pr/T 네트를 이용한 가중 퍼지 추론

조 상 엽†

요 약

본 논문에서는 가중 퍼지 Pr/T 네트에 기반을 둔 규칙기반시스템을 위한 가중 퍼지 추론알고리즘을 제안한다. 이때 퍼지 생성규칙의 확신도, 규칙에 나타나는 술어의 진리값과 술어의 중요도를 나타내는 가중값을 퍼지 숫자로 표현한다. 제안한 추론알고리즘은 퍼지 생성규칙에 있는 술어의 중요도에 따라 부여한 가중값을 이용하여 추론하기 때문에 ① 술어의 가중값 없이 퍼지 생성규칙의 확신도만을 기반으로 단순하게 min과 max 연산을 하거나[10], ② 술어의 가중값 없이 퍼지 생성규칙에 있는 퍼지 개념에 따라 믿음값 평가함수로 퍼지 생성규칙의 믿음값을 평가하는[12] 방법보다 더 유연하고 사람의 직관과 추론에 가깝다.

Weighted Fuzzy Reasoning Using Weighted Fuzzy Pr/T Nets

Sang Yeop Cho†

ABSTRACT

This paper proposes a weighted fuzzy reasoning algorithm for rule-based systems based on weighted fuzzy Pr/T nets, where the certainty factors of the fuzzy production rules, the truth values of the predicates appearing in the rules and the weights representing the importance of the predicates are represented by the fuzzy numbers. The proposed algorithm is more flexible and much closer to human intuition and reasoning than other methods : ① calculate the certainty factors using by the simple min and max operations based on the only certainty factors of the fuzzy production rules without the weights of the predicates[10] ; ② evaluate the belief of the fuzzy production rules using by the belief evaluation functions according to fuzzy concepts in the fuzzy rules without the weights of the predicates[12], because this algorithm uses the weights representing the importance of the predicates in the fuzzy production rules.

키워드 : 퍼지 생성규칙(Fuzzy Production Rules), 가중 퍼지 추론알고리즘(Weighted Fuzzy Reasoning Algorithms), 가중 퍼지 Pr/T 네트(Weighted Fuzzy Pr/T Nets), 퍼지 숫자(Fuzzy Numbers)

1. 서 론

실세계에서 사람들이 사용하는 불확실한 지식을 컴퓨터에 표현하고 처리하기 위한 다양한 지식표현방법이 연구되고 있다. 이러한 불확실한 지식을 표현하기 위해 많이 사용하는 지식표현방법이 퍼지 생성규칙이다. 퍼지 생성규칙은 퍼지이론[11]을 이용하여 생성규칙을 퍼지 확장한 규칙이다. 퍼지 생성규칙과 퍼지 추론과정의 모형화를 위해 많이 사용되는 도구가 퍼지 페트리네트(fuzzy Petri net)[1, 3, 7]이다. 퍼지 페트리네트는 기존의 페트리네트[9]에서 불확실한 지식을 처리할 수 있도록 퍼지이론[11]을 결합하여 확장한 지식정보의 흐름을 분석하기 위한 모형화 도구이다.

[10]에서 Yu, S.는 퍼지 페트리네트를 기반으로 퍼지 생성규칙을 표현하는 방법은 명제논리 수준에 대응하는 지식표현 방법이기 때문에, 술어논리를 기반으로 개발하고 사용하는 많은 지식기반시스템과 맞지 않는다고 하였다. 그래서 술어논리 수준에 대응하는 퍼지 Pr/T 네트 정의를 Pr/T 네트를 기반으로 퍼지 확장하고, 퍼지 Pr/T 네트로 퍼지 생성규칙을 모형화하는 방법과 이 네트에서 사용하기 위한 퍼지 추론 알고리즘을 제안하였다. 그러므로 퍼지 Pr/T 네트는 퍼지 페트리네트[1, 3, 7]를 술어논리 수준으로 확장하고, Pr/T 네트[4]를 퍼지 확장한 모형화 도구가 된다. 퍼지 Pr/T 네트로 퍼지 생성규칙을 모형화할 때 명제논리수준의 퍼지 페트리네트로 퍼지 규칙을 모형화할 때와는 달리 단일화(unification)를 필수적으로 고려해야 한다.

Yu, S.는 [10]에서 퍼지 생성규칙을 퍼지 Pr/T 네트 표현하고, 0과 1사이의 실수로 표현한 확신도를 반영한 단일화(unification)를 이용한 퍼지 추론알고리즘을 제안하였다. 이 알고리즘에서는 규칙의 확신도를 구하기 위해 단순히 min과 max 연산을 이용하여 계산하였다. [12]에서 조상엽은 퍼지 생성규칙을 퍼지 Pr/T 네트 표현하고, 규칙의 믿음값을 구간값 퍼지집합(interval-valued fuzzy set)에 기반을 둔 구간으로 표현하였다. 이 연구에서는 규칙의 믿음값을 구하기 위해 규칙에 나타나는 퍼지 개념에 따라 믿음값 평가함수를 사용하는 방법을 제안하였다.

그러나 Chen, S.는 [2]에서 의료진단(medical diagnosis) 분야에서 퍼지 생성규칙의 전제부에 나타나는 명제와 진단

※ 본 논문은 청운대학교 교내 연구비 지원을 받음.
† 종신회원 : 청운대학교 인터넷컴퓨터학과 교수
논문접수 : 2003년 8월 1일, 심사완료 : 2003년 10월 20일

과정에서 환자가 진술하는 증상과는 퍼지 매칭이 되고, 환자가 진술하는 각각의 증상은 서로 다른 정도의 중요도(impotance)를 갖는다고 하였다. 그래서 이 중요도를 규칙의 전제부에 나타나는 명제의 가중값(weight)으로 반영하고, 이 값을 고려한 가중 퍼지 추론알고리즘을 제안하였다. 그리고 Chen, S.는 [1]에서 가중값을 가지고 있는 퍼지 생성규칙을 모형화하기 위한 가중 퍼지 페트리네트(weighted fuzzy Petri net)를 정의하고 이 네트를 기반으로 하는 가중 퍼지 추론알고리즘을 제안하였다.

본 논문에서는 가중값을 가지고 있는 퍼지 생성규칙을 술어논리 수준의 퍼지 Pr/T 네트로 모형화하기 위해 가중 퍼지 Pr/T 네트(Weighted Fuzzy Pr/T Net)를 정의하고, 이 네트를 기반으로 가중값과 단일화를 고려한 가중 퍼지 추론알고리즘을 제안한다. 그리고 본 연구에서는 규칙의 확신도를 0과 1 사이의 실수 또는 구간값 퍼지집합에 기반을 둔 구간으로 표현하는 방법과는 달리 퍼지 생성규칙의 확신도, 규칙에 나타나는 술어의 진리값 그리고 술어의 중요도를 나타내는 가중값을 퍼지 숫자[5]로 표현한다. 그러므로 기존의 방법보다 확신도, 진리값 그리고 가중값을 더 유연하게 부여할 수 있고, 술어의 중요도인 가중값을 고려하여 추론을 하기 때문에 사람이 하는 추론방식과 더 가깝다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 확신도, 진리값 그리고 가중값을 표현하기 위한 퍼지 숫자에 대하여 간단히 살펴본다. 3장에서는 지식기반시스템에서 사용하는 퍼지 생성규칙을 설명하고 각 규칙에 대응되는 가중 퍼지 Pr/T 네트를 기술한다. 4장에서는 가중 퍼지 추론알고리즘을 제안하고, 예를 보여준다. 5장에서는 연구결과를 기술한다.

2. 퍼지 숫자

퍼지 집합이론은 1965년 Zadeh에 의해 제안되었다[11]. 퍼지 집합은 퍼지 경계의 한 종류로 볼 수 있다. 전체집합(universe of discourse) U, $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$에 있는 퍼지 집합 $\tilde{A}$는 소속함수 $\mu_{\tilde{A}}$, $\mu_{\tilde{A}}: U \rightarrow [0,1]$에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\tilde{A}=\mu_{\tilde{A}}(u_1)/u_1+\mu_{\tilde{A}}(u_2)/u_2+\cdots+\mu_{\tilde{A}}(u_n)/u_n$$

여기에서 $\mu_{\tilde{A}}(u_i)$는 퍼지 집합 $\tilde{A}$에 u_i의 소속정도를 가리킨다. 만일 $\exists u_i \in U$, $\mu_{\tilde{A}}(u_i)=1$이면 퍼지 집합 $\tilde{A}$는 정상(normal)이다. 전체집합 U에 있는 모든 u_1, u_2에 대해서 다음을 만족하면 퍼지집합 $\tilde{A}$는 볼록(convex)이다.

