

Nonlinearities and Forecasting in the Economic Time Series¹⁾

Woo Rhee Lee²⁾

Abstract

It is widely recognized that economic time series involved not only the linearities but also the non-linearities. In this paper, when the economic time series data have the nonlinear characteristics we propose the forecasts method using combinations of both forecasts from linear and nonlinear models. In empirical study, we compare the forecasting performance of 4 exchange rates models(AR , GARCH , AR+GARCH , Bilinear model) and combination of these forecasts for dairly Won/Dollar exchange rates returns. The combination method is selected by the estimated individual forecast errors using Monte Carlo simulations. And this study shows that the combined forecasts using unrestricted least squares method is performed substantially better than any other combined forecasts or individual forecasts.

Keywords : nonlinearity, BDS, combined forecasts, non-nested tests, simulation study

1. 서론

경제시계열에 대한 전통적인 분석방법은 Box & Jenkins(1970)의 ARIMA 모형에 의한 시계열 분석이다. 그러나 최근에는 경제시계열의 비선형성에 대한 검정 및 비선형 모형화에 많은 관심과 연구들이 이루어 지고 있다. 환률의 분석을 위해 비선형 모형을 추정한 연구로는 Hsieh (1989), Gencay (1999), Clements & Smith (1999), Brooks (2001), Wu & Chang (2002) 등이 있고, 특히 Clements & Smith (1999)는 환률의 분석을 위해 비선형 모형을 사용한 연구논문들을 조사했다. 이들의 연구에서 사용된 비선형 모형은 GARCH 및 변형된 GARCH 모형, TAR(threshold autoregressive) 모형 등이다.

또한 주가지수의 분석을 위해 비선형 모형을 추정한 연구들로는 Hsieh (1991), Scheinkman and LeBaron (1989), Goetzmann (1993), Sarantis (2001), Verhoeven et al. (2002) 등이 있다.

이들 중에 Scheinkman and LeBaron (1989)은 CRSP(Center for Research in Security Prices)의 가치가중지수(value weighted indices)의 주별 수익률의 분석에서 카오스적인 비선형성이 존재함을 보였으며, 따라서 카오스 모형의 적용을 통하여 결정론적으로 미래의 주식 수익률을 예측하는 것이 가능함을 보여 주고 있다고 주장했다. 그러나 Hsieh (1991)는 CRSP의 주식 수익률

1) This Research was supported by the Research Fund of Kyonggi University in 2003.

2) Professor, Devison of Economics, Kyonggi University, Suwonsi, Kyonggi-Do, 442-760, Korea.
Email:wrlee@kyonggi.ac.kr

의 분석을 통하여 수익률에 대한 독립적으로 동일분포를 따른다는 가설이 기각됨을 보였으나, 이와 같은 가설의 기각 원인은 ARCH류의 비선형성에 있음을 보였다. 또한, Goetzmann (1993)은 NYSE 종합주가지수에서 비선형성의 증거를 확인 했으나, 이 비선형성이 확률적 특성을 갖는지 혹은 결정적 특성을 갖는지를 분간하지 않았다. Sarantis (2001)는 비선형 모형으로 STAR (smooth transition autoregressive) 모형을, Verhoeven et al. (2002)은 GJR-GARCH 모형을 사용하여 분석했다. 이와 같은 연구들을 종합해보면 경제시계열은 비선형성을 갖고 있지만 일관된 비선형 특성을 나타내지는 않는 것으로 해석할 수 있다.

이 연구에서는 비선형 특성을 갖는 경제시계열을 예측하고자 하는 경우에, 먼저 선형 및 비선형 모형으로 예측을 하고, 다시 이들 예측값들을 결합하여 예측하는 결합예측방법을 제안하고자 한다. 이를 위해 먼저 비선형 검정방법과 결합예측방법을 간략히 기술하고 또한 결합예측을 하는 경우에 개별예측오차들의 추정된 분산-공분산 행렬을 사용한 사전 시뮬레이션 분석을 통하여 상대적으로 더 우월한 결합방법을 결정하는 방법을 제안하고자 한다. 또한 대미환률자료를 사용한 실증적 분석을 통하여 이러한 방법의 우월성을 보이고자 한다.

2. 비선형성 검정

2.1 회귀모형을 이용한 검정

Ramsey (1969), Keenan (1985), 그리고 Tsay (1986)는 회귀모형을 이용해서 설명변수로서 비선형향이 선형항보다 더 예측력이 높은가를 조사하는 검정방법을 제안했다. 이 검정방법들은 비선형 이동평균모형과 곱선형(Bilinear) 모형에 대해서는 높은 검정력을 보이지만 ARCH 모형에 대해서는 검정력이 낮은 것으로 나타나 있다.

관측자료 X_t 에 AR(p) 모형을 적합시켜서 추정된 값을 \hat{X}_t 라고, $\hat{X}_t = X_t + e_t$ 라고 나타낸다. Ramsay의 RESET(regression error specification test)는 다음과 같은 회귀모형에서 정의되는 통계량 TR^2 에 의하여 검정할 수 있다.

$$e_t = \sum_{i=1}^p \psi_i X_{t-i} + \sum_{j=2}^k \delta_j \hat{X}_t^j + v_t \tag{2.1}$$

이 때, 검정통계량 TR^2 는 귀무가설 $H_0: \delta_j = 0, j=2, 3, \dots, k$ 에서 $\chi^2_{(k-1)}$ 분포에 근사한다. 여기서 R^2 는 회귀모형의 결정계수를 나타낸다. 또, RESET 검정에서 k=2인 경우에는 비선형성에 대한 Keenan (1985)의 검정과 동일하게 된다.

Tsay 검정은 e_t 와 $p(p+1)$ 개의 교적항 $X_{t-i}X_{t-j} (i \geq j, i=1, 2, \dots, p)$ 들과의 상관관계에서부터 기초된다. 즉, 다음과 같은 회귀모형에서 정의되는 통계량 TR^2 에 의하여 검정할 수 있다.

$$e_t = \sum_{i=1}^p \psi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=i}^p \delta_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + v_t \tag{2.2}$$

이 때 검정통계량 TR^2 는 귀무가설 $H_0: \delta_{ij}=0$ 에서 $\chi^2_{p(p+1)/2}$ 분포에 근사한다. 이 검정은 여러 형태의 비선형 모형에 대하여 RESET 검정보다 높은 검정력을 가진다.

2.2 ARCH & Bilinearity 검정

Engle (1982)은 오차 u_t 가 ARCH(p) 과정을 따르는 조건부 분산을 갖는다는 가설에 대하여 상수 조건부분산을 갖는다는 귀무가설의 검정을 위한 방안을 제안했다. 즉, 식 3.2의 오차항의 조건부이분산 모형에서 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 0$ 를 전제했을 때의 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ 에 대한 검정을 LM(Lagranger Multiplier)의 원리에 기초한 다음과 같은 통계량을 제안했다.

즉, e_t^2 를 $e_{t-1}^2, e_{t-2}^2, \dots, e_{t-p}^2$ 에 회귀했을 때의 결정계수를 R^2 으로 나타낼 때 검정통계량은 TR^2 가 되고 이 때 이 통계량은 자유도가 p인 χ^2 -분포를 따르게 된다.

