KJHM Vol. 16, No. 4, 2003, 33-44

힐베르트의 '수학 문제'에 관하여

한경혜

Abstract

This article shows Hilbert's Paris address within the context of his career and the mathematics of his day. And the text of Hilbert's speech will be considered in some detail, particularly those parts of it that reflects his vision of mathematics most clearly. At the end it is attempted to show the limitations of the standard view of Hilbert as an advocate of a formalist approach to mathematics.

0. 힐베르트와 20세기가 풀어야 할 "수학 문제"

힐베르트(David Hilbert, 1862~1943)는 20세기 초반의 가장 영향력 있는 수학자 중 한 사람이자 수학의 전 분야에 두루 발자취를 남긴 최후의 보편주의자(universalist)이기도 하다. 대수학, 수론, 기하학, 해석학 그리고 공리주의적 방법론에 이르기까지 여러 분야의 수학이 발전하는 데 힐베르트가 기여한 바는 실로 크다고 하지 않을 수 없다. 더욱이 그로부터 직접적인 영향을 받은 일군의 수학자가 20세기 전체를 관통하는 수학적 연구의 주요한 흐름을 결정짓도록 한 '현대적'(modernist)인 관점을 발전시킨 점은 대단히 중요하다고 할 수 있다.[1] 그렇지만 힐베르트 자신은 고전적인 19세기 수학에 토대를 두고 자신만의 독특한 방식을 개발한 '중도적 현대론자'로서, 추상적이고도 공리적인 방법의 대표적 주자인 '급진적 현대론자' 페아노(Giuseppe Peano, 1858~1939)나 하우스도르프(Felix Hausdorff, 1868~1942)와는 여러 가지 면에서 차이를 드러낸다. 힐베르트는 수학을 진리의 초월적 영역으로 간주하였으며, 순수한 사유와 경험적 지식 사이의 상호작용에 의하여 변증법적으로 발전하는 단일한 유기체로 보았다. 따라서 주요한 수학적 성과는 이들 둘 사이의 상호작용에 의한 것이라는 점을 강조하였다.

수학에 대해 힐베르트가 지닌 이러한 관점은 그가 남긴 수학적 업적에도 반영이 된다. 그

1) 수학의 기초에 관한 논쟁을 둘러싸고 기존의 해석과는 다르게 '현대적 관점'을 기준으로 그 역사적 전개 과정을 정리한 저서로 Mehrtens(1990)를 참조할 수 있다.

는 결코 근본적으로 새로운 것을 발견하지는 않았으며, 대신에 다른 수학자들이 이미 달성해 놓은 것으로부터 영감을 얻었다. 그렇지만 그의 통찰력은 가히 새로운 이론의 창시를 능가할 정도로 뛰어나서 19세기와 20세기의 수학을 연결짓는 다리의 구실을 한다는 평가도 받고 있다.[2)]

힐베르트는 1900년 8월 8일 파리에서 열린 제2회 국제 수학자대회에서 20세기가 해결해야 할 스물세 문제를 제시한 유명한 연설 "수학 문제"(Mathematische Probleme)[3)]를 행할 무렵에 이미 독일 수학계의 지도적인 위치를 넘어서는 주요한 영향력을 행사할 정도가 되어 있었다.[4)]

역사적 관점에서 힐베르트의 파리 연설은 19세기에서 20세기로 넘어가는 과정에서 일어난 커다란 변화를 반영하기도 한다. 이런 맥락에서 힐베르트가 제기한 스물세 문제는 여러 가지 질문을 던진다고 할 수 있다. 우선 힐베르트의 연설은 그 자신의 연구 계획 및 수학적 관심과 어떤 관련이 있는가 하는 점, 둘째로 그가 수학 전반에 대하여 가지는 전망과 미래에 가장 중요하다고 여기는 이슈를 어떤 방식으로 반영했는가 하는 점, 그리고 이른바 힐베르트학파와 국제적인 수학자 그룹이 수행하는 연구에 어떠한 자극을 주었는가라는 질문을 던지게 한다.

끝으로 지난 세기 동안 과연 어떠한 문제들이 중요하게 다뤄지고 해결이 되었는지, 여전히 숙제로 남은 문제는 무엇인지 또는 그와 관련하여 새롭게 제기되는 문제들은 없는지 하는 점을 묻게 한다.

본고에서는 이러한 질문 전체에 대하여 답을 완벽하게 던지지는 않지만 위에서 제기되는 질문을 염두에 두고, 힐베르트의 수학적 경력과 그 시대의 수학 연구의 동향 및 그의 수학적 관점이 서게 되는 배경에서 출발하여 그가 제기한 스물 세 개의 질문의 내용 및 그 해결의 역사적 과정을 약술하는 것과 아울러 힐베르트가 형식주의적 관점의 주창자라는 일반적 견해가 가지는 한계를 밝히고자 한다.

1. 힐베르트의 지적 뿌리

2) cf. Blumenthal

3) 20세기를 맞이하여 힐베르트가 미해결인 수학 문제를 제시한 영향으로 새천년이 시작되는 21세기를 맞이하여 미해결 문제(Millennium Problems) 일곱 개를 CMI(Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts)에서 제시하였다. 각각 백만불의 상금이 걸린 문제를 출제하기 위하여 분야별 전문 수학자가 초빙되었으며, 이 역시 파리(Collège de France)에서 2000년 5월 24일 공표되었다.