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2) \geq \mathrm{Min}(\mu_{\tilde{A}}(u_1), \mu_{\tilde{A}}(u_2))$$

여기에서 $\lambda \in [0,1]$. 퍼지 숫자는 전체집합 U에서 볼록하고 정상인 퍼지 집합이다.

삼각 퍼지 숫자 $\tilde{A}$는 세 쌍의 파라메터 (a_1, a_2, a_3)로 표현할 수 있다. 삼각 퍼지 숫자 $\tilde{A}$는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mu_{\tilde{A}}(u)=\begin{cases} 0, & u<a_1 \\ (u-a_1)/(a_2-a_1), & a_1 \leq u \leq a_2 \\ (a_3-u)/(a_3-a_2), & a_2 \leq u \leq a_3 \\ 0, & u \geq a_3 \end{cases}$$

$\tilde{A}$와 $\tilde{B}$를 세 쌍(a_1, a_2, a_3)와 (b_1, b_2, b_3)로 각각 표현되는 삼각 퍼지 숫자라고 하자. 삼각 퍼지 숫자 $\tilde{A}$와 $\tilde{B}$ 사이의 산술연산은 다음과 같이 정의된다[1, 5].

- 삼각퍼지숫자 더하기 $\oplus$: $\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a_1, a_2, a_3)\oplus(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.
- 삼각퍼지숫자 빼기 $\ominus$: $\tilde{A}\ominus\tilde{B}=(a_1, a_2, a_3)\ominus(b_1, b_2, b_3)=(a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)$.
- 삼각퍼지숫자 곱하기 $\otimes$: $\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(a_1, a_2, a_3)\otimes(b_1, b_2, b_3)=(a_1\times b_1, a_2\times b_2, a_3\times b_3)$.
- 삼각퍼지숫자 나누기 $\oslash$: $\tilde{A}\oslash\tilde{B}=(a_1, a_2, a_3)\oslash(b_1, b_2, b_3)=(a_1/b_3, a_2/b_2, a_3/b_1)$.

전체집합 U에서 퍼지 집합 $\tilde{A}$의 α-cut인 A_α는 다음과 같이 정의된다.

$$A_\alpha=\{u_i \mid \mu\tilde{A}(ui) \geq \alpha,\ u_i \in U\}$$

여기에서 $\alpha \in [0,1]$. 삼각 퍼지 숫자 $\tilde{A}$와 $\tilde{B}$는 수준집합(level set ; i.e., α-cut)으로 각각 나눌 수 가 있다.

$$\tilde{A}=\int_0^1 \alpha A_\alpha,$$
$$\tilde{B}=\int_0^1 \alpha B_\alpha$$

여기에서 $A_\alpha=[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}]$, $B_\alpha=[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$, $\alpha \in [0,1]$. 따라서 삼각 퍼지 숫자 $\tilde{A}$와 $\tilde{B}$의 OR 연산은 $\tilde{A}ⓥ\tilde{B}$로 표기하고, 다음과 같은 전체집합내의 식으로 기술할 수 있다.

$$\tilde{A}ⓥ\tilde{B}=\int_0^1 \alpha[a_1^{(\alpha)} \vee b_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)} \vee b_2^{(\alpha)}],$$

여기에서 ⓥ는 최대값 연산자가 된다.

3. 지식표현과 추론

3.1 퍼지 생성규칙

퍼지 생성규칙을 이용하면 실세계에서 사람이 사용하는 불확실하고 애매한 지식을 표현할 수 있다. 퍼지 생성규칙은 두 개의 술어논리공식사이의 퍼지 관계를 기술한다고 생각할 수 있다. 여기에서는 지식기반시스템의 규칙베이스에 나타나는 규칙을 <표 1>과 같이 분류할 수 있다[1, 11, 12].

〈표1〉 퍼지 생성규칙의 분류

사 례	퍼지 생성규칙
1	Rulei : $d_j \Rightarrow d_k$ (CF = $\tilde{\beta}_i$)
2	Rulei : $d_{j1} \wedge d_{j2} \wedge \cdots \wedge d_{jm} \Rightarrow d_k$ (CF = $\tilde{\beta}$i)
3	Rulei : $d_j \Rightarrow d_{k1} \wedge d_{k2} \wedge \cdots \wedge d_{kn}$ (CF = $\tilde{\beta}$ i)
4	Rulei : $d_{j1} \vee d_{j2} \vee \cdots \vee d_{jm} \Rightarrow d_k$ (CF = $\tilde{\beta}$i)

<표 1>에서 $Rule_i$는 규칙의 이름이고, 1≤i≤N, N은 퍼지 생성규칙의 수이다. d_j와 d_k는 각각 퍼지 술어 $d_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$와 $d_k(y_1, y_2, \cdots, y_n)$를 나타낸다. 1≤p≤m, 1≤q≤n. m과 n은 양의 정수이다. x_p와 y_q는 같을 수도 있고 다를 수도 있으며, 변수이거나 상수이다. $\tilde{\beta}_i$는 전체집합(universe of discourse) [0,1]에서 정의된 퍼지 숫자로서 규칙 $Rule_i$의 확신도이다.

사례 1은 단순 퍼지 생성규칙이고, 사례 2, 3, 4는 전제부나 결론부가 논리합, ∨이나 논리곱, ∧으로 연결된 합성 퍼지 생성규칙이다.

3.2 가중 퍼지 추론

이 절에서는 퍼지 생성규칙의 분류를 기반으로 하여 가중 퍼지 Pr/T 네트에서 사용하기 위해 각각의 사례에 대한 가중 퍼지 추론방법에 대하여 기술한다[1, 5].

사례 1 : 다음과 같은 규칙이 규칙베이스에 있다고 가정하자.

$$Rule_i : d_j \Rightarrow d_k(CF = \tilde{\beta}_i)$$

여기에서 $Rule_i$는 규칙의 이름이고, d_j와 d_k는 각각 퍼지 술어 $d_j(x_1, x_2, \cdots, x_m)$와 $d_k(y_1, y_2, \cdots, y_n)$이다. m과 n은 양의 정수이다. x_p와 y_q는 같을 수도 있고 다를 수도 있으며, 변수이거나 상수이다. 1≤p≤m, 1≤q≤n. $\tilde{\beta}_i$는 전체집합(universe of discourse) [0, 1]에서 정의된 퍼지 숫자로서 규칙 $Rule_i$의 확신도이다. 술어 d_j와 d_k의 가중값은 각각 ω $\tilde{\omega}_j$와 $\tilde{\omega}_k$로 표현하고, $\tilde{\omega}_j$와 $\tilde{\omega}_k$는 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자이다. 술어 d_j와 d_k의 퍼지 진리값을 각각 $\tilde{\tau}_j$와 $\tilde{\tau}_k$라고 가정하자. 여기에서 $\tilde{\tau}_j$와 $\tilde{\tau}_k$는 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자이다. 그러면 술어 d_k의 퍼지 진리값 $\tilde{\tau}_k = \tilde{\tau}_j \otimes \tilde{\beta}_i$로 평가할 수 있다. ⊗는 퍼지 숫자의 곱하기 연산자이다.

사례 2 : 다음과 같은 합성 퍼지 생성규칙이 규칙베이스에 있다고 가정한다.

$$Rule_i : d_{j1} \wedge d_{j2} \wedge \cdots \wedge d_{jm} \Rightarrow d_k(CF = \tilde{\beta})$$

여기에서 $\tilde{\beta}_i$는 전체집합 [0, 1]에서 정의된 퍼지 숫자로서 규칙 $Rule_i$의 확신도이다. 술어 $d_{j1}, d_{j2}, \cdots, d_{jm}, d_k$의 가중값은 각각 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\omega}_{j1}, \tilde{\omega}_{j2}, \cdots, \tilde{\omega}_{jm}, \tilde{\omega}_k$이다. 그리고 술어 $d_{j1}, d_{j2}, \cdots, d_{jm}$의 퍼지 진리값은 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\tau}_{j1}, \tilde{\tau}_{j2}, \cdots, \tilde{\tau}_{jm}$이다. 그러면 술어 d_k의 퍼지 진리값 $\tilde{\tau}_k = [(\tilde{\tau}_{j1} \otimes \tilde{\omega}_{j1} \oplus \tilde{\tau}_{j2} \otimes \tilde{\omega}_{j2} \oplus \cdots \oplus \tilde{\tau}_{jm} \otimes \tilde{\omega}_{jm}) \oslash (\tilde{\omega}_{j1} \oplus \tilde{\omega}_{j2} \oplus \cdots \oplus \tilde{\omega}_{jm})] \otimes \tilde{\beta}_i$로 평가할 수 있다. 여기에서 ⊕, ⊗, ⊘는 각각 퍼지 숫자의 더하기, 곱하기, 나누기 연산자이다.