또한 식 3.11의 곱선형(bilinear:BL) 모형에서 차수가 p, q 인 ARMA 모형에 대하여 곱선형 모형을 검정하기 위한 LM 통계량은 e_t 를 $x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-q}$ 와 $x_{t-i}u_{t-j}$, ($i=1, 2, \dots, R, j=1, 2, \dots, S$)에 회귀시켰을 때 구해지는 TR^2 가 되고, 이 통계량은 자유도가 $R \cdot S$ 인 χ^2 -분포를 따르게 된다. 그러나 Weiss (1986)는 만약 ϵ_t 가 ARCH 특성을 갖는다면 이 검정은 검정력이 매우 낮음을 보였다.

또한, Bera and Higgins (1997)는 귀무가설이 백색잡음과정일 때, ARCH 과정과 곱선형 과정을 결합한 대립가설에 대한 다음과 같은 검정방법을 제안했다. 다음과 같은 인위적 선형모형 (artificial linear model)을 고려한다.

$$y_t = x'_t + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_t (e_t^2 - \hat{\sigma}^2) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \beta_{ij} e_{t-i} e_{t-j} + v_t \quad (2.3)$$

여기서 e_t 는 모형 $y_t = x'_t + u_t$ 의 최소제곱추정량이고, $\hat{\sigma}^2 = \sum e_t^2 / T$ 이다. 이 때 ARCH 과정과 곱선형과정의 동시검정은 모형 (2.3)에서 결합가설 $H_A: \alpha = 0$ 와 $H_B: \beta = 0$ 를 검정함으로써 달성할 수 있다. 이들은 표준 LM검정을 이용하는 방법과 모형 (2.3)에서 2번째 항과 3번째 항은 근사적으로 직교한다는 사실을 이용한 다음과 같은 F-검정을 제안했다.

$$\frac{a}{2} \cdot F_1 + d \cdot F_2 \longrightarrow X^2_{q+d}$$

여기서 $d = r \cdot s - m(m-1)/2$, $m = \min(r, s)$ 이고, F_1 은 $H_A: \alpha = 0$ 에 대한 F-통계량이고, F_2 는 $H_B: \beta = 0$ 에 대한 F-통계량이다.

2.3 McLeod-Li 검정

McLeod-Li 검정은 정상 가우시안 시계열인 $\{u_t\}$ 는 모든 k에 대하여 다음이 성립한다는 사실

에 즉, $Corr(u_i^2, u_{i-k}^2) = Corr(u_i, u_{i-k})^2$ 에 기초된다. 즉, 두 상관계수의 불일치는 바로 비선형성을 나타내게 된다. 이 때 McLeod-Li (1983)가 제안한 검정통계량은 다음과 같이 u_i 의 제곱계열에 대한 최초 q 개의 자기상관의 함수가 된다.

$$MCLq = N(N+2) \sum_{j=1}^q \rho^2(j) / (N-j),$$

여기서 $\rho(j)$ 는 u_i^2 의 j -번째 자기상관계수이다. q 를 선택하는 뚜렷한 기준은 없으나 q 의 값에 별로 민감하지 않은 것으로 알려져 있다. 이 때 u_i 가 유한 4차적분을 갖고, 또한 독립적으로 동일 분포(IID)를 따른다는 귀무가설하에 MCLq는 자유도가 q 인 카이제곱 분포를 따른다. 따라서 MCLq의 점근적 기대값은 q 이고, 점근적 분산은 $2q$ 가 된다.

2.4 BDS 검정

Brock, Dechert, and Scheinkman (1987)에 의하여 제안된 BDS 통계량에 의한 검정방법은 관측된 계열들이 독립적으로 동일분포를 따른다(independently and identically distributed : iid)는 가설을 검정하는 절차이다. 독립적으로 동일 분포를 따르는 계열을 $\{x_t, t=1, \dots, T\}$ 라고 하고 m -차원 벡터를 $x_t^m = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t+m-1})$ 와 같이 나타내면 상관적분은 다음과 같다.

$$C_m(r, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \sum_{K_s} I_r(x_t^m, x_s^m) \tag{2.4}$$

여기서 $T_m = T - m + 1$ 이고, BDS 검정은 상관적분에 기초된 다음과 같은 통계량을 사용한다.

$$W_m(r, T) = \sqrt{T} [C - m(r, T) - C_1(r, T)^m] / \sigma_m(r, T) \tag{2.5}$$

여기서, $\sigma_m^2(r) = 4[K^m + 2 \sum_{j=0}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2m-2}]$

또, $C=C(r) = \int [F(z+r) - F(z-r)] dF(z)$, $K=K(r) = \int \int [F(z+r) - F(z-r)] d^2 F(z)$

그런데 $C_1(r, T)$ 는 $C(r)$ 의 일치추정량이고, 다음과 같은 $K(r, T)$ 는 $K(r)$ 의 일치추정량이 된다.

$$K(r, T) = \frac{6}{T_m(T_m - 1)(T_m - 2)} \sum_{K_s \neq t} I_r(x_t, x_s) I_r(x_s, x_t)$$

따라서 $\sigma_m(r)$ 의 일치추정량은 $C(r)$, $K(r)$ 대신에 $C_1(r, T)$, $K(r, T)$ 를 대입한 $\sigma_m(r, T)$ 로 구할 수 있다. 이 때, 귀무가설하에서 식 (3)와 같이 정의되는 BDS통계량은 표준정규극한분포를 따르게 된다. Brock, Dechert, and Scheinkman (1987)는 시뮬레이션을 통하여 이와 같은 BDS 검

정이 비선형 확률적 과정뿐만아니라 비선형 결정적 시스템에 대해서도 검정력을 가짐을 보였다. 그런데, BDS 통계량은 독립적으로 동일분포를 따르는 시스템인 귀무가설을 검정한다. 따라서 이 귀무가설의 기각은 동일분포를 따르지 않거나 자료에 어떠한 형태의 종속성이 있다는 것을 의미하며, 이 때 종속성은 선형 확률시스템, 비선형 확률시스템, 혹은 비선형 결정적 시스템에 기인할 수 있다. 즉, BDS 통계량에 의한 검정은 시계열 자료가 '독립적으로 동일분포를 따른다 (independently and identically distributed : iid)'라는 귀무가설에 대해 구체적으로 정의되지 않은 대립가설을 검정하게 된다. 따라서 BDS 검정결과에서 귀무가설이 기각되는 경우는 분석한 시계열이 독립적으로 동일분포를 따르지 않는다는 것일 뿐이며 구체적으로 어떤 모형을 따르고 있는 지에 대해서는 결론을 유보하게 된다.

3. 비선형 모형과 결합예측

3.1 비선형 모형

일반적으로 경제시계열은 선형성 뿐만아니라 비선형성의 특성을 동시에 갖고 있으므로 선형 모형 혹은 비선형 모형으로 계열의 특성을 다 설명할 수 없게 된다. 따라서 선형 및 비선형 예측값들의 결합을 통하여 예측력을 높일 수 있다. 여기서는 선형모형으로는 전통적인 자기회귀 (autoregressive model:AR) 모형을, 그리고 비선형 모형으로는 GARCH 및 변형된 GARCH 모형과 결합형 모형을 사용한다.