4) 이에 걸맞은 주제를 택하기 위해 그는 친구인 민코프스키(Hermann Minkowski, 1864~1909)의 조언을 구하였다. 이에 민코프스키는 "미래에 관한 조망, 즉 미래의 수학자들이 풀어야 할 문제를 제시하는 것이야말로 가장 매력적인 시도일 것이다. 후에 자네의 연설을 수십년간 두고두고 논하게 될 수도 있을 것이다. 물론 예언은 어려운 일이기는 하지만 말이다."(H. Minkowski가 D. Hilbert에게; 1900, 1, 5; Minkowski 1973, 119-120)라고 답하였다.

힐베르트는 동프러시아의 쾨니히스베르크(Königsberg)에서 태어나고 어린 시절의 대부분을 보냈다. 힐베르트는 당시에 독일이 세계의 수학을 주도하는데 큰 기여를 한 알베르투스(Albertus) 대학에 입학하여 수학하였다. 물리학자 노이만(Franz Neumann, 1798~1895)과 해석학자 야코비(Carl Gustav Jakobi, 1804~1851) 등이 이끌었던 이른바 쾨니히스베르크학파는 힐베르트가 대학에 입학하던 1880년경에 이미 독일 전역의 거의 모든 대학에 영향력을 행사하고 있었다.

힐베르트가 처음으로 자신의 수학적 재능을 드러낸 것은 베버(Heinrich Weber, 1842~1913)를 통해서였다. 1875년부터 이 대학에서 강의를 시작한 베버를 만난 것은 힐베르트가 데데킨트와 함께 "일변수의 대수함수에 관한 이론"(Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen)이라는 제하의 논문을 완성한 직후였다. 이 논문은 대수함수이론에서 리만(Bernhard Riemann, 1826~1866)의 주요 정리를 순전히 대수적으로 증명하는 데 필요한 도구를 제공해 주는 내용을 담고 있다. 여기서 취하는 접근 방법에 따르면 대수적 수체와 리만곡면상의 유리형 함수(meromorphic function)의 구조에 깔려 있는 유사성을 명확하게 발견할 수 있다. 힐베르트가 후에 수론 분야에서 연구한 내용도 주로 이런 유형의 유사성에 주목한 것이었다.

이 무렵에 힐베르트는 기나긴 수학적 여정에서 결정적인 역할을 한 교우관계를 맺게 되는데 그 대상은 바로 후르비츠(Adolf Hurwitz, 1859~1919)와 민코프스키였다. 힐베르트는 그들을 통해서 '수학을 이야기하는' 기술, 즉 수학 이론을 특징짓는 핵심적인 생각과 문제를 논하는 방법을 터득한다. 특히 후르비츠는 당대 수학 연구의 메카를 이루었던 괴팅겐과 베를린에서 수학했던 경험을 토대로 힐베르트로 하여금 새로운 수학적 조망을 할 수 있도록 도움을 주었다.

1885년에 박사 과정을 마친 힐베르트는 후르비츠의 스승이었던 클라인(Felix Klein, 1849~1925)을 만나게 되는데 일찌감치 그의 능력을 알아본 클라인의 권유로 힐베르트는 다시 파리로 짧은 유학을 떠나게 된다. 거기서 힐베르트는 푸앵카레(Henri Poincaré, 1854~1912)를 포함한 일군의 해석학 연구자들로 이루어진 학파의 수장격인 에르미트(Charles Hermites, 1822~1901)를 만나 영향을 받기도 한다.

그 후 힐베르트는 다시 쾨니히스베르크로 돌아와 교수 자격 취득용 논문을 제출하고 강사생활을 시작한다. 그는 수강하는 학생수가 많고 적음에 전혀 개의치 않고 수학의 전 분야-불변이론, 수론, 해석기하. 사영기하. 미분기하, 갈루아(Galois)이론, 미분방정식 등-에 걸쳐 정열적인 강의를 한 것으로 유명하다. 한번도 같은 주제로 강의를 개설한 적이 없을 정도로 왕성한 연구 활동을 바탕으로 철저하게 강의 준비를 했다고 한다. 1895년에 괴팅겐 대학으로 자리를 옮길 무렵에는 수학의 어떤 분야를 선택하더라도 깊이 있는 연구를 할 수 있을 정도로 전 영역에 걸친 배경 지식을 갖추게 되었다.

힐베르트가 처음으로 천착한 분야는 클렙쉬(Clebsch)학파의 주요 대상이었던 불변이론이

었다. 이 분야에서 주도적인 위치를 차지하던 수학자는 고르단(Paul Gordan, 1837~1912)이었는데, 힐베르트는 순식간에 극적인 방식으로 그 지위를 점하게 된다. 그는 1886년에서 1893년 사이에 주제를 완전히 달리하여 가장 어렵게 여겨져 왔던 문제를 우아하게 해결하고 (힐베르트의 기본정리), 이후 현대대수학의 발전과정에서 모델로 삼게 되는 여러 결과를 유도해 낸다.