사례 3 : 다음과 같은 합성 퍼지 생성규칙이 규칙베이스에 있다고 가정한다.

$$Rule_i : d_j \Rightarrow dk_1 \wedge dk_2 \wedge \cdots \wedge d_{kn}(CF = \tilde{\beta}_i)$$

여기에서 $\tilde{\beta}_i$는 전체집합 [0, 1]에서 정의된 퍼지 숫자로서 규칙 $Rule_i$의 확신도이다. 술어 $d_j, d_{k1}, d_{k2}, \cdots, d_{kn}$의 가중값은 각각 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_{k1}, \tilde{\omega}_{k2}, \cdots, \tilde{\omega}_{kn}$이고, $\tilde{\omega}_j$=1이다. 술어 d_j의 퍼지 진리값은 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\tau}_j$라고 가정한다. $d_{k1}, d_{k2}, \cdots, d_{kn}$의 퍼지 진리값 $\tilde{\tau}_{ks} = \tilde{\tau}_j \otimes \tilde{\beta}_i$이다. s=1, 2, ⋯, 또는(or) n. 여기에서 ⊗는 퍼지 숫자 곱하기 연산자이다.

사례 4 : 다음과 같은 합성 퍼지 생성규칙이 규칙베이스에 있다고 가정한다.

$$Rule_i : d_{j1} \vee d_{j2} \vee \cdots \vee d_{jm} \Rightarrow d_k(CF = \tilde{\beta}_i)$$

여기에서 $\tilde{\beta}_i$는 전체집합 [0, 1]에서 정의된 퍼지 숫자로서 규칙 $Rule_i$의 확신도이다. 술어 $d_{j1}, d_{j2}, \cdots, d_{jm}$의 가중값은 각각 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\omega}_{j1}, \tilde{\omega}_{j2}, \cdots, \tilde{\omega}_{jm}$이다. 그리고 술어 $d_{j1}, d_{j2}, \cdots, d_{jm}$의 퍼지 진리값은 각각 전체집합 [0, 1]에서 정의되는 퍼지 숫자 $\tilde{\tau}_{j1}, \tilde{\tau}_{j2}, \cdots, \tilde{\tau}_{jm}$이다. 그러면 술어 d_k의 퍼지 진리값 $\tilde{\tau}_{ks} = [\bigcirc\!\!\!\!\vee_s (\tilde{\tau}_{js} \otimes \tilde{\omega}_{js}) \oslash (\tilde{\omega}_{j1} \oplus \tilde{\omega}_{j2} \oplus \cdots \oplus \tilde{\omega}_{jm})] \otimes \tilde{\beta}_i$로 평가할 수 있다. 여기에서 s= 1, 2, ⋯, n이고 ⊗, ⊘, ⓥ는 각각 퍼지 숫자의 곱하기, 나누기, 최대값 연산자이다.

3.3 가중 퍼지 Pr/T 네트

퍼지 생성규칙을 표현하기 위해 가중 퍼지 Pr/T 네트 WFPN (weighted fuzzy Pr/T net)을 다음과 같이 정의한다[1, 11, 12].

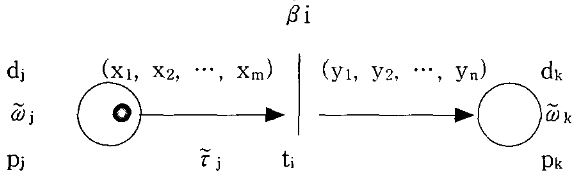
$$WFPN = (P,\ T,\ F,\ D,\ V,\ \pi,\ A_P,\ A_T,\ A_F,\ f,\ \alpha,\ \omega,\ M_0)$$

여기에서 P, T와 F는 각각 플레이스, 트랜지션 그리고 흐름관계의 유한집합이다. P∪T≠∅, P∩T=∅, F⊆(P×T)∪(T×P), dom(F)∪ran(F)=P∪T, D는 공집합이 아닌 유한집합인 개체(individual)집합이다. Ω는 D의 연산자집합이다. V는 D상의 변수집합이다. π는 D상의 술어 집합이다. $A_P : P \rightarrow \pi$, A_P는 전단사 사상이다. $^\forall p \in P$, 만일 $A_P(p)$가 n-항 술어(n-ary predicate)라면 p는 n-항 술어이다. $A_T : T \rightarrow f_D$, f_D는 D상의 공식집합이다. $^\forall t \in T$에 대해 만일 $A_T(t)$는

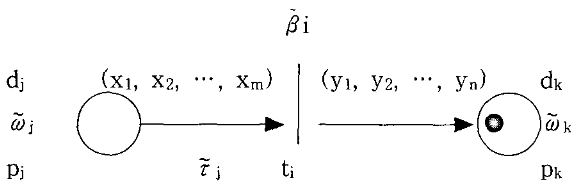
유일한 술어가 되거나 Ω내의 연산자가 될 수 있다. $A_F : F \rightarrow f_S$, f_S는 D 상의 기호합집합(symbolic sum set). $\forall p \in P$, 만일 $(t, p) \in F$ 또는 $(p, t) \in F$라면 $A_F(t, p)$ 또는 $A_F(p, t)$는 n-항 기호합(symbolic sum)이거나 $A_F(t, p)$ 또는 $A_F(p, t)$는 널이다. $\forall t \in T$에 대해서 $A_T(t)$안의 자유변수(free variable)들은 방향성아크의 양끝 중 하나가 t를 갖는 이 아크에서 단지 한번만 발생한다. $f : T \rightarrow$ 퍼지 숫자$\in [0, 1]$는 결합함수이다. $\forall t \in T$, $f(t) = \tilde{\beta}$이다. $\tilde{\beta}$는 전체집합 $[0, 1]$에서 정의되는 퍼지 숫자이다. $\alpha : P \rightarrow$ 퍼지 숫자$\in [0, 1]$는 결합함수이다. $\forall p \in P$, $\alpha(p) = \tilde{\tau}$는 술어 p의 모든 인스턴스의 퍼지 진리값을 나타낸다. p내의 어느 토큰 tok_i에 대해, $\alpha'(p(tok_i)) \in \alpha(p)$이다. 여기에서 $\alpha'(p(tok_i))$는 p의 인스턴스 tok_i의 퍼지 진리값을 표시한다. $\omega : P \rightarrow$ 퍼지 숫자$\in [0, 1]$는 결합함수이다. $\forall p \in P$, $\omega(p) = \tilde{\omega}$는 퍼지 숫자로 표현되는 술어 p의 가중값을 표시한다. $M_0 : P \rightarrow N$는 마킹함수이다. N은 음이 아닌 양의 정수이다.

트랜지션의 실행 가중 퍼지 Pr/T네트에서 트랜지션의 실행 조건은 다음과 같다. ① 만일 $\forall p \in \bullet t$, $M(p) \geq 1$이라면 트랜지션 t는 M에서 실행가능하다(enable). ② 만일 트랜지션 t가 M에서 실행가능하다면 t의 실행은 M을 새로운 마킹 M′으로 변환시킨다. 즉, M′은 M에서 도달가능하다(reachable). $\forall p \in P$대해 만일 $p \in t \bullet$ 그리고 $p \notin \bullet t$이라면 $M'(p) = M(p)+1$; 만일 $p \in \bullet t$ 그리고 $p \notin t \bullet$이라면 $M'(p) = M(p) -1$; 그렇지 않으면 $M'(p) = M(p)$이다. 이 규칙은 가중 퍼지 Pr/T 네트의 동적인 동작을 정의한다. $\bullet t$ 와 $t \bullet$는 t의 모든 입력플레이스와 출력플레이스의 집합을 각각 표시한다.