1) GARCH 모형

자기회귀조건부이분산(autoregressive conditional heteroscedasticity:ARCH) 모형은 Engle (1982)에 의하여 최초로 제안된 모형으로 확률변수 Y_t 가 조건부 분포를 따르는 경우, 즉 $Y_t \sim f(Y_t | Y_{t-1})$ 일 때 Y_t 의 평균과 분산 $E(Y_t | Y_{t-1})$, $V(Y_t | Y_{t-1})$ 은 Y_{t-1} 의 함수이기 때문에 역시 확률변수가 된다. 그러나 전통적인 회귀 혹은 시계열 모형에서는 이들을 고정된 상수로 가정하고 있다. 이 때 Y_t 의 분산이 과거의 정보에 영향을 받는다면, $V(Y_t | Y_{t-1}) = h_t$ 로 나타 낼 수 있고 또 정규 분포를 가정하면 ARCH모형은 다음과 같이 된다.

$$Y_t | Y_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \alpha_2 Y_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p Y_{t-p}^2 + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Bollerslev (1986)은 ARCH모형을 일반화시킨 다음과 같은 일반화 자기회귀 조건부이분산 (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity: GARCH) 모형을 제안했다.

$$Y_t | Y_{t-1} \sim N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \quad (3.2)$$

여기서, $p \geq 0, q \geq 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, p), \beta_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, q)$ 이고 또 분산함수식에서

$\varepsilon_t^2 - h_t = v_t$ 로 나타내고 이를 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^q v_{t-j} \tag{3.3}$$

즉, 이 식은 ε_t^2 에 대한 ARMA(p,q)과정이 된다.

2) 변형된 GARCH 모형

GARCH(1,1) 과정의 분산모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} U_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}, \quad U_t \sim iN(0, h_t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

이 모형에서 분산 대신에 표준편차를 포함시키는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \alpha_0 + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1} |U_{t-1}| + \beta_1 \sigma_{t-1} \end{aligned}$$

이와 같은 모형에서는 큰 충격(large shocks)은 조건부 분산에 대하여 표준 GARCH 모형에서 보다 더 작은 영향을 미치게 된다.

Engle and Bollerslev (1986)와 Engle, Lilien, and Robins (1987)은 Y_t 의 설명변수로 조건부분산 h_t 의 함수를 포함시키는 다음과 같은 GARCH-M(GARCH in mean) 모형을 제안했다.

$$\begin{aligned} Y_t &= x_t' \beta + r g(h_t) + \varepsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nelson (1991)에 의하여 제안된 EGARCH(exponential GARCH) 모형은 분산함수를 h_t 대신 $\ln h_t$ 를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_i \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_j \beta_j \ln h_{t-j} \tag{3.6}$$

여기서, $g(z_t) = \theta z_t + \gamma [|z_t| - E|z_t|]$, $z_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$

Higgins and Berra (1992)는 비선형 ARCH(nonlinear ARCH) 모형의 일반형을 다음과 같이 나타내었다,

$$\sigma_t^r = \alpha_0 + \alpha_1 g^r(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \sigma_{t-1}^r \quad (3.7)$$

여기서 $g^r(\varepsilon_{t-1}) = \theta I(\varepsilon_{t-1} > 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^r + \theta I(\varepsilon_{t-1} \leq 0) \cdot |\varepsilon_{t-1}|^r$, $I(\cdot)$ 는 지시함수(indicator function)이다. 이 때, $r=1$ 인 경우가 Zakoian (1994)의 TGARCH(threshold GARCH) 모형으로 다음과 같다.

$$\sigma_t = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} + \alpha_1^+ u_{t-1}^+ + \alpha_1^- u_{t-1}^- \quad (3.8)$$

여기서, $u_t > 0$ 면, $u_t^+ = u_t$ 이고, $u_t \leq 0$ 면, $u_t^+ = 0$ 이며, 마찬가지로 $u_t \leq 0$ 면, $u_t^- = u_t$ 이고, $u_t > 0$ 면, $u_t^- = 0$ 이다. 또한, $r=2$ 인 경우가 다음과 같은 Glosten, Jagannathan and Runkle (1993)의 GJR-GARCH 모형이 된다.

$$h_t = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \phi u_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} \quad (3.9)$$

여기서, $u_{t-1} \geq 0$ 면, $I_{t-1}=1$ 이고, $u_{t-1} < 0$ 면, $I_{t-1}=0$ 이다. 이 모형은 비록 뉴스가 없을 때 최소변동이 초래된다는 주장을 유지하지만, 좋은 뉴스와 나쁜 뉴스에 대하여 다른 계수를 허용한다.

다른 비선형 GARCH 모형으로는 양, 음의 충격에 대한 비대칭 효과를 모형화한 Sentana (1995)가 제안한 아래와 같은 QGARCH 모형(Quadratic GARCH model) 이다.

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^s \alpha_j u_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^s \phi u_{t-j} + \sum_{j \neq k} \phi_{jk} u_{t-j} u_{t-k} \quad (3.10)$$

여기서 ϕ 는 변동에 대한 양, 음의 충격 효과를 분리해서 나타낼 수 있도록 한 비대칭계수이다.

3) 겹선형 모형

비선형 모형의 한 유형인 겹선형 모형은 GARCH 모형과 비조건부 적률은 매우 유사한 특성을 나타내지만 조건부 분포를 고려하면 전혀 다른 모형이 된다.

즉, $Y_t = x_t' \beta + \varepsilon_t$ 에서 ε_t 가 GARCH(1,1) 과정을 따르는 경우에는 $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$, $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^l \beta_j h_{t-j}$ 와 같고, ε_t 가 겹선형과정을 따르는 경우에는 다음과 같이 된다.

$$\varepsilon_t = \sum \sum b_{ij} \varepsilon_{t-i} u_{t-j} + u_t, \quad u_t \sim iN(0, \sigma^2) \quad (3.11)$$

즉, 겹선형 모형에서의 조건부 평균과 분산은 각각 $E(Y_t | \psi_{t-1}) = x_t' \beta + \sum \sum b_{ij} \varepsilon_{t-i} u_{t-j}$, $V(Y_t | \psi_{t-1}) = \sigma^2$ 와 같이 된다. 따라서 GARCH 모형과는 달리 조건부 분산은 상수가 되고 조건부 평균은 과거오차항과 교란항간의 교적항이 포함된다. 이러한 비선형항의 통합은 종속변수의 예측력

을 증가시킬 수도 있다.