힐베르트가 1893년에 쓴 논문에서 채택한 기본 원리는 산술적 방법을 대수학에 적용하는 것이었다. 이는 크로네커(Leopold Kronecker, 1823~1891)가 처음 사용한 것으로 후에 데데킨트(Richard Dedekind, 1831~1916), 베버가 차용하기도 하였다. 이들은 유리수에 관한 대수적 이론에 사용된 개념이 단일변수에 관한 유리함수와 대수함수 이론에 곧바로 적용될 수 있음을 알아내었던 것이다. 새로운 이론 구조를 세우기 위해 이러한 접근방법을 취하면서 힐베르트는 다섯 가지 기본 원리를 정리하였는데 이를 가지고 수학의 전 영역에 걸친 자신의 업적을 유형화할 수 있게 된다. 이러한 내용의 논문을 수학연보(*Die Mathematische Annalen*)에 기고하는 것과 동시에 힐베르트는 자신의 학문적 동지인 민코프스키에게 다음과 같은 편지를 보낸다.

"이제 나는 불변이론의 영역을 완전히 떠나며, 수론으로 방향을 선회할 것이다."[5)]

실제로 그는 이후로 불변이론에 관해서는 전혀 손을 대지 않았다. 힐베르트가 불변이론과 관련하여 마지막으로 쓴 논문이 본질적으로 대수적 수의 체에 관한 이론에서 사용되는 개념을 적용하는 내용이었으므로 정수론으로 옮겨가는 과정은 그다지 부자연스럽지 않았다. 독일 수학자 협회(Deutsche Mathematiker-Vereinigung)가 주관하는 프로젝트의 일환으로 연구를 수행한 힐베르트는 1897년에 역작 "대수적 체에 관한 이론"(Die Theorie der algebraischen Zahlkörper)을 발표한다.

이 논문에서 힐베르트는 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777~1855), 쿰머(Ernst Eduard Kummer, 1810~1893), 크로네커, 데데킨트 등 이전에 수학자들이 쌓아놓은 이 분야의 연구 결과를 명확하게 체계를 갖추도록 정리해 놓았다. 그와 함께 갈루아체에 관해서도 체계적인 이론을 전개시켰다. 힐베르트가 이룬 수론 분야의 연구가 절정에 달한 것은 1898~99년에 두 편의 논문 "아벨의 상대적 수체에 관한 이론"(Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper), "이차 수체에 관한 이론"(Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers)를 발표했을 무렵이었다.

이로써 1899년경에 이르러 힐베르트는 두 개의 서로 떨어진 영역-불변이론과 대수적 수체이론-분야에서 상당한 권위를 인정받을 정도가 되었으므로 그가 다시 연구의 방향을 180도 선회하리라고는 아무도 생각지 못하였다.

1898~99년 겨울 학기에 "유클리드 기하의 기초" 강의를 개설한다는 공고가 붙자 다들 의

5) Blumenthal, p. 395.

아해 하였다. 힐베르트가 수년간 기하학의 기초에 천착해 왔다는 것을 아는 이가 없었기 때문이었다. 이 강의는 이전까지 누구도 시도해 보지 않았던 방식으로 유클리드 기하학의 기저에 놓여있는 기본 구조를 조명하려 했다는 점에서 더욱 놀라운 것이었다. 이 강의의 내용을 손질하여 1899년 6월에 가우스 · 베버의 흉상 제막 행사의 일환으로 "기하학의 기초"(Grundlagen der Geometrie)라는 제목으로 발표하고 곧이어 논문으로 내게 된다. 힐베르트의 이 연구 노문은 칸트의 순수이성비판에서 발췌한 다음의 모토로 시작된다.

"모든 인간의 인식은 직관에서 시작하여 개념(Begriffe)을 넘어 사상(Ideen)으로 끝을 맺는다."[6)]

이 문구는 인간이 순수하고도 확실한 수학적 지식을 획득하는 과정에 관한 발생적 특징을 묘사한 것으로 힐베르트의 관점을 드러내는 것이기도 하다. 기하학에서 궁극적인 개념은 공리의 형태로 제시가 되는데 힐베르트는 공리를 다섯 개의 그룹으로 나누었다. 이렇게 나누는 것은 형식적 이론 자체에서는 그다지 중요하지 않을지라도 원시적 직관에 뿌리를 둔 비형식적인 요소를 명확하게 하는 개념적인 지표 역할을 한다. 이렇게 해서 결합(Verknüpfung)공리군, 순서(Anordnung)공리군, 합동공리군, 평행공리군, 연속(Stetigkeit)공리군 등 다섯 부류의 공리가 만들어진다.