투사행렬 WFPN이 n개의 트랜지션와 m개의 플레이스를 갖는 가중 퍼지 Pr/T네트라고 하자. WFPN의 투사행렬(incidence matrix)은 n×m 정수 행렬 $C=[c_{ij}]$. $C=[c_{ij}]$에 대해 WFPN의 투사행렬은 $c_{ij} = w(t_i, p_j) - w(p_j, t_i) = (A_F(t_i, p_j))\tilde{\beta}_i - A_F(p_j, t_i)$. 여기에서 t_i와 p_j는 각각 트랜지션과 플레이스이다. $f(t_i) = \tilde{\beta}_i$이다. $w(x, y) = A_F(x, y)$, 여기에서 x와 y는 플레이스이거나 트랜지션이다.

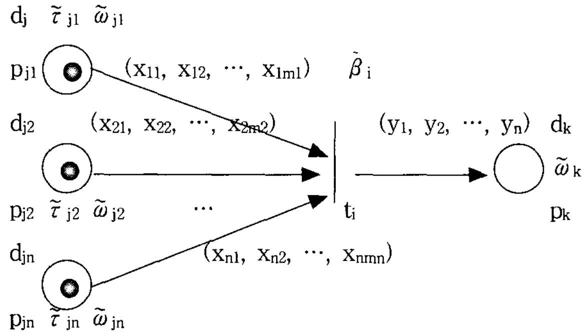


(그림 1) t_i 실행 전 1의 가중 퍼지 Pr/T 네트

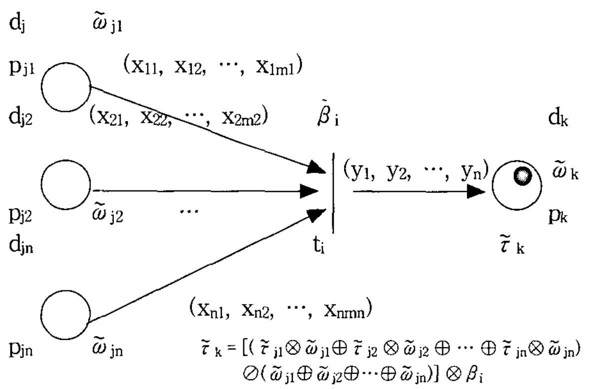


(그림 2) t_i 실행 후 1의 가중 퍼지 Pr/T 네트

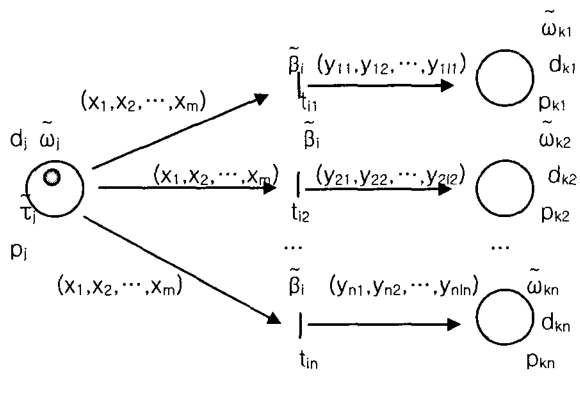
(그림 1-2)는 사례 1의 퍼지 생성규칙에 대한 가중 퍼지 Pr/T 네트표현이다. (그림 3-4), (그림 5-6)과 (그림 7-8)은 각각 사례 2, 3, 4에 대한 가중 퍼지 Pr/T 네트표현이다. (그림 9)의 (a)와 (b)는 파라메터가 있거나 없는 술어 d_j의 초기 사실에 대한 인스턴스를 보여준다. t_i는 근원(source) 트랜지션으로 입력 플레이스가 없는 트랜지션이며 언제나 실행가능하고 출력 플레이스로 토큰을 출력한다. (그림 10)는 질의어 표현으로, 이 질의어의 부정형이 증명되어야 하는 목표문장이 된다. t_i는 배출(sink) 트랜지션으로 출력 플레이스를 가지지 않는다. (그림 11)는 단일화(unification)가 가능한 관계를 표현한 Pr/T 네트이다.



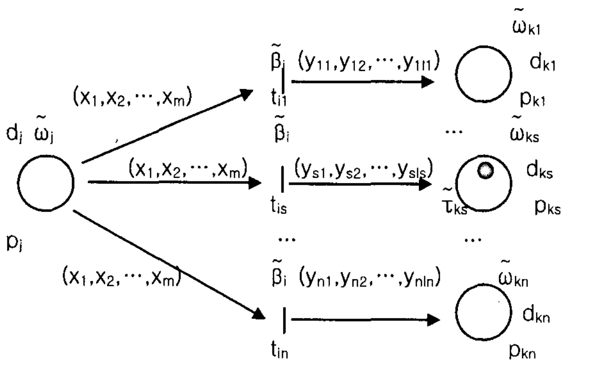
(그림 3) t_i 실행전 2의 가중 퍼지 Pr/T 네트



(그림 4) t_i 실행전 2의 가중 퍼지 Pr/T 네트

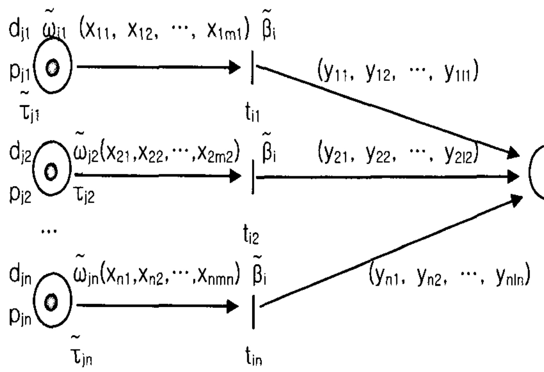


(그림 5) t_i 실행전 3의 가중 퍼지 Pr/T 네트

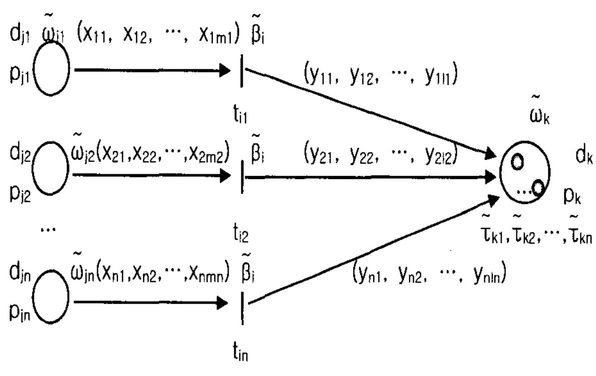


p_j의 토큰은 한개의 p_{ks}로 갈수 있고, p_{ks}에 도착한 토큰의 퍼지진리값 $\tilde{\tau}_{ks}=\tilde{\tau}_j \otimes \tilde{\beta}_i$. (s=1, 2, …, or n).

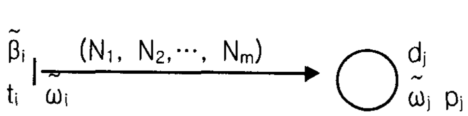
(그림 6) t_i 실행전 3의 가중 퍼지 Pr/T 네트



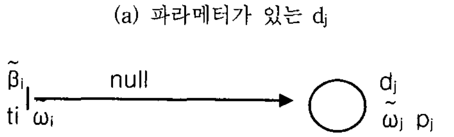
(그림 7) t_i 실행전 3의 가중 퍼지 Pr/T 네트



(그림 8) t_i 실행전 3의 가중 퍼지 Pr/T 네트

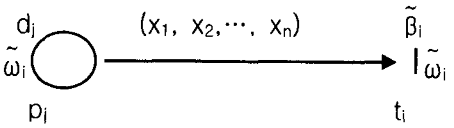


(a) 파라메터가 있는 d_j



(b) 파라메터가 없는 d_j

(그림 9) 초기사실의 가중 퍼지 Pr/T 네트



(그림 10) 질의어의 가중 퍼지 Pr/T 네트

(그림 11) 단일화가능관계의 Pr/T 네트

4. 가중 퍼지추론 알고리즘

4.1 알고리즘

가중 퍼지 추론 알고리즘은 혼절(Horn clause)추론[6, 8]과 퍼지 혼절추론[10, 12]을 기반으로 개발하였다. 단일화(unification)는 일차술어논리의 추론에 필수적이다. 단일화가능관계를 명확히 표현하기 위해 각 플레이스 p에 대한 단일화가능관계집합 U(p)가 필요하다. $\forall u(\theta) \in U(p)$, $u(\theta)=(f_{ti,p}, f_{p,tj}, \theta v)$는 mgu(most general unifier) θ를 갖는 단일화가 가능한 쌍 $(f_{ti,p}, f_{p,tj})$를 표현한다. 여기에서 $f_{ti,p}$는 t_i에서 p로 들어오는 아크에 관한 기호합이고, $f_{p,ti}$는 p에서 t_i로 나가는 아크의 기호합이다. 단일화인자(unifier)의 확신도는 $\tilde{\beta}_i$이다. 도출(resolution)을 사용하기 위해 단일화는 보수기호를 갖는 쌍(complementary signed occurrences)에서만 실행한다.