3.2 결합예측

미래의 특정 시점에서 관측될 한 사건의 결과를 예측하고자 할 때 우리들은 여러 가지의 예측 모형, 혹은 전문가(experts)들의 견해를 사용할 수 있다. 이 때 각 예측모형 혹은 전문가들은 서로 다른 이론적 배경과 가정을 가지게 된다. 따라서 두 가지 이상의 모형 혹은 전문가들에 의해 예측된 값들은 서로 다른 정보를 반영하게 됨으로 이들을 적절히 결합시킨 결합예측은 개별예측보다 우수할 수 있다. 예측값들의 선형결합에 의한 예측은 Bates and Granger (1969)에 의하여 최초로 제안된 이후로 Clemen and Winkler (1986), Granger and Ramanathan (1986), Terui and van Dijk (2000), 이(1987, 2000) 등의 연구들이 있다. 개별예측을 할 때는 일반적으로 자료의 정확성 문제, 모형의 추정을 위한 가정들에 관한 문제 등에 의해서 좋은 이론적 특성을 갖는 예측값을 추정할 수 없게 된다. 따라서 여러 가지 방법에 의하여 예측된 값들을 적절히 결합시킴으로써 예측의 정확도를 높일 수 있게 된다.

미래의 한 시점 T에서 관측될 확률변수 θ_T 를 p개의 예측방법에 의하여 추정된 예측값들인 $f_T = [f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{pT}]'$ 를 고려하면, 이들의 선형결합예측값(f_{cT})은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_{cT} &= w_1 f_{1T} + w_2 f_{2T} + \dots + w_p f_{pT} \\ &= \underline{w}' f_T \text{ (단, } \sum_{i=1}^p w_i = 1) \end{aligned} \tag{3.12}$$

이 때 결합예측오차 $e_{cT} = (\theta_T - f_{cT}) = \underline{w}' \underline{e}_T$ 의 분산-공분산 행렬은 다음과 같이 된다.

$$V(e_{cT}) = \underline{w}' V(e) \underline{w} = \underline{w}' \Sigma \underline{w}$$

Bates and Granger (1969)는 가중값들의 합이 1이 된다는 조건하에 이와 같은 결합예측오차의 분산-공분산 행렬을 최소로 하는 다음과 같은 결합가중값을 제안했다.

$$\underline{w} = (I' \Sigma^{-1} I)^{-1} (\Sigma^{-1} I) \quad (\text{단, } I = [1, 1, \dots, 1]') \tag{3.13}$$

여기서 가중값의 합이 1이 된다는 제한조건은 개별예측오차에 대하여 불편성과 정상성을 가정하면 결합예측도 불편이 되고, 또 분산을 최소로 하는 결합예측은 평균제곱오차(MSE)를 최소로 하게 되므로 이러한 결합예측은 항상 개별예측보다 우수하게 된다.

그런데 (3.13)식에서 분산-공분산 행렬 Σ 는 알려져 있지 않으므로 표본으로 관측되는 과거의 자료들에서부터 추정해야 한다. 그러나 표본 분산-공분산 행렬을 이용하여 Σ 를 추정하는 경우에는 표본의 크기가 아주 크지 않는 이상 추정값 $\hat{\Sigma}$ 는 매우 불안정하게 되고 이러한 문제는 특히 개별예측값들간의 상관관계가 높을 때 민감하게 나타난다(Clemen and Winkler, 1986). 따라서 결합예측을 위한 가중값의 추정에서는 많은 문제들이 고려되어야 한다.

Nelson (1972) 등은 제한최소제곱법을 사용하여 결합가중값을 추정하였고, Granger and

Ramanadan (1984)은 제한조건이 없는 최소제곱법이 평균제곱오차를 기준으로 하면 더 우수한 결합방법이 됨을 보여 주었다. 즉, 다음과 같은 모형을 고려하면,

$$\theta = Fw + \varepsilon \quad (3.14)$$

여기서, $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$, $F = [1, f_1, f_2, \dots, f_p]$, $w = [w_0, w_1, \dots, w_p]$ 이며, 이 때 $w_0 = 0$, $\sum_{i=1}^p w_i = 1$ 인 제한조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Rw = r, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

따라서, 결합가중값 w 의 제한최소제곱추정량은 다음과 같이 된다.

$$\widehat{w}_R = \widehat{w} - (F'F)^{-1}R'[R(F'F)^{-1}R']^{-1}(R\widehat{w} - r) \quad (3.15)$$

여기서 \widehat{w} 는 제한조건이 없는 최소제곱추정량으로 다음과 같다.

$$\widehat{w} = (F'F)^{-1}F'\theta \quad (3.16)$$

개별예측오차들이 불편이고 정상적일 때 (3.13)식에서 구해지는 가중값은 (3.16)식에서의 결과와 동일하게 된다. 또 앞에서 고려한 제한조건이 사전적으로 불확실한 경우에 다음과 같은 확률적 제한조건을 가정할 수 있다.

$$Rw + \delta = r, \quad \text{여기서 } E(\delta) = 0, \quad E(\delta\delta') = \Omega$$

이와 같이 원래의 회귀모형에 확률적 제한조건을 추가시킨 모형을 혼합회귀모형이라고 하며, 이 때 결합가중값 w 의 혼합회귀추정량은 다음과 같이 된다.

$$\widehat{w}_M = (F'F + R'\Omega^{-1}R)^{-1}(F'\theta + R'\Omega^{-1}r) \quad (3.17)$$

Schmittlein et al. (1990)은 시뮬레이션 분석을 통하여 두 개의 예측값들을 결합하는 경우에, 개별예측값들 간의 상관관계와 개별예측방법의 정확성(MSE 기준)에 따라서 결합방법을 다음과 같이 할 것을 제안했다.

- 첫째, 개별예측값들의 정확성이 비슷하고 또 높은 양의 상관관계를 나타내지 않을 때($\rho < 0.5$)는 동일가중치를 사용,
- 둘째, 개별예측값들의 정확성이 비슷하지 않고, 상관관계가 낮은 경우($-0.3 < \rho < 0.4$), 또는 개

별예측값들의 정확성이 비슷하고, 높은 양의 상관관계를 나타내는 경우에는, 개별예측오차들이 독립인 분산-공분산 행렬을 최소화하는 결합가중치를 사용, 셋째, 개별예측값들의 정확성이 비슷하지 않고 또 상관관계가 낮지 않은 때($\rho < -0.3, \rho > 0.4$)는 분산-공분산 행렬을 최소로 하는 방법을 사용한다.

본 분석에서는 사전 시물레이션을 통하여, 즉 개별예측오차들의 분산-공분산행렬이 주어질 때 어떠한 결합예측 방법이 더 우월한가를 시물레이션 분석을 통하여 결정한다.

4. 대미환을 자료에 대한 실증적 분석

4.1 일별 대미환을 자료의 특성 및 변환

우리나라의 환율은 외환시장의 수요와 공급에 의해 결정되고 있지만 기준환율은 전일자 은행 간 거래환율을 거래량으로 가중평균하여 결정되고 있다. 시장평균환율제도의 도입 초기에는 환율의 급변동에 따른 환리스크로부터 은행과 기업을 보호한다는 측면에서 매일의 환율변동허용폭을 기준환율을 중심으로 상하 0.4%로 제한하였으나, 그 후 변동폭을 여섯 차례에 걸쳐 확대하였으며 1997년 12월 16일부터는 변동폭을 완전히 폐지한 자유변동환율제를 채택하고 있다.