힐베르트는 이들 공리군의 타당성을 검증함으로써 얻어지는 여러 가지 기하학을 연구하는 것을 과제로 삼았다. 이 연구의 결과로서 산술적 구조를 기하학에 투영시키는 이른바 '선분계산(Streckenrechnung)'을 활용함으로써 사영기하학의 기본 명제에 속하는 파스칼(Blaise Pascal, 1623~1662)과 데자르그(Girard Desargues, 1591~1661)의 정리를 증명해 보이기도 하였다. 동시에 유클리드 기하학이 실수의 성질을 다룬 산술적 체계와 대등하다는 것을 보였다. 그는 이 성질을 네 그룹(결합, 계산, 순서, 연속)의 정리로 나누었는데 이것이 후에 완전순서체라 불리게 되는 성질이다. 이런 방식으로 이론을 전개하고자 했던 이유는 간단명료하다. 유클리드 기하학을 산술화함으로써 이 분야 역시 해석학 등 수학의 다른 가지와 똑같은 논리적 뿌리를 가지고 있음을 보이고자 했던 것이다. 이러한 접근방식에 따르면 유클리드기하학뿐만이 아니라 그의 공리 일부를 만족하는 다른 모든 비유클리드 기하학에도 정당성을 부여하게 된다. 힐베르트의 연구 결과는 기하학에 대한 오래되고도 강고한 편견, 즉 기하학은 결코 완벽하게 엄격해질 수 없으며, 그림이나 상상을 돕는 다른 보조 수단은 수학에서 제거되어야 한다는 생각은 근거가 없다는 것을 보여준 셈이다.

2. '수학 문제'와 이론의 형성

힐베르트의 파리 연설은 새롭게 시작되는 20세기에 차세대 수학자들이 훌륭한 결실을 맺

6) Hilbert, 1899(p. 1)에서 재인용.

기를 바라며 제시한 스물세 개의 문제로 유명하지만, 그와 더불어 수학 문제의 본성 자체에 대해 언급한 내용 역시 많은 점을 시사한다. 그는 중요한 수학적 문제란 단지 도전해 볼만한 까다로운 문제 이상이어야 함을 강조했다. 힐베르트에 따르면 '수학 문제'란 수학적 지식의 전체적 구조에 통합될 수 있는 어느 한 부분이어야 한다는 것이다. 나아가 수학적 이론의 형성에 기여할 수 있어야 함을 주장하였다.

연설 모두에서 힐베르트는 수학의 발전에서 '중요한 문제'가 담당하는 결정적인 역할을 강조한다. 무엇보다도 이미 풀린 문제보다 풀어야 할 문제가 많이 제공되는 분야에 대해 수학자들이 매력을 느끼고 관심을 가진다는 것이다. 그는 또한 심오한 수학문제가 공통적으로 보이는 특성이 적어도 하나 있다고 보았는데, 그것은 바로 문제의 '단순 명료함'이었다. 진정으로 중요한 문제는 "길거리에서 처음으로 만난 사람에게 설명할 수 있을 정도로" 단순하고도 명료해야 한다는 것이다.7)

힐베르트는 그 이전에 많은 수학자들의 관심을 끌었을 뿐만 아니라 수학의 발전에 큰 영향을 끼친 예로서 베르누이(Jakob Bernoulli, 1654~1705)의 '현수선 문제'나 푸앵카레의 '3체 문제'(3-Body Problem)와 같이 경험적인 원천에서 비롯한 유형과 페르마(Pierre de Fermat, 1601~1665)의 마지막 정리처럼 순수하게 인간의 사고과정에서 비롯하는 유형을 들었다. 푸앵카레가 1897년 취리히(Zürich)에서 열린 학회에서 전자 유형의 문제가 맡는 역할을 강조한 반면, 힐베르트는 후자 유형의 문제로부터 현대 수론이나 함수론 등의 더욱 세련된 이론이 정립되어 나갔음을 주장하였다.

그렇다고 응용수학을 도외시하고 순수수학의 분야에만 연구를 국한할 것을 강조한 것은 아니고, 오히려 이 두 분야의 수학이 서로를 추동하는 내적인 역동성을 가지고 있음을 역설하였다. 그는 수학 문제를 정적인 의미보다는 동적인 의미로 이해하였다. 즉 시간이 흐르고 수학이 발전함에 따라 문제가 의미하는 바가 달라질 수 있는 것으로 보았던 것이다.

힐베르트가 취사선택한 문제 중에서 다수는 명확하게 정식화되었다기보다는 추측을 위주로 하거나 여러 경우의 해석의 여지가 있는 열린 문제라 할 수 있다. 이처럼 다소 애매하게 표현되어 있는 문제를 철저히 분석해서 수학의 발전과정에서 맥락이 닿게끔 할 때, 때로 새로운 이론의 창출이라는 결과를 낳기도 한다고 그는 보았다. 예컨대 코시(Augustin Louis Cauchy, 1789~1857)는 적분에 관한 통찰을 바탕으로 복소수의 적분에 관한 우아한 이론을 만들어냈으며, 쿠머(Ernst Eduard Kummer, 1810~1893)는 소인수분해의 유일성의 원리를 더욱 넓은 수체에 적용시키기 위하여 확대할 수 있는지 여부를 살피다가 새로운 형태의 ideal number에 관한 발견을 하게 되었음을 주목하였던 것이다. 그리고 새로운 이론의 창출은 이미 확립된 이론에서 제기된 중심문제를 해결하려는 지난한 과정에서 비롯되기도 한다는 점을 강조하였다.