C : m 플레이스와 n 트랜지션을 갖는 WFPN의 투사행렬 ;
F_n : 확신도 행렬 ;

1. A := $C_{n\times m}$, D := F_n, F_n은 n×n 행렬.
   $\tilde{\beta}_i = f(t_i)$는 퍼지생성규칙의 확신도(i = 1, 2, …, n).

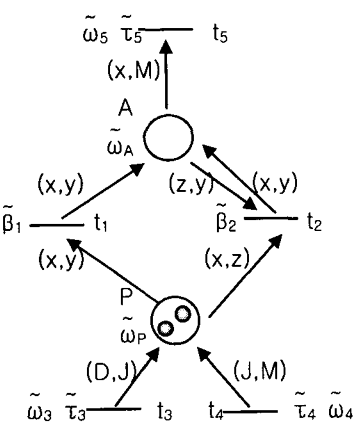
$$F_n = \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{array} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{\beta}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{\beta}_n \end{bmatrix}$$

2. Repeat for i = 1 until i = n
   만일 $\tilde{\beta}_i < \lambda$이면 [D | A]의 i번째 행에 있는 각 요소를 0으로 한다.
3. Repeat for i = 1 until i = m ;
   3.1 i번째 열을 제거한 [D | A]에서 단일화가 가능한 행의 쌍들에 대해 음이 아닌 선형조합(nonnegative linear combination)의 결과인 모든 행을 [D | A]에 추가한다. 이때 여기에 대응하는 단일화 인자와 단일화 인자의 확신도를 평가하여 각 행의 쌍에 붙인다. 만일 $\tilde{\beta}_i < \lambda$이면 추가되는 각 행의 요소를 0으로 치환한다.
   3.2 [D | A]의 A의 i번째 열이 null이 아닌 행을 [D | A]에서 제거한다.

(알고리즘)

$n \times n$ 확신도 행렬과 $n \times m$ 투사행렬로 구성된 $n \times (n+m)$행렬을 가지고 알고리즘을 실행한다. 알고리즘은 플레이스의 수인 m 단계로 구성된다. 각 단계에서 투사행렬의 한 개씩의 열이 음이 아닌 선형조합을 실행하여 제거된다.

4.2 예1([6, 10]의 예를 기반으로)



(a) WFPN 표현

$$
C = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad P \quad \end{array} \\
\begin{bmatrix}
(x, y)\tilde{\beta}_1 & -(x, y) \\
(x, y)\tilde{\beta}_2-(z, y) & -(x, z) \\
0 & (D, J)\tilde{\tau}_3 \\
0 & (J, M)\tilde{\tau}_4 \\
-(x, M) & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(b) 투사행렬 C

(그림 12) 예의 WFPN 표현과 투사행렬

P와 A는 술어 Parent와 Ancestor를 표시한다. D, J 그리고 M은 David, John 그리고 Michael을 각각 표시한다. 예에서 사용하는 생성규칙은 R_1과 R_2이다.

$R = \{R_1, R_2\}$

$R_1 : P(x, y) \rightarrow A(x, y) \qquad [\tilde{\beta}_1=(0.80,\ 0.90,\ 1.00)]$

$R_2 : P(x, z) \wedge A(z, y) \rightarrow A(x, y)\ [\tilde{\beta}_2=(0.70,\ 0.80,\ 0.90)]$

P(D, J)과 P(J, M)은 확신도가 각각 $\tilde{\tau}_3 = (0.80, 0.85, 0.90)$ $\tilde{\tau}_4 = (0.70, 0.75, 0.80)$인 사실이라고 가정한다. $\lambda = 0.2$라고 하자. 질의어는 "Who is/are the ancestor(s) of Michael?". 즉, A(x, M)이다. 여기에서 확신도는 $\tilde{\tau}_5$=(1.00, 1.00, 1.00)이다. 이 예의 WFPN표현과 투사행렬은 (그림 12)(a)와 (그림 12)(b)에 있다. 술어 P와 A의 가중값을 각각 $\tilde{\omega}_P = (0.80, 0.85, 0.90)$, $\tilde{\omega}_A$=(0.85, 0.90, 0.95)라고 가정한다.

예에 대한 단일화가 가능한 관계집합은 다음과 같다.

① U(Parent) = {u(θ_1) = ((D, J), (x, y), (D/x, J/y)$\tilde{\tau}_3$),
u(θ_2) = ((D, J), (x, z), (D/x, J/z)$\tilde{\tau}_3$),
u(θ_3) = ((J, M), (x, y), (J/x, M/y)$\tilde{\tau}_4$),
u(θ_4) = ((J, M), (x, z), (J/x, M/z)$\tilde{\tau}_4$)}

② U(Ancestor) = {u(θ_5) = ((x, y), (x, M), (M/y)$\tilde{\beta}_a$),
u(θ_6)=(((x,y),(x,M)),((x,y),(z,y)),(M/y,z/x)$\tilde{\beta}_b$)}

여기에서 $\tilde{\beta}_a$과 $\tilde{\beta}_b$는 t_1과 t_2가 실행될 때 각각 계산되는 사실의 확신도이다.

주어진 예에 알고리즘의 실행은 투사행렬을 이용하여 다음과 같이 표현할수 있다.

$$
\begin{array}{c} \\ t_1\tilde{\beta}_1 \\ t_2\tilde{\beta}_2 \\ t_3\tilde{\tau}_3 \\ t_4\tilde{\tau}_4 \\ t_5\tilde{\tau}_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} &&&&& A & P \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:cc}
\tilde{\beta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_1 & -(x,y) \\
0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & 0 & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_2-(z,y) & -(x,z) \\
0 & 0 & \tilde{\tau}_3 & 0 & 0 & 0 & (D,J)\tilde{\tau}_3 \\
0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_4 & 0 & 0 & (J,M)\tilde{\tau}_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_5 & -(x,M) & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{r} \\ t_1(J/x,M/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4+t_4\tilde{\tau}_4 \\ t_2(J/x,M/z)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4+t_4\tilde{\tau}_4 \\ t_1(D/x,J/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3+t_3\tilde{\tau}_3 \\ t_2(D/x,J/z)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_3+t_3\tilde{\tau}_3 \\ t_5\tilde{\tau}_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} &&&&& A \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c}
(J/x,M/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_4 & 0 & (J,M)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4 \\
0 & (J/x,M/z)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4 & 0 & \tilde{\tau}_4 & 0 & (J,y)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4-(M,y)\tilde{\tau}_4 \\
(D/x,J/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3 & 0 & \tilde{\tau}_3 & 0 & 0 & (D,J)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3 \\
0 & (D/x,J/z)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_3 & \tilde{\tau}_3 & 0 & 0 & (D,y)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_3-(J,y)\tilde{\tau}_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_5 & -(x,M)
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{l}
t_1(J/x,M/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4+t_4\tilde{\tau}_4+ \\
t_5(J/x)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\tau}_5 \\[3ex]
t_2(J/x,M/z)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4+t_4\tilde{\tau}_4 \\[3ex]
t_1(D/x,J/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3+t_3\tilde{\tau}_3 \\[3ex]
t_2(D/x,J/z)(M/y)[(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus \\
\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\ + \\
t_3(M/y)(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A) \\
\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\ + \\
t_1(J/x,M/y)(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A) \\
\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\ +\ t_4\tilde{\tau}_4\ + \\
t_5(D/x)[(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A) \\
\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_5
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\begin{matrix}(J/x,M/y)\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\end{matrix} & 0 & 0 & \tilde{\tau}_4 & \begin{matrix}(J/x)\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\tau}_5\end{matrix} & 0 \\[2ex]
0 & \begin{matrix}(J/x,M/z)\\ \tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4\end{matrix} & 0 & \tilde{\tau}_4 & 0 & \begin{matrix}(J,y)\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_4\\ -(M,y)\tilde{\tau}_4\end{matrix} \\[2ex]
\begin{matrix}(D/x,J/y)\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3\end{matrix} & 0 & \tilde{\tau}_3 & 0 & 0 & \begin{matrix}(D,J)\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_3\end{matrix} \\[2ex]
\begin{matrix}(J/x,M/y)\\ (\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash\\ (\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\end{matrix} &
\begin{matrix}(D/x,J/z)(M/y)\\ [(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash\\ (\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\end{matrix} &
\begin{matrix}(M/y)\\ (\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\\ \oslash\\ (\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\end{matrix} &
\tilde{\tau}_4 &
\begin{matrix}(D/x)\\ [(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash\\ (\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\\ \tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_5\end{matrix} & 0
\end{array}\right]
$$