1) 자료

본 분석에서 사용한 환율은 시장평균환율제도를 최초로 도입한 1990년 3월 2일부터 2003년 7월 31일 까지의 총 3490개의 일별자료이다. 그런데 우리나라의 환율은 IMF 구제금융을 신청하기 전부터 급등하기 시작하여 차입금을 상환하기 시작하면서 안정화되기 시작했다. 먼저 이러한 환율의 변동을 검정하기 위하여 다음과 같은 세시점을 기준으로 하여 구조변동에 대한 안정성검정(Chow test)을 실시했다.

- 1) 1997.10.30 : 외환위기를 맞아 환율이 급등하기 시작한 시점
- 2) 1998.12.09 : 외환위기를 맞아 1997년 12월 19일 IMF로부터 빌린 긴급지원자금(SRF) 중 일부인 28억 달러를 상환하기로 결정, 외환위기를 성공적으로 극복하고 있음을 보여준 시점.
- 3) 2001.08.23 : IMF 차입금 잔여분 1억 4천만 달러를 상환하여 IMF체재에서 완전 졸업한 시점.

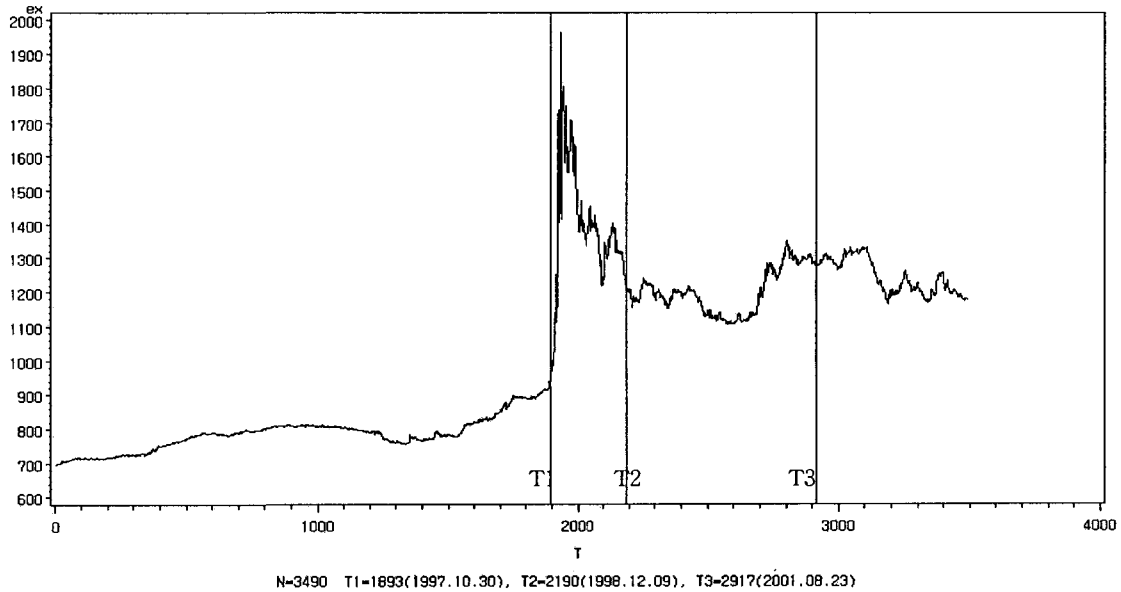
<표 1> 환율의 구조변동에 대한 검정(CHOW TEST)

	기준일 (Break Point)	F-값	p-값
전 기간 (1990.03.02 - 2003.07.31)	1997. 10. 30	13.55	0.000
	1998. 12. 09	0.09	0.909
	2001. 08. 23	0.07	0.933
IMF 이후 기간 (1997.10.30 - 2003.07.31)	1998. 12. 09	14.19	0.000
	2001. 08. 23	0.65	0.523

전 기간을 통한 분석에서는 전환점이 외환위기를 맞아 환율이 급등하기 시작한 시점인 1997년 10월 30일로 나타났고, 외환위기를 맞은 이후의 기간동안에는 IMF로부터 빌린 긴급지원자금

(SRF) 중 일부인 28억 달러를 상환하기로 결정하여, 외환위기를 성공적으로 극복하고 있음을 보여준 시점(1998.12.09)이 가장 유의적인 전환점이 되고 있다. 따라서 본 분석에서는 1997년 10월 30일부터 1998년 12월 8일까지의 기간을 IMF 구제금융으로 환율이 불안정했던 기간으로 간주하기로 한다.

INDEX OF EXCHANGE RATES(Won/Dollar)



<그림1> 일별 대미환율 시계열

일별 대미환율을 그래프로 나타내면 그림1과 같이 IMF 기간동안에는 환율의 변동폭이 매우 크게 나타나고 있음을 알 수 있고, 또 각 기간별로 기초통계량의 값을 구하면 <표 2>과 같이 된다.

<표 2> 대미 환율자료에 대한 기초통계량

	기 간			
	1990.03.02 - 2003.07.31	1990.03.02 - 1997.10.29	1997.10.30 - 1998.12.08	1998.12.09 - 2003.07.31
자료수	3490	1892	296	1302
평균	999.60	786.44	1394.61	1219.42
표준편차	247.87	48.94	179.09	63.06
최소값	693.20	693.20	963.1	1106.4
최대값	1964.80	942.80	1964.8	1351.5
왜도	0.4875	0.527	0.1081	0.096
첨도	-0.935	0.326	0.620	-0.984
정규성검정				
W-Sq	40.016 (<0.005)	4.752 (<0.005)	1.464(<0.005)	2.634(<0.005)
A-Sq	217.132 (<0.005)	33.589 (<0.005)	7.297(<0.005)	16.917(<0.005)

W-Sq : Cramer-von Mises 통계량 A-Sq : Anderson-Darling 통계량 () : p-value

<표 2>에서도 IMF 영향을 받은 후기간 동안이 평균, 분산 등이 훨씬 더 큰 값을 가지고 또한 정규성 검정통계량의 값들도 작은 값을 가지고 있음을 확인할 수 있다.

2) 단위근 검정

환율의 움직임이 장기적 안정성을 유지하면서 변동하는 지 여부를 살펴보기 위하여 먼저 로그변환검정 결과는 AIC 통계량이 [기간 1]에서는 27337.2에서 24417.4로, [기간 2]에서는 7846.5에서 7830.8로 각각 낮아졌다. 로그수준변수와 로그차분변수에 대하여 ADF(Augmented Dickey-Fuller) 검정을 한 결과는 <표 3>과 같이 나타난다. 이 때 모형에 포함된 AR 차수는 3으로 사용하였다. 분석결과 로그수준변수에서는 유의수준 10%에서 단위근이 존재한다는 귀무가설을 기각시키지 못하지만 로그차분변수는 유의수준 1%로 단위근이 존재하지 않는 정상계열이라는 대립가설을 채택해 주고 있다. 즉, 로그차분변수는 정상적인 시계열이 됨을 알 수 있다.