한편 엄밀성이야말로 수학적 문제가 수학자가 문제를 해결하기 위해서 암중모색하는 과정에서 빛을 밝혀주는 것으로 단순성의 또 다른 면임을 주장하였다.

7) Hilbert 1935, p. 291.

"엄밀성의 추구는 더욱 단순한 결론을 찾아내도록 우리를 이끌어준다; 아울러 덜 엄밀한 이전의 낡은 방법보다 훨씬 유용한 방법으로 이끄는 길을 열어준다"8)

엄밀성의 추구는 방법론적인 의미에서뿐만 아니라 수학의 기초에 관해서도 하나의 중요한 관점을 형성한다. 이 시기에 유럽의 수학을 선도하는 학자들 사이에서는 수학의 기초에 관한 현격한 입장 차이가 존재했다.

그 차이는 실수 연속체의 지위에 관해서 주로 드러났다. 19세기 초반에 코시와 바이어슈트라스(Karl Weierstrass, 1815~1897)가 해석학의 기초를 다지는 데서 중요한 흐름을 형성하는 한편 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918)와 데데킨트는 무한집합론의 기초를 놓는 데 주력하였다. 1900년경에 이르러서 칸토어의 집합론 좀 더 정확히 말하자면 점집합에 관한 이론은 독일과 프랑스에서 광범하게 수용되었다. 그렇지만 푸앵카레를 비롯하여 많은 영향력있는 수학자들은 초한순서수나 농도에 관해서는 유보적인 입장을 취하였다. 나아가 크로네커는 해석학의 기초에 관한 어떠한 접근도 거부하였다. 크로네커는 모든 수학 이론은 자연수에서 출발하는 알고리즘을 거쳐 건설되어야 함을 주장하였는데, 다음의 문구는 그의 입장을 단적으로 드러낸 것으로 유명하다.

"신은 정수를 만들었으며, 다른 모든 것은 인간이 한 일이다."9)

이러한 크로네커의 입장은 후에 브로우베르(L.E.J Brouwer, 1881~1966) 등이 주창했던 직관주의적 원리와 일맥상통하는 점이 있다. 직관주의적 관점에 따르면 산술적 원리에 따라 유도할 수 없으면 어떠한 수학도 성립할 수 없게 된다. 사실 크로네커는 힐베르트의 불변이론이 이러한 기준에 합당하지 않으므로 언젠가 역사의 쓰레기통에 버려질 것이라는 극언을 서슴지 않았다. 힐베르트는 이러한 크로네커의 입장에 철저하게 반대하는 낙관주의자였다. 그는 수학 전체를 뜻하는 바대로 엄밀한 기초 위에 세울 수 있다고 믿었다. 그래서 1904년에 열린 국제회의에서 크로네커의 견해에 '도그마주의'라는 딱지를 붙이기도 했던 것이다.

그렇지만 일반적인 추측과는 달리 힐베르트는 크로네커 · 베버 정리와 같은 베를린수학자들의 수론에 깊은 영향을 받았다. 뿐만 아니라 형식주의자의 대표주자로 널리 알려진 힐베르트는 많은 사람들이 짐작하는 것처럼 직관적인 접근을 불허하지 않고 오히려 직관적인 사고가 수학적 개념의 형성에 도움이 됨을 강조하기도 하였다. 한편 힐베르트는 잘 구성된 수학 문제는 반드시 해결되게 되어 있다는 낙관적인 견해를 파리 연설에서 다음과 같은 문구를 통하여 피력하기도 하였다.

---

8) Hilbert 1935, p. 294.

9) 이 말은 크로네커가 공식적인 출판물에 게재한 것은 아니었다. 여기서는 Kurt-R. Biermann, "Kronecker" Dictionary of Scientific Biography(New York: Scribners, 1970~1980), vol. 7, 505-509에 수록되어 잇는 것을 Katz, 1998(p. 676)에서 재인용.

"문제가 있으므로 풀이를 찾아라. 순수한 사고만으로 해결할 수 있을 것이다. 왜냐하면 수학에서 모른다는 건 있을 수 없기 때문이다"[10]

1922년에 '수학의 새로운 건설'(Neubegründung der Mathematik)이라는 강의를 시작으로 힐베르트는 1930년대 들어서까지 형식주의 수학을 완성시키기 위한 일련의 프로그램을 진행시킨다. 그러나 1933년 나치가 정권을 잡은 이후 괴팅겐 대학의 수학 연구소를 없애면서 독일 수학에서 힐베르트의 시대는 사실상 막을 내리게 된다.[11]

한편 힐베르트가 지닌 수학에 대한 관점 중 주요하게 들 수 있는 두 번째 내용으로는 수학이 조화를 이룬 하나의 전체로서 구성된다는 것이다. 그는 젊은 시절에 거둔 여러 가지 빛나는 연구 성과로 인해 제기된 수학 문제는 언젠가 해결이 되며 그 해법은 반드시 복잡한 수학 이론을 단순하게 하는데 기여할 것이라 생각했다. 그리하여 마침내 모든 수학은 일군의 기본적인 원리로부터 생성될 수 있으리라는 믿음을 가지게 되었다.