목표 트랜지션 t_5를 포함한 다음과 같은 식을 얻는다.

$$
T_1\ =\ \begin{array}{c} t_1\\ t_2\\ t_3\\ t_4\\ t_5\end{array}
\left[\begin{array}{l}
\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\\ 0\\ 0\\ \tilde{\tau}_4\\ \tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\tau}_5
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
(J/x,M/y)(\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4=(0.56\ \ 0.68\ \ 0.80))\\ \\ \\
\tilde{\tau}_4=(0.70,\ 0.75,\ 0.80)\\
(J/x)(\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\tau}_5=(0.56\ \ 0.68\ \ 0.80))
\end{array}
$$

$$
T_2\ =\begin{array}{c} t_1\\[4ex] t_2\\[4ex] t_3\\[4ex] t_4\\[2ex] t_5\end{array}
\left[\begin{array}{l}
(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\\ \oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\\[1ex]
[(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\\ \oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\\[1ex]
(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\\ \oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)\\[1ex]
\tilde{\tau}_4\\[1ex]
[(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\\ \oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_5
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
(J/x,M/y)((\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A))\\ =(1.12\ \ 1.33\ \ 1.57)\oslash(1.65\ \ 1.75\ \ 1.85)=(0.61\ \ 0.76\ \ 0.95)\\[1ex]
(D/x,J/z)(M/y)([(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2)\\ =(0.61\ \ 0.76\ \ 0.95)\otimes(0.70,\ 0.80,\ 0.85)=(0.42\ \ 0.61\ \ 0.81)\\[1ex]
(M/y)((\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A))=(0.61\ \ 0.76\ \ 0.95)\\[1ex]
(\tilde{\tau}_4=(0.70,\ 0.75,\ 0.80))\\[1ex]
(D/x)([(\tilde{\tau}_3\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_4\otimes\tilde{\omega}_A)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_A)]\otimes\tilde{\beta}_2\otimes\tilde{\tau}_5)\\ =(0.42\ \ 0.61\ \ 0.81)
\end{array}
$$

$T_1(t_5)$와 $T_2(t_5)$에서 (J/x)(0.56 0.68 0.80)와 (D/x)(0.42 0.61 0.81)를 각각 얻는다. 질의어 A(x,M)에 대한 답은 A(J, M)(0.56 0.68 0.80)와 A(D, M)(0.42 0.61 0.81)이다. Jack과 David는 Michael의 조상일 수 있고, Jack이 보다 더 Michael의 조상인 것 같다. 이때의 확신도는(0.56 0.68 0.80)이 된다.

4.3 예2([8]의 예를 기반으로)

F는 Father, M은 Mother, P는 Parent, G는 Grandparent 그리고 Q는 Married를 표시한다.

여기에서 사용하는 생성규칙은 다음과 같다.

$R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7\}$

$R_1 : F(x, y) \rightarrow P(x, y)$ $\quad[\tilde{\beta}_1 = (0.80,\ 0.90,\ 1.00)]$

$R_2 : M(x, y) \rightarrow P(x, y)$ $\quad[\tilde{\beta}_2 = (0.80,\ 0.90,\ 1.00)]$

$R_3 : P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow G(x,y)$ $\quad[\tilde{\beta}_3 = (0.75,\ 0.85,\ 0.95)]$

$R_4 : M(x, z) \wedge F(y, z) \rightarrow Q(x,y)$ $\quad[\tilde{\beta}_4 = (0.70,\ 0.80,\ 0.90)]$

$R_5 : Q(x, z) \wedge F(z, y) \rightarrow M(x,y)$ $\quad[\tilde{\beta}_5 = (0.80,\ 0.90,\ 1.00)]$

$R_6 : Q(x, z) \wedge M(z, y) \rightarrow F(x,y)$ $\quad[\tilde{\beta}_6 = (0.80,\ 0.90,\ 1.00)]$

$R_7 : Q(y, x) \rightarrow Q(x, y)$ $\quad[\tilde{\beta}_7 = (0.90,\ 0.95,\ 1.00)]$

F(Bill, Jack), F(Jack, Larry), F(Jack, Steve)는 확신도가 각각 $\tilde{\tau}_{81} = (0.85, 0.90, 0.95)$, $\tilde{\tau}_{82} = (0.80, 0.85, 0.90)$ 그리고 $\tilde{\tau}_{83} = (0.80, 0.85, 0.90)$인 사실이라고 가정하자. 질의어는 "Who is/are the Steve's grandparent(s)?". 즉, G(x, Steve)이다.

여기에서 확신도는 $\tilde{\tau}_9 = (1.00, 1.00, 1.00)$이다. 이 예의 WFPN 표현과 투사행렬은 그림 13과 14에 있다. 술어 G, P, M, F 그리고 Q의 가중값은 각각 $\tilde{\omega}_G = (0.85, 0.90, 0.95)$, $\tilde{\omega}_P = (0.80, 0.85, 0.90)$, $\tilde{\omega}_M = (0.75, 0.80, 0.85)$, $\tilde{\omega}_F = (0.75, 0.80, 0.85)$ 그리고 $\tilde{\omega}_Q = (0.90, 0.95, 1.00)$라고 가정한다.

예에 대한 단일화가 가능한 관계집합은 다음과 같다.

① U(F) = {u(θ_1) = ((Bill, Jack), (x, y), (Bill/x, Jack/y) $\tilde{\tau}_{81}$),
u(θ_2) = ((Bill, Jack), (y, z), (Bill/y, Jack/z) $\tilde{\tau}_{82}$),
u(θ_3) = ((Bill, Jack), (z, y), (Bill/z, Jack/y) $\tilde{\tau}_{83}$),
u(θ_4) = ((Jack, Larry), (x, y), (Jack/x, Larry/y) $\tilde{\tau}_{81}$),
u(θ_5) = ((Jack, Larry), (y, z), (Jack/y, Larry/z) $\tilde{\tau}_{82}$),
u(θ_6) = ((Jack, Larry), (z, y), (Jack/z, Larry/y) $\tilde{\tau}_{83}$),
u(θ_7) = ((Jack, Steve), (x, y), (Jack/x, Steve/y) $\tilde{\tau}_{81}$),
u(θ_8) = ((Jack, Steve), (y, z), (Jack/y, Steve/z) $\tilde{\tau}_{82}$),
u(θ_9) = ((Jack, Steve), (z, y), (Jack/z, Steve/y) $\tilde{\tau}_{83}$)} ;

② U(Q) = {u(θ_{10}) = ((x, y), (x, z), (y/z) $\tilde{\beta}_a$),
u(θ_{11}) = (((x, y), (x, y)), ((y, x), (x, z)), () $\tilde{\beta}_b$)} ;

여기에서 $\tilde{\beta}_a$와 $\tilde{\beta}_b$는 각각 t_4와 t_7에서 계산되는 확신도이다.

③ U(M) = {u(θ_{12}) = ((x, y), (x, y), () $\tilde{\beta}_c$),
u(θ_{13}) = ((x, y), (x, z), (z/y) $\tilde{\beta}_c$),
u(θ_{14}) = ((x, y), (z, y), (z/x) $\tilde{\beta}_c$)} ;

여기에서 $\tilde{\beta}_c$는 t_5에서 계산되는 확신도이다.