<표 3> 단위근 검정결과

		$\tau(p-value)$		
		모형 1	모형 2	모형 3
기간 1	LOG X	1.057(0.924)	-1.301(0.632)	-1.724(0.741)
	Δ LOG X	-43.915(0.0000)	-43.946(0.0001)	-42.947(0.0001)
기간 2	LOG X	-0.155(0.631)	-1.489(0.853)	-1.425(0.853)
	Δ LOG X	-16.79(0.0001)	-16.78(0.0001)	-16.78(0.0001)

* 기간 1은 전기간이고 기간 2는 환율이 안정화된 기간(1998.12.09 - 2003.07.31)

모형1: $\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^3 \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$, 모형2: $\Delta Y_t = \alpha + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^3 \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$

모형3: $\Delta Y_t = \alpha + \beta t + \gamma Y_{t-1} + \sum_{j=1}^3 \delta_j \Delta Y_{t-j} + \epsilon_t$

따라서 일별 대미환율은 시간의 흐름에 따라서 평균 및 분산이 변동하는 비정상적 계열로 판명됨으로, 이들 지수들을 로그변환 및 차분을 한 자료로 변환한다. 즉 S_t 를 t 기의 대미환율이라고 하면 변환된 계열 Z_t 는 다음과 같다.

$$Z_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \ln(S_t/S_{t-1}) \tag{4.1}$$

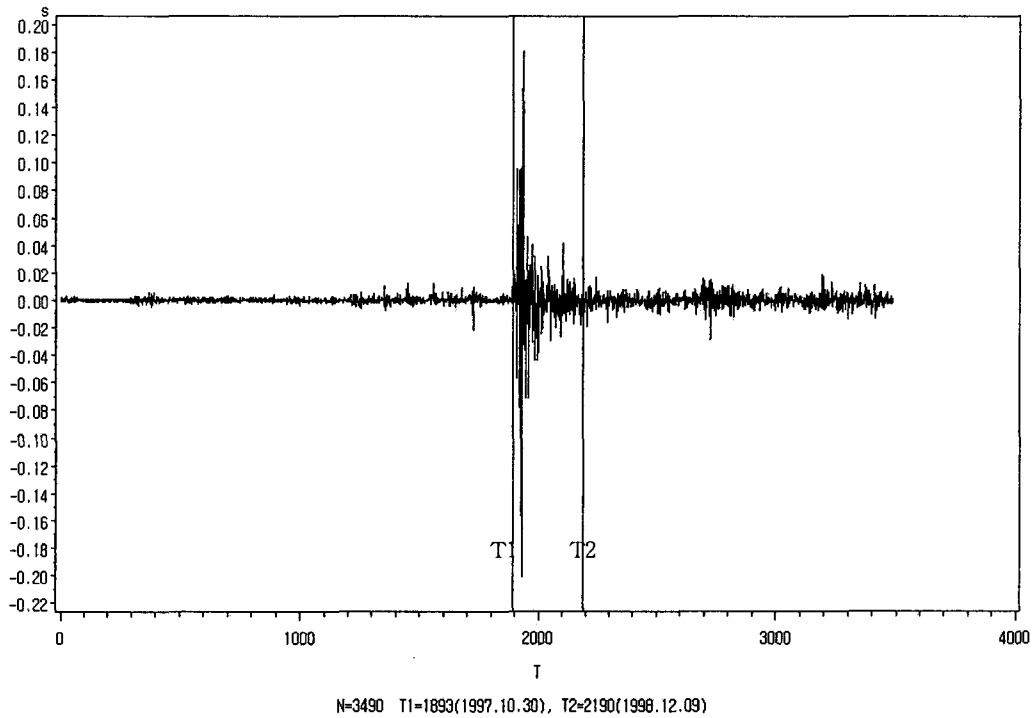
이와 같이 변환된 계열을 그래프로 나타내면 그림 2와 같다. 그런데 여전히 IMF 구제금융을 받은 직후 기간동안에는 환율의 대수변환된 차분계열이 변동폭이 매우 높았던 것으로 나타난다. 이와 같이 변환된 계열을 대상으로 비선형성 종속성을 분석한다.

4.2 대미환율의 비선형성 분석

환율 변화를 분석하는 전통적인 모형은 시점 t에서의 환율의 변화는 그 이전의 시점에서의 환율의 변화들과 통계적으로 독립이 되는 확률보행모형(random walk model)이다. 그러나 선형적으로

는 시점들 간에 서로 독립일지라도 비선형적으로는 종속성이 성립될 수 있다. 즉, 비선형 시스템에 의하여 생성된 시계열은 계열상관이 존재하지 않는 경우에도 계열들 간에 통계적으로 독립이 되는 것은 아니다.

INDEX OF EXCHANGE RATES RETURNS(Won/Dollar)



<그림 2> 대미환율의 대수변환 차분계열

따라서 선형종속에 대한 전통적인 검정방법은 비선형 종속성을 검정할 수 없게 된다. 일별 대미환율계열의 비선형 종속성을 분석하기 위하여 먼저, 원계열에 대한 선형 및 비선형성을 분석하고, 다음에 원계열에서 선형종속성을 제거한 계열인 AR(p) 잔차에 대한 비선형성을 분석한다.

1) 원계열에 대한 표본자기상관분석

일별 대미환율의 시계열 종속성을 분석하기 위하여 원계열 Z_t 와 Z_t 의 절대값 및 제곱값에 대한 표본자기상관함수를 구한 결과는 <표 4>와 같이 나타난다. 일반적인 특성을 파악하기 위하여 IMF 구제금융의 영향이 미치지 않는 것으로 간주되는 구간인 1998년 12월 9일부터 2003년 7월 31일까지의 자료만 사용하여 분석한다.

일별 대미환율의 선형종속성을 파악하기 위한 Z_t 의 표본자기상관함수의 분석에서는 거의 모든 시차에서 매우 유의적인 자기상관이 있는 것으로 계측되었고, 또 비선형 종속성을 파악하기 위한 $|Z_t|$ 및 Z_t^2 의 자기상관분석에서도 매우 유의적인 관련성이 있는 것으로 분석되고 있다. 즉, 자기

상관분석에 의하면 선형종속성 뿐만아니라 비선형 종속성이 내포되었음을 시사해 준다.

