KJHM Vol. 16, No. 4, 2003, 53-58

순수수학의 본질에 대한 고찰

동신대학교 컴퓨터학과 **이건창**

Abstract

The aim of this paper is to outline a nature of pure mathematics up to the point at which its main theses can be clearly grasped and compared with other philosophical positions. Also, We analyze the contents and discuss the nature of questions which lie in pure mathematics.

0. 서론

이슬람 세계에서 번역된 최초의 저작이었던 그리스인 유클리드의 원론에 의해 사용된 공리적 방법은 오늘날 순수수학이라고 부르는 것의 원형이다. 순수한 사고란 한 명제가 참이라는 것을 증명하는 데 어떤 실제적인 실험도 하지 않고 오직 논증에 의한 추론만으로 검토하는 것을 말한다.

그러나 놀랍게도 순수수학이 때때로 그의 창조자에 의해 결코 꿈꾸어 보지도 못했던 응용을 갖게 된다는 것을 알 수 있다.

순수논리학자들은 순수수학을 논리(logic)라고 말한다. 형식주의자들은 미적분학에서의 숫자의 조작이라고 말한다. 그리고 직관주의자들은 일시적인 직관의 매개체에 있어서의 구성이라고 말한다. 또한 논리적 실용주의자들은 논리의 진술보다는 쉽게 포기하고 경험주의적 진술보다는 덜 쉽게 포기하는 진술이라고 말한다. 그리고 중간적인 입장도 존재한다.

부울(Boole)과 프레게(Frege)이래로 수리논리의 발전은 수학의 본질에 관한 철학적 논쟁들이 계속되는 것을 거의 다르게 하지 못했다. 그 의문이 한 개의 단순한 답변을 받아들이는 것이 아니고 그러한 것을 제시함으로써 우리를 잘못 인도하는 것인지도 모른다. 힐베르트와 베르네는 수학의 근본에 대한 의문을 두 가지로 보여 주었다.

첫 번째, 순수하게 지각이 있는 인식의 특정한 종류는 수학의 출발점으로 여겨져야 한다는 것과 진정 우리는 논리조차도 어느 정도 지각이 있는 인식에 의지하지 않는 추리와 판단

의 이론으로써 발전시킬 수 없다는 것이다.

두 번째, 우리는 구조적인 산술은 질량적인 수학에는 충분하지는 않지만 우리는 그러한 목적으로 수학적 대상의 전체에 속하는 특정한 한정된 개념들, 예를 들어 숫자의 전체성과 숫자의 집합의 전체성과 같은 개념을 더해야만 한다는 것을 본다.

본 연구에서는 순수수학의 본질을 분석하기 위하여 순수수학들의 유형과 활동을 중심으로 살펴보기로 한다.

1. 순수수학의 본질

수학은 자연을 연구하는 데 인간의 가장 으뜸가는 탁월한 창조물이었다. 순수수학의 이론은 자연에 관하여 무엇인가 알게 해주었고, 다양하게 보이는 많은 현상들을 포괄적으로 이해하고 설명할 수 있게 해 주었다. 순수수학의 이론은 인간이 자연에서 찾아낸 모든 질서와 계획을 나타내 주었으며, 광범위한 영역을 지배하거나 부분적으로 지배할 수 있도록 해 주었다.

이 장의 목적은 많은 수학자들이 순수수학의 문제를 다루게 만든 요인들과 과학에 대한 견해와 구분을 요약적으로 지적해 내는 것이다. 순수수학과 과학의 방대한 발전과 확장 때문에 그 두 분야에서도 편히 지내기가 훨씬 어려워졌다. 이제, 왜 순수수학에 집착을 하는지 순수수학자들이 취하는 네 가지 유형의 활동에 대하여 알아보기로 한다.

첫 번째는 많은 수학자들이 순수수학의 문제를 다루는 요인은 추상화(abstraction)이다. 완전히 해결되는 과학의 문제들은 매우 드물다. 더욱더 근사한 해는 찾을 수 있지만, 최종적인 해를 구할 수 없는 경우가 있다.