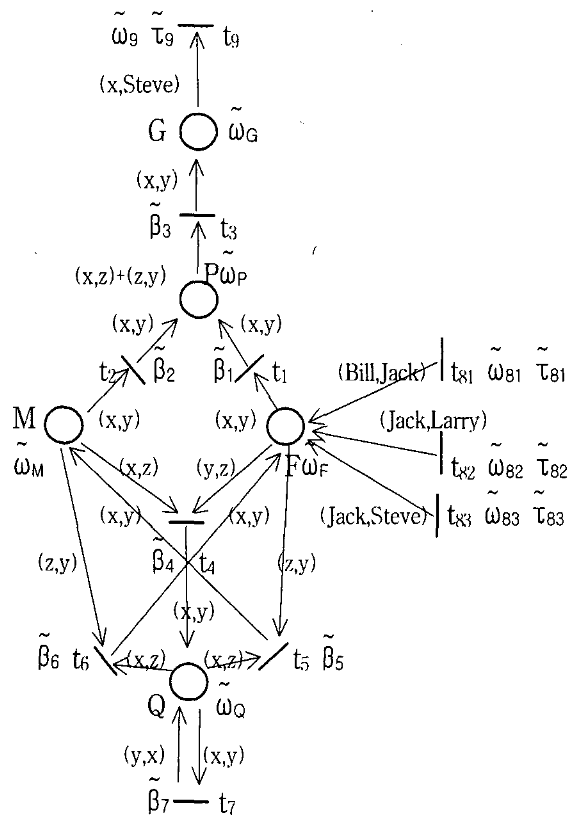
④ U(P) = {u(θ_{15}) = ((x, y), (x, z)+(z, y), ((z/y), (z/x)) $\tilde{\beta}_d$),
u(θ_{16}) = ((x, y), (x, z)+(z, y), ((z/y), (z/x)) $\tilde{\beta}_e$)} ;

여기에서 $\tilde{\beta}_d$와 $\tilde{\beta}_e$는 각각 t_1와 t_2에서 계산되는 확신도이다.

⑤ U(G) = {u(θ_{17}) = ((x, y), (x, Steve), (Steve/y) $\tilde{\beta}_f$)}.

여기에서 $\tilde{\beta}_f$는 t_3에서 계산되는 확신도이다.

주어진 예에 대한 알고리즘의 실행은 투사행렬을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.



(그림 13) WFPN 표현

$$
C = \begin{array}{c} \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_{81} \\ t_{82} \\ t_{83} \\ t_9 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad M \quad & \quad F \quad & \quad P \quad & \quad G \quad & \quad Q \quad \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & -(x, y) & (x, y) & 0 & 0 \\
-(x, y) & 0 & (x, y) & 0 & 0 \\
0 & 0 & -(x, z)-(z, y) & (x, y) & 0 \\
-(x, z) & -(y, z) & 0 & 0 & (x, y) \\
(x, y) & -(z, y) & 0 & 0 & -(x, z) \\
-(z, y) & (x, y) & 0 & 0 & -(x, z) \\
0 & 0 & 0 & 0 & (y, x)-(x, y) \\
0 & (Bill, Jack) & 0 & 0 & 0 \\
0 & (Jack, Larry) & 0 & 0 & 0 \\
0 & (Jack, Steve) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(x, Steve) & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

(그림 14) 투사행렬 C

$$
\begin{array}{c} \\ t_1\tilde{\beta}_1 \\ t_2\tilde{\beta}_2 \\ t_3\tilde{\beta}_3 \\ t_4\tilde{\beta}_4 \\ t_5\tilde{\beta}_5 \\ t_6\tilde{\beta}_6 \\ t_7\tilde{\beta}_7 \\ t_{81}\tilde{\tau}_{81} \\ t_{82}\tilde{\tau}_{82} \\ t_{83}\tilde{\tau}_{83} \\ t_9\tilde{\tau}_9 \end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccc:ccccc}
 & & & & & & & & & & & M & F & P & G & Q \\
\tilde{\beta}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,y) & (x,y)\tilde{\beta}_1 & 0 & 0 \\
0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,y) & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,z)-(z,y) & (x,y)\tilde{\beta}_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,z) & -(y,z) & 0 & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_5 & -(z,y) & 0 & 0 & -(x,z) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(z,y) & (x,y)\tilde{\beta}_6 & 0 & 0 & -(x,z) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (y,x)\tilde{\beta}_7-(x,y) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & (Bill,Jack)\tilde{\tau}_{81} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & 0 & (Jack,Larry)\tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{83} & 0 & 0 & (Jack,Steve)\tilde{\tau}_{83} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_9 & 0 & 0 & 0 & -(x,Steve) & 0
\end{array}\right]
$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{r|ccccccccccc:cccc|}
 & & & & & & & & & & & & M & P & G & Q \\
t_1(\text{Bill}/x,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1}+t_{B1}\tilde{\tau}_{B1} & (\text{Bill}/x,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 & (\text{Bill},\text{Jack})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 \\
t_1(\text{Jack}/x,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2}+t_{B2}\tilde{\tau}_{B2} & (\text{Jack}/x,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & (\text{Jack},\text{Larry})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 \\
t_1(\text{Jack}/x,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3}+t_{B3}\tilde{\tau}_{B3} & (\text{Jack}/x,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & (\text{Jack},\text{Steve})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 \\
t_4(\text{Bill}/y,\text{Jack}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B1}+t_{B1}\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & (\text{Bill}/y,\text{Jack}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & -(x,\text{Jack}) & 0 & 0 & (x,\text{Bill})\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B1} \\
t_4(\text{Jack}/y,\text{Larry}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B2}+t_{B2}\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & (\text{Jack}/y,\text{Larry}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & -(x,\text{Larry}) & 0 & 0 & (x,\text{Jack})\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B2} \\
t_4(\text{Jack}/y,\text{Steve}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B3}+t_{B3}\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & (\text{Jack}/y,\text{Steve}/z)\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B3} & 0 & -(x,\text{Steve}) & 0 & 0 & (x,\text{Jack})\tilde{\beta}_4\times\tilde{\tau}_{B3} \\
t_5(\text{Bill}/z,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B1}+t_{B1}\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 & (\text{Bill}/z,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & (x,\text{Jack})\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B1} & & & -(x,\text{Bill}) \\
t_5(\text{Jack}/z,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B2}+t_{B2}\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & 0 & (\text{Jack}/z,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & (x,\text{Larry})\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B2} & & & -(x,\text{Jack}) \\
t_5(\text{Jack}/z,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B3}+t_{B3}\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & 0 & (\text{Jack}/z,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B3} & 0 & (x,\text{Steve})\tilde{\beta}_5\times\tilde{\tau}_{B3} & & & -(x,\text{Jack}) \\
t_2\tilde{\beta}_2 & 0 & \tilde{\beta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,y) & (x,y)\tilde{\beta}_2 & 0 & 0 \\
t_3\tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,z)-(z,y) & (x,y)\tilde{\beta}_3 & 0 \\
t_6\tilde{\beta}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(z,y) & 0 & 0 & -(x,z) \\
t_7\tilde{\beta}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (y,x)\tilde{\beta}_7-(x,y) \\
t_9\tilde{\tau}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_9 & 0 & 0 & -(x,\text{Steve}) & 0
\end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{r|ccccccccccc:ccc|}
 & & & & & & & & & & & & P & G & Q \\
t_1(\text{Bill}/x,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1}+t_{B1}\tilde{\tau}_{B1} & (\text{Bill}/x,\text{Jack}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 & 0 & (\text{Bill},\text{Jack})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B1} & 0 & 0 \\
t_1(\text{Jack}/x,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2}+t_{B2}\tilde{\tau}_{B2} & (\text{Jack}/x,\text{Larry}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 & (\text{Jack},\text{Larry})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B2} & 0 & 0 \\
t_1(\text{Jack}/x,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3}+t_{B3}\tilde{\tau}_{B3} & (\text{Jack}/x,\text{Steve}/y)\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{B3} & 0 & (\text{Jack},\text{Steve})\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{B3} & 0 & 0 \\
t_3\tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,z)-(z,y) & (x,y)\tilde{\beta}_3 & 0 \\
t_7\tilde{\beta}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (x,y)\tilde{\beta}_7-(y,x) \\
t_9\tilde{\tau}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_9 & 0 & -(x,\text{Steve}) & 0
\end{array}$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{c}
t_1(Bill/x,Jack/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81}+t_{81}\tilde{\tau}_{81} \\
t_1(Jack/x,Larry/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{82}+t_{82}\tilde{\tau}_{82} \\
t_1(Jack/x,Steve/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83}+t_{83}\tilde{\tau}_{83} \\
t_3\tilde{\beta}_3 \\
t_9\tilde{\tau}_9
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccc:cc}
 & & & & & & & & & & & P & G \\
(Bill/x,Jack/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & 0 & 0 & 0 & (Bill,Jack)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81} & 0 \\
(Jack/x,Larry/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & (Jack,Larry)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{82} & 0 \\
(Jack/x,Steve/y)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{83} & 0 & (Jack,Steve)\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83} & 0 \\
0 & 0 & \tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(x,z)-(z,y) & (x,y)\tilde{\beta}_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_9 & 0 & -(x,Steve)
\end{array}\right]
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{c}
t_1(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)+t_{81}\tilde{\tau}_{81}+t_{83} \\
\tilde{\tau}_{83}+t_3(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 \\
t_1(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)+t_{81}\tilde{\tau}_{81}+t_{82}\tilde{\tau} \\
{}_{82}+t_3(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 \\
t_9\tilde{\tau}_9
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccccccccc:c}
 & & & & & & & & & & & G \\
(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\tilde{\omega}_P\dotplus+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P) & 0 & (Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & 0 & \tilde{\tau}_{83} & 0 & (Bill,Steve)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 \\
(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P) & 0 & (Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & \tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & (Bill,Larry)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_9 & -(x,Steve)
\end{array}\right]
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{c}
t_1(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P+\tilde{\omega}_P)+t_{81}\tilde{\tau}_{81} \\
+t_{83}\tilde{\tau}_{83}+t_3(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)\{((\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{91}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus \\
\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3+t_9(Bill/x)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_2\times\tilde{\tau}_9 \\
t_1(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)+t_{81}\tilde{\tau}_{82}+t_{82}\tilde{\tau}_{82}+t_3(Bill \\
/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{91}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccccccc:c}
 & & & & & & & & & & G \\
(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\tilde{\omega}_P\dotplus+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P) & 0 & (Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P+\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & 0 & \tilde{\tau}_{83} & (Bill/x)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3\times\tilde{\tau}_9 & (Bill,Steve)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3\times\tilde{\tau}_9 \\
(Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Larry/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\tau}_{81} & \tilde{\tau}_{82} & 0 & 0 & (Bill,Larry)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{82}\times\tilde{\omega}_P)\bigcirc(\tilde{\omega}_P\dotplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3
\end{array}\right]
$$