3. 연구 계획으로서의 힐베르트 문제[12]

힐베르트가 파리 연설에서 제시한 문제들은 한편으로는 그 자신이 그 때까지 쌓아온 연구 결과를 반영하고, 다른 한편으로는 괴팅겐 대학의 제자들과 공동으로 착수한 연구 계획과도 깊은 관련이 있다. 힐베르트의 문제는 일반적인 틀에 따라 다음과 같이 8가지 범주로 구분할 수 있다.

1) 해석학의 기초(문제 1, 2)
2) 기하학의 기초(3, 4, 5, 18)
3) 수리물리학(6)
4) 수론(7~12)
5) 대수학(13, 14, 17)
6) 대수적 기하학(15, 16)
7) 변분법(19, 20, 23)
8) 복소해석학(21, 22)

힐베르트가 제시한 문제는 일견 그 자신의 견해와 오히려 충돌하는 것 같지만 그가 각 문

10) Hilbert 1935, 298.
11) cf. Schappacher 1987.
12) 힐베르트의 스물세 문제가 어느 정도 해결이 되었는지에 대해서는 Yandell(2002)과 Alexandrov (1979)를 참조할 수 있다.

제 군마다 덧붙인 해설을 보면 수학에 대해 가지고 있는 총체적인 관점과 잘 들어맞는다는 것을 알 수 있다.

문제 1부터 6까지의 첫 번째 군은 수학기초론의 여러 가지 측면을 반영한다. 1번 문제와 2번 문제는 연속체의 속성에 관한 내용이다. 1번 문제는 실수 연속체의 구조에 관한 것으로 가산집합의 농도와 연속체의 농도 사이에 초한수가 존재하는지, 수치적 연속체는 정렬집합이라고 할 수 있는지 즉 실수 전체 집합의 모든 부분집합이 첫 번째 원소를 갖도록 다른 방법으로 열거할 수 있는지를 묻는 문제이다. 2번 문제는 산술 공리의 무모순성-산술의 공리에 바탕을 둔 유한개의 논리 연산이 결코 모순된 결과를 가져오지 않는다-의 증명 여부를 묻는 내용이다.

3번 문제는 고체기하학에서 합동과 연속공리 사이의 관계에 관한 내용으로 합동인 사면체로 분해할 수 없는 두 개의 사면체를 제시하는 문제이다.[13] 4번 문제는 삼각부등식은 만족시키지만 유클리드의 합동공리는 만족시키지 않는 기하학의 특성에 관한 것으로, 결합공리와 순서공리는 유지하고 합동공리는 약화하면서 평행선 공리와 동치인 공리가 생략된, 말하자면 유클리드 공리와 가장 가까운 공리를 가지는 기하학을 제시하라는 문제이다.[14] 5번 문제는 연속변환군을 정의하는 함수에 대한 미분가능성의 가정을 피할 수 있는지를 묻는 내용으로 1950년대까지 위상수학자들을 사로잡은 문제이다.[15] 6번 문제는 기하학과 물리학의 상호 작용에 관한 내용으로 물리학의 공리화에 관한 문제라 할 수 있다. 이 문제의 해설에서 19세기 복소해석학의 거장 바이어슈트라스(Weierstrass)를 인용하면서 힐베르트는 수학의 튼튼한 기초를 마련하는 것이 얼마나 중요한지를 설파하였다. 그리고 이는 개별 영역에서 전문성을 획득한 "건축가"[16]들이 맡아서 할 수 있는 일로 보았다.

수학의 기초에 관한 문제를 제시한 후에 힐베르트는 정수론의 영역에서 흥미를 끌어왔던 두 가지 문제를 제시한 후에 세 가지 특수한 문제를 연달아 내놓았다.

7번 문제는 α가 대수적 수(0, 1이 아닌)이고, β가 대수적인 무리수일 때 α^{β}이 초월수인지 또는 무리수인지를 묻는 문제로 이등변삼각형의 꼭지각과 밑각의 비가 대수적인 무리수일 때 밑변과 다른 한 변의 비는 초월수인지를 묻는 기하학적 형태로 먼저 표현하여 제시하였다.[17] 8번 문제는 이른바 "리만 가설"로 제타함수를 0으로 만드는 해 중 음의 정수를 제외한 영점은 모두 실수 부분의 1/2이 됨을 밝힐 것을 요구하는 문제이다.[18]

정수론에서 대수 또는 함수론의 영역으로 옮겨감을 밝히고 나서 열두 번째 문제를 제시하

13) 1902년에 Max Dehn이 부정적인 답을 하고 1903년에 W.F. Kagan이 증명하였다.
14) Georg Hamel(1877~1954)이 해결하였다.
15) 1952년에 Andrew Gleason, Deane Montgomery, Leo Zippin이 해결하였다.
16) 개별적 영역의 수학의 목적을 인지하고 세세한 이론에까지 능통한 수학자를 일컫는다. cf. Hilbert, 1935, p.308
17) 1934년에 Aleksander Osopovich Gelfond(1906~1968)이 옳음을 증명하여 "겔퐁드의 정리"라 칭하기도 한다.
18) 이는 아직까지도 증명이 되지 않은 문제로 Millenium Problems로 다시 제시되기도 하였다. cf. 각주 3)

였다. 12번 문제는 크로네커의 이론을 아벨체에서 유리수에 관한 임의의 대수적 영역으로 확장하는 문제이다.