예를 들어 태양, 지구, 달과 같이 각각이 다른 두 개를 인력으로 끌어당기는 세 물체의 운동과 같은 근본적인 문제도 아직 해결되지 않았다. 베이컨(Bacon)이 말했듯이 자연의 오묘함은 인간의 지력보다 훨씬 위대하다. 한편 순수수학은 완전한 해답을 얻을 수 있는 뚜렷하고 한계가 분명한 문제를 허용한다. 영원히 계속될 듯이 심오하고 복잡한 문제와는 반대되는 뚜렷한 문제의 매력도 있다.

추상수학에 많은 시간과 노력을 소비한다 하더라도, 필연적으로 그 성공적인 실행에 필요한 분위기와 마음가짐에 영향을 받을 것이다. 응용의 필요에 대해 공부할 시간과 그 응용을 다루는데 필요한 도구를 형성하는 시간이 부족할지도 모른다. 응용수학자는 현재 추상수학자들이 무엇을 하고 있는가? 또 무엇을 성취하였는가를 유용하게 살필 수 있지만, 너무 깊은 관심을 가지는 것은 자원을 해롭게 전환하는 것이다.

두 번째는 순수수학의 문제를 다루는 또 다른 요인은 전문화(specialization)이다. 대학과 같은 연구기관으로부터 수학자에게 부과되는 연구발표의 압력을 들 수 있다. 응용문제는 수

학뿐만 아니라 다른 과학의 광범위한 지식을 요구하고, 또 미해결 문제는 더욱 어렵기 때문에 자기 자신이 문제를 만들어서 자기가 할 수 있는 것을 해결하는 것이 더욱 쉽다. 교수는 손쉽게 해결되는 순수수학의 문제를 선택할 뿐만 아니라, 그러한 문제를 박사과정 학생에게 연구하도록 하여서 박사논문을 빨리 쓸 수 있도록 하기도 한다. 또한 교수들은 학생이 당면하는 어려움을 극복하도록 좀더 쉽게 도와줄 수도 있다. 현대의 순수수학이 취하는 연구 방향의 약간의 예들이 순수와 응용의 주제의 차이를 확실히 해 줄 것이다. 물리학으로의 응용을 염두에 두고 해밀턴(Hamilton)이 4원수를 도입한 이후에, 많은 대수(algebra)가 존재할 수 있음을 깨달은 수학자들은 모든 가능한 대수의 응용가능성을 조사하기 시작했다. 오늘날, 추상대수학의 분양에서 이러한 연구 경향을 많이 볼 수 있다.

세 번째는, 순수수학의 또 다른 방향은 일반화(generalization)이다. 단지 연구논문을 쓸 수 있기 때문에 행해진 일반화와 추상화는 대개 응용의 가치가 없다. 실제로 이런 논문 중 대부분은, 더 구체적이고 특별한 용어로 이미 존재해오던 사실을 좀더 일반적이거나 추상적인 용어로 재구성하는 것이다. 이러한 재구성은 수학을 응용하려는 사람에게는 어떤 힘이나 통찰을 주지 못한다. 대부분이 인위적이고, 물리적 개념과는 연관이 없으나 단지 새로운 생각을 제시하려는 취지의 전문 용어의 확산은, 확실히 수학을 사용하는데 장애가 될 뿐 아무런 기여도 하지 못한다. 그것은 새로운 언어이지 새로운 수학이 아니다. 이와 같이 추상화, 일반화, 전문화는 순수수학자들이 취하는 세 가지 유형의 활동이다.

네 번째는, 공리화(axiomatization)이다. 그것이 기초적인 문제를 해결하는 마지막 단어임이 증명되지는 않았더라도, 19세 기말의 공리화운동이 수학의 기초를 세우는 데 도움이 되었음은 의문의 여지가 없다. 그러나 수학의 공리화는 많은 수학자들을 괴롭혔다. 수학의 공리화는 많은 당연한 사실을 직관적으로 받아들이는 데 대한 반작용이었다.