<표 4> 원계열에 대한 표본자기상관함수

	Z_t		$ Z_t $		Z_t^2	
	sacf	std error	sacf	std error	sacf	std error
1	0.201	0.016	0.493	0.016	0.176	0.016
2	-.092	0.017	0.551	0.020	0.371	0.017
3	-.200	0.017	0.581	0.024	0.462	0.019
4	-.305	0.018	0.512	0.028	0.317	0.022
5	-.004	0.019	0.523	0.030	0.318	0.023
6	0.176	0.019	0.507	0.033	0.339	0.024
7	0.238	0.020	0.442	0.035	0.191	0.026
8	0.193	0.021	0.432	0.036	0.165	0.026
9	-.108	0.021	0.478	0.038	0.323	0.026
10	-.114	0.021	0.439	0.040	0.207	0.028
11	-.073	0.021	0.398	0.041	0.138	0.028
12	-.056	0.021	0.467	0.042	0.226	0.028
13	0.094	0.021	0.358	0.043	0.136	0.029
14	0.193	0.022	0.400	0.044	0.187	0.029
15	0.098	0.022	0.339	0.045	0.110	0.029

2) AR-잔차에 대한 자기상관 및 비선형성 분석

대미환율계열에 대하여 선형종속성을 제거하기 위하여 적합시킨 모형은 AR(1) 모형이고, 이 모형을 추정하면 다음과 같이 된다.

$$Z_t = 0.0652 Z_{t-1} + a_t, \quad () \text{는 } p\text{-값}$$

(0.02)

<표 5> AR(1)-잔차에 대한 표본자기상관함수

	e		$ e $		e^2	
	sacf	std error	sacf	std error	sacf	std error
1	-.001	0.027	0.183	0.027	0.244	0.027
2	0.007	0.027	0.117	0.029	0.110	0.029
3	0.019	0.027	0.148	0.029	0.087	0.029
4	0.028	0.027	0.060	0.029	0.032	0.029
5	0.060	0.027	0.138	0.029	0.126	0.029
6	0.019	0.027	0.264	0.030	0.208	0.030
7	0.005	0.027	0.107	0.031	0.159	0.031
8	-.004	0.027	0.032	0.031	0.032	0.031
9	0.016	0.027	0.052	0.032	0.021	0.032
10	-.012	0.027	0.077	0.032	0.048	0.032
11	0.050	0.027	0.090	0.032	0.063	0.032
12	-.004	0.027	0.130	0.032	0.049	0.032
13	-.029	0.027	0.044	0.032	0.060	0.032
14	-.025	0.027	0.029	0.032	0.013	0.032
15	0.023	0.027	0.030	0.032	0.020	0.032

추정된 모형으로 원계열에서 선형종속성을 제거한 AR(1)-잔차 계열에 대하여 다시 선형 및 비선형 종속성을 분석하기 위하여 자기상관분석을 한 결과는 <표 5>와 같다. AR(1)-모형으로 선형

필터링한 잔차 e 에 대한 자기상관분석에서는 모든 시차에서 유의적인 선형관련성이 나타나지 않고, $|e|$ 와 e^2 의 자기상관분석에서는 비선형관련성이 존재하는 것으로 나타난다.

AR(1) 잔차에 대한 비선형성 검정의 결과는 <표 6>과 같이 나타난다. 즉, ARCH 과정에 대한 LM-검정에서는 $p=2, 5$ 에 대하여 매우 유의적으로 ARCH 특성을 나타내고 있고, 곁선형 모형에 대한 검정에서는 $R=S=2$ 인 경우에 5% 유의수준에서 유의적이 아닌 것으로 나타났으나, 결합검정에서는 유의적인 것으로 나타났다.

<표 6> AR(1) 잔차에 대한 비선형검정

	검정방법							
	ARCH		Bilinear	ARCH & Bilinear	RESET	TSAY	MacLeod-Li	
χ^2	81.0	101.47	11.27	55.17	27.73	10.63	89.4	235.1
(자유도)	(2)	(5)	(4)	(3)	(3)	(3)	(4)	(10)
p-value	<0.01	<0.01	>0.05	<0.01	<0.01	<0.05	<0.01	<0.01

이제 일별 대미환율이 독립, 동일분포를 따른다는 귀무가설을 검정하기 위한 BDS 통계량을 계산하면 <표 7>과 같이 된다. BDS 통계량을 계산할 때 주어진 m 에 대해서 r 을 너무 작게 또는 크게 설정하는 경우에는 상관적분 $C_m(t, T)$ 는 너무 작은 또는 많은 표본점들을 포함할 수 있게 된다. 여기에서는 일반적으로 많이 사용하는 $r=\sigma$ 전후의 값에 대하여, 즉 $r/\sigma=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ 를 그리고 m 은 2, 3, . . . ,8을 사용했다(이와 김, 1998 참조).

두 기간에 대한 BDS 통계량의 분석결과에서는 계산된 모든 값들이 표준정규분포의 극단적인 우측꼬리 부분에 위치한다. 즉, iid 가설을 강하게 기각한다. <표 7>에서 보면 m 이 크고 r 이 작은 경우에는 예상되듯 표본의 크기가 크지는 않기 때문에 BDS 통계량의 값들이 상당히 민감한 반응을 하는 것을 볼 수 있다. BDS 통계량에 의한 iid가설의 기각은 비선형 결정적 과정의 확정적 증거는 아니고 관측된 계열의 구조변동 등이 원인이 될 수도 있다. 이러한 분석을 통하여 대미환율 계열은 선형 뿐만아니라 비선형 특성을 가지고 있음을 알 수 있다.

<표 7> AR(1) 잔차에 대한 BDS 통계량

r/σ	m							
	2	3	4	5	6	7	8	
0.5	13.67	18.11	21.67	26.14	31.73	39.58	50.23	
1.0	14.15	17.41	19.48	21.39	23.44	25.68	28.24	
1.5	13.39	16.00	17.41	18.49	19.50	20.37	21.20	
2.0	12.00	14.41	15.62	16.27	16.80	17.26	17.59	

4.3 개별모형에 의한 환율의 예측

1) 개별모형에 의한 환율의 예측

모형의 추정을 위하여 사용하는 자료는 1998년 12월 9일부터 2003년 7월 31일 까지의 총 1301개의 일별자료이다. 그런데 이 계열은 비정상계열이므로 로그변환 및 차분을 하여 사용한다.

즉 S_t 를 t 기의 대미환율이라고 하면 변환된 계열 $Z_t = (1 - B) \ln S_t$ 를 사용하여 선형 및 비선형 모형을 추정했다. 선형모형으로는 AR 모형을, 비선형 모형으로는 앞에서 기술된 GARCH 및 변형된 GARCH 모형 및 BILINEAR 모형을 추정했으면 이들 중에서 최종적으로 선택된 모형의 추정결과는 아래와 같은 4가지의 모형이다.

1. AR(1) 모형 : $Z_t = 0.0652 Z_{t-1} + a_t$
 (0.02)

SBC = -10654.2 AIC = -10659.3

2. GARCH(1,1) 모형 : $Z_t = -0.0001848 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$

$$h_t = 0.00000113 + 0.1780 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.7621 h_{t-1}$$

(6.00) (10.62) (34.11)

SBC = -10853.80 AIC = -10874.48

3. AR(1)-GARCH(1,1) 모형 : $Z_t = -0.000192 - 0.1203 Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t)$
 (-1.73) (3.89)

$$h_t = 0.0000010 + 0.1713 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.7727 h_{t-1}$$

(5.67) (10.21) (34.19)

SBC = -10864.40, AIC = -10885.09

4. Bilinear 모형 : $Z_t = 0.0735 Z_{t-1} - 13.426 Z_{t-2} \varepsilon_{t-1}$
 (2.65) (-3.13)

SBC = 14311.0, AIC = -14326.2

2) 모형의 평가 및 지분가설검정

2.1) 표본기간동안의 모형의 평가

표본기간동안의 모형의 평가를 위해 통계량 아카이케의 정보기준(AIC)과 슈바르츠의 베이즈기준(SBC)을 비교하고, 예측력을 비교하기 위해서는 평균제곱오차(MSE)와 평균절대백분비오차(MAPE)를 비교한다. 이와 같은 분석결과는 <표 8>과 같이 나타난다.