13번 문제에서 18번 문제까지는 대수적 기하학을 포함하여 대수 영역의 문제이다. 특히 15번 슈베르트(Hermann Schwert)의 계수기하학의 기초를 묻는 문제는 맨 앞부분의 기초를 닦는 여섯 문제와 유사한 성격의 문제라 하겠다. 정부호 형식(definite form)을 제곱의 합으로 나타내는 문제인 17번 문제는 실대수 곡선과 곡면의 위상수학을 건설하는 내용의 16번 문제와 함께 실대수 구조(real algebraic structure)와 밀접한 관련이 있다. 이 그룹의 마지막인 18번 문제는 합동인 다면체로 공간을 완전히 채우는 문제로서 n차의 유클리드 공간에서 일어날 수 있는 변환군의 유형과 관련이 있는 내용이다.

이제 마지막 군으로 힐베르트는 해석학의 여러 가지 주제를 다루었다. 특히 그는 수론, 미분방정식, 기하학, 수리물리학에서 해석적 함수가 차지하는 역할을 강조하였다. 19번과 20번 문제는 어떤 중요한 유형의 편미분방정식-변분문제, 경계문제-의 해가 반드시 해석적이어야 하는지를 다루고 있다. 오늘날 통상 리만·힐베르트(Riemann-Hilbert) 문제라 일컫는 21번 문제는 주어진 일가성 군(monodromy group)이 있는 미분방정식을 푸는 문제이다. 22번 문제는 자기동형 함수(automorphic functions)를 통해서 해석적 관계에 푸앵카레의 유일화(uniformization)를 확장, 적용시킬 수 있는지를 다룬다. 마지막으로 힐베르트는 변분법의 방법을 확대하는 문제를 하나의 정리를 증명하는 개요를 보여줌으로써 이 분야의 발전이 다가올 미래에 가장 유망함을 드러내었다.

힐베르트가 제시한 스물세 개의 문제는 전체로서 완벽한 조화를 이루고 있지는 않다. 어떤 문제는 굉장히 명쾌하게 제시되는가 하면 몇몇 문제는 아주 모호하게 제시되어 있다. 또한 몇몇 문제는 새로운 이론의 생성, 좁게는 새로운 연구 계획의 수립이라는 관점에서도 별로 특이하지 않은 내용이 담겨 있기도 하다. 이처럼 균일하지 않은 문제들을 크게 두 유형으로 나누어 본다면 일반적인 성격의 문제와 수학 문제에 관하여 전통적인 관점을 확인시켜 주는 문제로 구분할 수 있다.

4. 힐베르트의 문제를 둘러싼 역사적 과정과 예언으로서의 한계

힐베르트가 파리에서 행한 연설은 그처럼 수학의 전 분야에 능통한 수학자만이 제시할 수 있었던 내용이라고 할 수 있다. 힐베르트가 연설을 행한 1900년경에는 이미 순수수학의 네 갈래-수론, 대수학, 기하학, 해석학-중에서 어느 한 분야에 국한하여 전문성을 갖추어 나가는 게 불가피한 추세였다. 이 무렵까지도 수학의 전 분야에 걸쳐 실제로 의미 있는 중요한 결과를 남긴 수학자로는 힐베르트와 푸앵카레(Poincaré) 둘 정도를 꼽을 수 있다. 그렇다고 힐베르트가 수학의 전부를 다 꿰고 있었던 것은 물론 아니다.

힐베르트가 제시한 문제 중에서 그 자신이 예상하고 연구 과정에 참여한 것과는 다르게

포함된 단적인 경우가 처음의 두 문제이다. 이 두 문제는 후에 집합론과 수리논리학의 발전에 결정적인 영향을 끼치게 된다. 힐베르트는 애당초 이를 실수연속체의 산술화와 직접 관련이 있으면서도 상대적으로 다루기 쉬운 추측으로 여겼다고 볼 수 있다. 칸토어(Cantor)와 마찬가지로 힐베르트는 이 문제에 대한 해답을 통해 무한을 이해하기 위해 제기되는 의문을 푸는 열쇠를 얻게 되리라 보았다. 칸토어 자신이 이른바 이 '연속체가설'을 입증하기 위해 오랫동안 천착하였으며, 힐베르트의 연설에 자극을 받은 베른슈타인(Felix Bernstein, 1878~1956), 하우스도르프(Felix Hausdorff, 1868~1942) 등이 이 문제를 해결하기 위하여 매달렸다. 힐베르트 자신은 1925년에 증명의 개요를 밝히기도 하였으나 곧 잘못되었음을 깨달았다. 이와 관련하여 최초로 획기적인 결과를 내놓은 것은 괴델(Kurt Gödel)로서 1938년에 이른바 일반화된 연속체가설이 집합론의 체르멜로·프랜켈(Zermelo-Faenkel) 공리체계를 근거로 성립함을 보였다. 괴델은 체르멜로·프랜켈 공리체계와 독립적으로 이 가설이 성립할 것이라고 추측하긴 했으나 실제로 이를 밝힌 것은 코헨(Paul Cohen, 1934~)이었다. 그는 1963년에 모델이론에서 새로이 개발한 방법을 사용하여 입증하였다.