예를 들어 해석학에서 모순과 불분명한 점을 제거했다는 것은 사실이다. 그러나 역시 명확한 정의(definition), 공리(axiom), 또 너무나 당연해서 전에는 직관에 의한 것이라는 사실조차 인식하지 못했던 사실의 증명(proof)까지 고집했다. 그 결과로 얻은 연역적인 구조는 실제로 복합하고 대규모적인 것이었다. 따라서 자연수의 공리를 근거로 하여 유리수, 또 특히 무리수를 전개하는 것은 자세하고 복잡했다. 이러한 모든 것이 몇 몇 수학자, 특히 크로네커(Kronecker)에게는 고도로 인위적이고 불필요하다는 느낌을 주었다. 크로네커는 사람들의 직관이 건전하다고 확인해 주는 것을 논리적인 수단으로 더 건전하게 할 수는 없다고 느끼는 특별한 집단의 첫 번째 인물이었다.

모든 추상화, 일반화, 전문화된 문제 그리고 공리화가 순수수학을 특징짓는 것은 아니다. 이미 기초적인 연구의 가치와 더불어 이런 연구 활동의 일부 가치를 지적한 바 있다. 우리는 일의 동기를 살펴보아야 할 것이다.

순수수학의 특징은 즉각적이든 잠재적이든 그 응용의 부적절함에 있다. 어떤 순수수학자들은 어떠한 수학적인 발전에서도 잠재적 응용성이 있으며, 아무도 미래의 실제적인 응용성

은 미리 알 수 없다고 주장한다. 그럼에도 불구하고, 수학적 주제는 마치 석유가 나오는 대지의 일부와 같다. 지표면의 검은 진흙은 어떤 특정한 곳의 석유탐사를 암시하기도 하며, 결국 석유가 발견된다면 그 지역의 가치는 인정된다. 그 지역의 이미 증명된 가치로 말미암아, 원래 석유가 발견된 지점으로부터 멀지 않은 곳에서 석유가 더 발견되리라는 기대로 또 다른 시추를 하게 된다. 물론, 멀리 떨어져 있기는 하지만 시추가 용이한 곳을 선택하여 역시 석유가 발견될 것이라고 주장할 수도 있다.

순수수학을 추구하는 자유가 응용수학으로의 새로운 접근을 강화하고 그에 기여할 것이라는 스토운의 주장을 약화시키는 듯이 보이는 그 밖의 많은 논의가 있다. 순수수학의 추구는, 그것이 어느 정도 세련되었는지 또는 그것을 추구하는 사람이 어느 정도 유명하든지 간에, 실용적 상황에 대한 수학적 추론의 위력을 감소시키는 것이 틀림없다.

응용수학과 관련하여 대충 말하자면 순수수학의 응용은 주어진 목적을 달성하기 위하여 서로 교환하는 지각 있고 순수하게 정확한 진술로 구성된다고 주장할 것이다. 현대에 수학의 응용은 전혀 새로운 문제, 전에는 엄두도 내지 못했던 계산능력이 요구된다. 수학의 세부분야 사이의 경계선이 점차로 희미해지고 있다. 학문적으로 어린 사람들은 이러한 경계선을 넘나들 능력이 없고, 그래서 넘나드는 것을 두려워할 것이다.

컴퓨터를 가장 중요한 부분으로 하는 현대문명은 그야말로 산업혁명시대로 돌입하고 있다. 컴퓨터 개발의 성장도는 글이나 말로는 다 표현하지 못할 정도로 급속도로 발전, 응용되고 있다. 철학자의 견해에 의하면, 증명의 본질적인 부분으로서 컴퓨터의 사용은 수학적 증명의 표준에 대한 약화를 의미한다. 이것은 회의주의의 근거를 끌어들이고 어떠한 단계에서도 회의주의의 근거가 없는 명백한 결론을 유도하기로 되어 있던 상황을 근본적인 방법으로 변화시킨다. 철학자에게 기계의 신뢰도에 의존하는 증명과 인간의 이성에 의존하는 증명 사이에는 엄청난 차이가 있다. 만약 증명이 매우 길고 복잡하다면, 그것의 정확함에 대한 의심의 여지는 항상 존재한다.