목표트랜지션 t_9를 포함한 다음과 같은 식을 얻는다.

$$T=\begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_{81} \\ t_{82} \\ t_{83} \\ t_9 \end{array}\left[\begin{array}{c} (\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81}\otimes\tilde{\omega}_P\oplus+\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83}\otimes\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_P) \\ 0 \\ [(\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81}\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83}\otimes\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_P)]\otimes\tilde{\beta}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{\tau}_{81} \\ 0 \\ \tilde{\tau}_{83} \\ [(\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{81}\otimes\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\otimes\tilde{\tau}_{83}\otimes\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_P)]\otimes\tilde{\beta}_3\otimes\tilde{\tau}_9 \end{array}\right]\begin{array}{l} \begin{array}{l} (Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\oplus+\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P) \\ =((0.80\ 0.90\ 1.00)\times(0.85\ 0.90\ 0.95)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80\ 0.90 \\ 1.00)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\times(0.80\ 0.85\ 0.90))\oslash((0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80 \\ 0.85\ 0.90))=(0.58\ 0.84\ 1.04) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} (Bill/x,Jack/y)(Jack/x,Steve/y)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3 \\ =[((0.80\ 0.90\ 1.00)\times(0.85\ 0.90\ 0.95)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80\ 0.90 \\ 1.00)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\times(0.80\ 0.85\ 0.90))\oslash((0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80 \\ 0.85\ 0.90))]\times(0.75\ 0.85\ 0.95)=(0.44\ 0.71\ 0.99) \end{array} \\ \\ \\ \\ \\ \tilde{\tau}_{81}=(0.85\ 0.90\ 0.95) \\ \\ \tilde{\tau}_{83}=(0.80\ 0.85\ 0.90) \\ \begin{array}{l} (Bill/x)[(\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{81}\times\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\beta}_1\times\tilde{\tau}_{83}\times\tilde{\omega}_P)\oslash(\tilde{\omega}_P\oplus\tilde{\omega}_P)]\times\tilde{\beta}_3\times\tilde{\tau}_9 \\ =[((0.80\ 0.90\ 1.00)\times(0.85\ 0.90\ 0.95)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80\ 0.90 \\ 1.00)\times(0.80\ 0.85\ 0.90)\times(0.80\ 0.85\ 0.90))\oslash((0.80\ 0.85\ 0.90)\oplus(0.80 \\ 0.85\ 0.90))]\times(0.75\ 0.85\ 0.95)\times(1.00\ 1.00\ 1.00)=(0.44\ 0.71\ 0.99) \end{array} \end{array}$$

$T(t_9)$에서 (Bill, x)(0.44 0.71 0.99)를 얻는다. 질의어 G(x, Steve)에 대한 답은 (Bill, Steve)(0.44 0.71 0.99)이다. Bill이 Steve의 조부모인 것 같다. 이때의 확신도는 (0.44 0.71 0.99)이 된다.

5. 결 론

기존에 퍼지 생성규칙을 술어논리 수준으로 표현하기 위한 퍼지 Pr/T 네트에서는 규칙에 나타나는 술어들이 추론과정에서 동일한 중요도를 갖는다는 가정을 하고 추론 알고리즘을 개발하였다. 본 논문에서는 퍼지 생성규칙에 나타나는 술어의 중요도를 나타내는 가중값을 표현할 수 있는 가중 퍼지 Pr/T 네트를 정의하고, 추론과정에서 술어들의 서로 다른 중요도를 표현한 가중값을 고려한 가중 퍼지 추론 알고리즘을 제안하였다. 퍼지 생성규칙의 확신도, 규칙에 나타나는 술어의 진리값과 가중값을 0과 1 사이의 실수가 아닌 퍼지 숫자로 표현하였다. 그러므로 확신도와 진리값 그리고 가중값을 실수가 아닌 퍼지 숫자로 표현하므로 퍼지 생성규칙을 더 유연하게 표현할 수 있고, 추론 알고리즘은 문제해결에 사용하는 규칙에 나타나는 술어의 중요도인 가중값을 고려하여 추론하므로 기존의 방법보다 사람의 직관과 추론에 더 가깝다.

참 고 문 헌

[1] Chen, Shyi-Ming, "Weighted Fuzzy Reasoning using Weighted Fuzzy Petri Nets," IEEE Trans. on KDE, Vol.14, No.2, pp.386-397, March/april, 2002.

[2] Chen, Shyi-Ming, "A Weighted Fuzzy Reasoning Algorithm for Medical Diagnosis," Decision Support Systems, Vol.11, No.1, pp.37-43, 1994.

[3] Chen, S., Ke, J. and Chang, J., "Knowledge Representation using Fuzzy Petri-nets," IEEE Trans. on KDE, Vol.2, No.3, pp.311-319, Sep., 1990.

[4] Giordana, A. and Saitta, L., "Modeling Production Rules by Means of Predicate Transition Network," Information Sciences, Vol.35, No.1, pp.1-41, 1985.

[5] Kaufmann, A. and Gupta, M. M., Fuzzy mathematical Models in Engineering and management Sciences, New York : Elsevier, 1988.

[6] Lin, C., et al., "Logical Inference of Horn Clauses in Petri Net Models," Knowledge and Data Engineering, 5, pp.416-425, 1993.

[7] Looney, G. C., "Fuzzy Petri Nets for Rule-based Decision Making," IEEE Trans. on SMC, Vol.18, No.1, pp.178-183, Jan./Feb., 1988.

[8] Peterka, G. and Murata, M., "Proof Procedure and Answer Extraction in Petri Net Model of Logic Programs," IEEE Trans. Software Engineering, 15, pp.209-217, 1989.

[9] Peterson, J. L., Petri Net Theory and the Modeling of Sys-

tems, Prentice-hall, 1981.

[10] Yu, Sheng-Ke, "Knowledge Representation and Reasoning Using Fuzzy Pr/T net-systems," Fuzzy Sets and Systems, 75, pp.33-45, 1995.

[11] Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets," Information and Control 8, pp. 338-353, 1965.

[12] 조상엽, "구간값 퍼지집합 추론의 퍼지 Pr/T 네트 표현," 한국정보처리논문지B, 제9-B권 제6호, pp.783-790, 2002.

조 상 엽

e-mail : sycho@mail.chungwoon.ac.kr

1986년 한남대학교 전자계산학과(학사)

1988년 중앙대학교 대학원 전자계산학과(석사)

1993년 중앙대학교 대학원 전자계산학과(박사)

1995년~현재 청운대학교 인터넷컴퓨터학과 교수

관심분야 : 인공지능, 퍼지이론, 페트리네트 응용