1번 문제가 1920년대까지 힐베르트 자신이 관심을 가지던 연구 영역과 상대적으로 거리가 있었다면 2번 문제는 그 자신이 직접 연구했던 분야인 기하학의 기초와 관련해서 제기한 문제이다. 1899년에 힐베르트는 기하학의 기초(*Grundlagen der Geometrie*)에서 실수체계의 산술적, 위상적 공리계와 나란히 일관성을 가지는 유클리드기하학의 공리계를 세웠다. 이로써 실수체계의 공리계가 유효하다면 기하학의 공리계 역시 성립함을 보인 것이다. 이 문제도 힐베르트 자신이 애초에 예상했던 것보다 훨씬 난해했다. 1931년에 괴델이 '불완전성 정리'(Unvollständigkeitssätze)를 공표함으로써 힐베르트의 제자들이 추구해 왔던 형식주의의 계획에 근본적인 한계가 있음을 보였다. 이 결정적 타격에도 불구하고 산술공리계의 일관성을 입증하려는 노력은 계속되었으며 1936년 힐베르트의 조교인 겐첸(Gerhard Gentzen, 1909~1945)은 힐베르트가 원래 요구하였던 엄밀한 규칙을 약간 완화하여 증명을 하는 데 성공하였다.

힐베르트가 제시한 문제 중 개별적인 방식으로 풀린 문제는 열여섯 개이다. 이들은 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 21, 22 번으로 원래 제기했던 문제의 관점에 충실하게 해결이 되었다고 볼 수 있다. 네 개의 문제-12, 13, 20, 23번 문제-는 다소 모호하게 일종의 연구 계획처럼 서술이 되어 있다. 그렇지만 그 핵심적인 내용은 시대의 변화, 수학의 발전에 따라 새로운 언어로 씌어져 새로운 연구대상에 반영되어 왔다고 할 수 있다. 세 개-6, 8 16번-의 문제는 아직까지 풀리지 않고 있다.

힐베르트가 파리에서 23문제를 제시한 이래 그 풀이를 둘러싸고 아주 다양하고 복잡한 수학적 발전이 이루어져 왔다는 것을 알 수 있다. 많은 경우에 새로운 개념과 얽히기도 하고 수학자들의 관점에 영향을 미치는 새로운 이론을 창출하는 결과를 빚기도 했다. 새로운 관점에서 힐베르트의 문제를 바라보면 원래의 문제가 의도했던 것과는 전혀 다른 맥락에서 해석되고 그 풀이가 시도되기도 했다. 오랜 시간이 지나고 나서야 그간의 수학적 발달을 토대로 새로이 문제를 풀이하려는 노력이 기울여지는 경우도 여럿 있었다. 이는 힐베르트의 문

제와 관련하여 축적적인 방식으로 수학적 발달이 이루어지는 게 아니라 새로운 맥락에 맞게 변형되고 다시 해석하여 새로운 지식이 생성되는 변증법적인 과정을 거치면서 발전해 왔다는 것을 말한다. 이 모든 발전 과정에는 힐베르트 자신이 1900년에 제시하면서 염두에 두었던 '문제' 자체가 지닌 역동성이 마찬가지로 드러난다고 보인다.

참고 문헌

1. Alexandrov, P.S. ed., *Die Hilbertsche Probleme*, German ed., Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, vol. 252, Leibzig, 1979.
2. Blumenthal, O., "Lebensgeschichte," in D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, Berlin, 1935, pp. 388-429
3. Boyer, C., *A History of Mathematics*, New York, 1968.
4. Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1899; 10th ed. 1968.
5. Hilbert, D. "Über den Zahlbegriff," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8(1900), 180-184
6. Hilbert, D, "Mathematische Probleme," *Archiv für Mathematik und Physik* 1(1901), 44-63 and 213-237; reprinted in *Gesammelte Abhandlungen* vol. 3, pp. 290-329.
7. Hilbert, D., "Über das Unendliche," *Mathematische Annalen* 95(1926), 161-190.
8. Katz, Vioctor J., *A History of Mathematics: an Introduction*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1998.
9. Lakatos, I., *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, 1976.
10. Mehrtens, H., *Moderne-Sprache-Mathematik: eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt am Main, 1990.
11. Minkowski, H., *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert*, Berlin, 1973.
12. Peckhaus, V., "Hilbertprogramm und Kritische Philosophie," in *The History of Modern Mathematics*, vol. 3, ed. Knobloch, E. and Rowe, D., Boston, 1994, pp. 91-112.
13. Schappacher, N., "Das Mathematische Institut der Universität Göttingen, 1929-1950," in Becker, H., Dahms, H.-J., Wegeler, C., eds., *Die Univertsität Göttingen unter dem Nationalsozialismus*, Munich, 1987, pp. 345-373.
14. Yandell, Benjamin H., *The Honors Class; Hilbert's Problems and Their Solvers*, A K Peters, Natick, Massachusetts, 2002.