이와 같이 어떤 정리가 컴퓨터의 도움으로 증명되었을 때, 전통적인 판정법을 만족시키거나 증명에 대한 설명을 제시할 수 없다. 또한 현대의 모든 컴퓨터는 소프트웨어와 하드웨어의 결함을 가질 수 있고, 드물지만 프로그램의 잘못으로 인한 계산 착오를 일으킬 수 있다. 또한 그 문제에 대한 의혹과 오류가능성의 여지가 남아 있다.

순수수학의 지지자들은 그들의 업적의 가치에 대하여 다른 주장, 즉 내재적인 아름다움이나 지적 도전이라든가 등을 할 수도 있고, 또 그렇게 하고 있다. 그러한 가치가 있다는 것은 부인할 수 없다. 그러나 순수수학의 막대한 수확을 정당화하는 것은 실제로 도전 받을 가능성이 있다. 이러한 문제에 어떤 판단을 하던 간에, 이러한 가치는 자연의 탐구라는 수학의 중요성에 공헌하지 않았다. 아름다움과 지적 도전은 수학을 위한 수학이다. 의심할 여지없이, 이러한 내재적 가치의 전가는 수학의 고립에 관한 현재의 논의가 허용한 것 이상의 인식을 정당화한다.

순수수학자들은 순수수학의 기초들을 완전하게 하려는 거의 본능에 가까운 의지와 용기를 가지고 있고 그들의 노력도 역시 계속될 것이다.

2. 결론

본 연구에서는 순수수학의 본질을 분석하기 위하여 순수수학자들의 유형과 활동을 중심으로 살펴보았다. 우리가 알고 있듯이 순수수학은 그 구성과 구조의 방법이었고 사실 그 본질인 것이다.

순수수학과 관련하여 모든 존재하는 수리이론의 개념과 진술은 용어의 엄밀한 의미에서 순수하게 정확하고, 지각과는 연결되어 있지 않으며, 수리이론이 존재하는 진술을 포함하는 한 경험주의적 진술이나 신학적 진술의 존재적인 의미와는 달리 고유하지 않다는 것을 주장할 것을 제안한다.

순수수학의 연구 역시, 그것이 창조적인 작업을 시도하는 것인 이상, 그 분야에 관한 지난날의 학습정보를 정리함으로써 새로운 분야의 전개가능성을 기대할 수가 있다. 응용수학의 문제는 물리적 현상으로 이루어져 있고, 그에 관련된 수학자들은 그것을 풀어야 하는 반면에, 순수수학자들은 그들 자신의 문제를 만들어 낼 수 있다. 후자는 어두운 길 어딘가에서 열쇠를 잃은 경우에 가로등 밑이 더욱 밝기 때문에 그곳으로 열쇠를 찾는 사람과 흡사하다고 말할 수 있다.

이와 같이 순수수학자와 응용수학자 사이의 논쟁은 계속되고 있으며, 수학은 현실에 의해 더렵혀져서는 결코 안 된다고 생각하는 은둔자들은 모욕의 고립 속에서 궁지에 빠져 있음을 한탄할 수밖에 없을 것이다.

사실, 활동하고 있는 수천의 순수수학자들이 새로운 수학의 창조를 계속 추구할 때 유용한 수학을 포함하는 기대하지 않았던 발전에서 새로운 이론의 유용한 결과가 나타날 수 있다.

참고 문헌

1. Russel, Bertrand, *Introduction to Mathematical Philosophy*, Macmillan, New York, 1924.
2. Wedberg, Anders, *Plato's Philosophy of mathematics*, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1955.
3. Beth, E.W., *Mathematical Thought: An Introduction to the Philosophy of Mathematics*,

Gordon & Breach Science Publisher, New York, 1965.
4. Stephan, K., *The Philosophy of Mathematics*, Harper & Row, New York, 1962.
5. Maziarz, E.A., *The Philosophy of Mathematics*, Philosophical Library, New York, 1950.
6. Korner, S., *The Philosophy of mathematics*, Hutchinson University Library, London, 1960.
7. Barker, S.F., *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1964.
8. Weyl, Hermann, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton, 1949.