<표 8> 모형의 평가

예측방법	AIC	SBC	MSE	MAE
F1	-10654.2	-10659.3	24.2204	3.2719
F2	-10853.80	-10874.48	24.3418	3.2827
F3	-10864.40	-10885.09	24.3140	3.3074
F4	-14326.2	-14311.0	24.0253	3.2769

F1 : AR(1) 모형, F2 : GARCH(1,1) 모형, F3 : AR(1)-GARCH(1,1) 모형
F4 : Bilinear 모형

이 표에서 보는 것처럼 모형의 적합성을 나타내는 통계량(AIC, SBC)을 기준으로 할 때는 모형 F4, F1이 상대적으로 우월한 것으로 나타나며, 추정된 모형의 예측력을 평가하는 MSE 및 MAE를 기준으로도 역시 모형 F4, F1이 가장 우수한 것으로 나타난다.

2.2) 비지분가설검정

한 가설에 포함된 변수들이 다른 가설에 포함된 변수들의 부분집합이 되지 않을 때 이와 같은 가설을 비지분가설(non-nested hypothesis)이라고 한다. 따라서 비지분가설에서는 전통적인 가설과는 달리 두 가설에서 설정된 모형들이 서로 다른 변수들을 내포할 수 있다.

확률변수 Y의 확률밀도함수를 다음과 같이 가정한다.

$$H_1: Y \sim f(y, \alpha_1) \quad , \alpha_1 \in \Omega_1 \tag{4.2a}$$

$$H_2: Y \sim g(y, \alpha_2) \quad , \alpha_2 \in \Omega_2 \tag{4.2b}$$

여기서 모수공간 Ω_1, Ω_2 은 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \Omega_1$ 이고 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \Omega_2$ 이고 α_1, α_2 는 각각 밀도함수 f와 g의 모수벡터이다. 이와 같이 설정되는 가설을 우리들은 비지분가설(non-nested hypothesis)이라고 한다. 이 때 만약 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_1$ (혹은 $\Omega_2 \cap \Omega_1 = \Omega_2$)이면 이 가설은 지분가설(nested hypothesis)이 된다. 비지분가설에 대한 검정은 Cox(1960,1961)가 최초로 대수우도비(log-likelihood ratio)에 근거한 N-통계량을 제안했으며, Davidson and Mackinnom (1981)는 Cox의 검정보다 훨씬 더 단순하고, 기존의 소프트웨어를 이용하여 계산이 가능한 J-통계량을 제안했다. 특히 J-통계량은 비선형 모형들에 대한 비지분가설 검정으로 확장할 수 있다. 즉, 가설로 설정된 모형들이 (4.3a), (4.3b)와 같이 비선형 모형인 경우에는 인위적 결합모형을 식 (4.3c)와 같이 나타낼 수 있다. 이 경우에도 J-검정 통계량은 $\alpha=0$ 에 대한 T-통계량이 된다. 그런데, 이와 같은 인위적 결합모형 역시 비선형이 되므로 식 (4.4)와 같이 선형모형으로 변환시켜서 검정할 수 있다. 이와 같은 검정방법을 P-검정이라 한다(Davidson and Mackinnon,1981).

$$H_1: y_t = f_t(\theta_1) + u_{1t} \tag{4.3a}$$

$$H_2: y_t = g_t(\theta_2) + u_{2t} \tag{4.3b}$$

$$H_c: y_t = (1 - \alpha)f_t(\theta_1) + \alpha g_t(\theta_2) + u_t \tag{4.3c}$$

(4.3c)의 결합모형에서 $\hat{\theta}_1$ 에 관하여 $f_t(\theta_1)$ 을 테일러 급수전개를 시켜서 1차항까지만 나타내고 고차항은 이차항에 포함시키면 다음과 같이 된다.

$$y_t = (1-\alpha) \hat{f}_t + \hat{x}_t(\theta_1 - \hat{\theta}_1) + \alpha \hat{g}_t + \gamma_t \tag{4.4}$$

$$= (1-\alpha) \hat{f}_t + \hat{x}_t b_1 + \alpha \hat{g}_t + \gamma_t$$

혹은, $y_t - \hat{f}_t = \hat{x}_t b + \alpha(\hat{g}_t - \hat{f}_t) + \gamma_t$

여기서 $\hat{f}_t = f_t(\hat{\theta}_1)$, $\hat{g}_t = g_t(\hat{\theta}_2)$, $\hat{x}_t = f'_t(\hat{\theta}_1)$ 그리고 $\gamma_t =$ 고차항 + u_t 이며, P-검정통계량은 식 (4.4)에서 $\alpha=0$ 에 대한 T-통계량이 된다.

앞에서 설정한 4개의 개별예측모형 상호간의 지분가설검정을 하기위하여 P-검정통계량을 구하면 <표 9>와 같이 된다. 이와 같은 결과는 다음과 같이 해석할 수 있다.

첫째, 귀무가설이 모형 F1 일 때는 대립가설이 모형 F2 와 F3일 때는 유의수준 10%로도 유의하지 않지만, 대립가설이 F4 모형일 때는 유의수준 1%로 유의하다. 즉, 모형 F1은 모형 F2, F3 보다는 우수하지만, F4 보다는 우수하지 않다.

둘째, 귀무가설이 모형 F2 일 때는 모든 대립가설에 대하여 유의수준 1% 또는 5%로 유의하므로 귀무가설인 모형 F2는 다른 모형에 대하여 항상 기각된다

셋째, 귀무가설이 모형 F3 일 때도 모든 대립가설에 대하여 유의수준 5% 또는 1%로 유의하다. 따라서 모형 F3는 다른 모형에 대하여 항상 기각된다.

<표 9> 지분가설검정결과(T-값)

		대립가설			
		F1	F2	F3	F4
귀무가설	F1	-	0.297 (0.766)	-0.204 (0.838)	3.305 (0.001)
	F2	2.578 (0.010)	-	-2.512 (0.012)	4.186 (0.000)
	F3	2.268 (0.023)	2.203 (0.028)	-	-4.012 (0.000)
	F4	-0.129 (0.897)	0.038 (0.969)	-0.206 (0.836)	

F1 : AR(1) 모형, F2 : GARCH(1,1) 모형,
F3 : AR(1)-GARCH(1,1) 모형, F4 : Bilinear 모형

넷째, 귀무가설이 모형 F4 일 때는 모든 대립가설에 대하여 유의수준 10%로도 유의하지 않다. 따라서 모형 F4는 다른 모형에 대하여 항상 기각되지 않는다.

따라서 지분가설검정의 결과를 요약하면, 유의수준을 10%로 하는 경우에는 모형 F4는 모형 F1, F2, F3 보다, 그리고 모형 F1은 모형 F2, F3 보다 우월한 것으로 판정할 수 있다. 그러나 모형 F2 와 F3은 유의수준 5%로 서로 기각되지 않으므로 판정할 수 없다.

4.4 사전 모의실험에 의한 결합예측

결합예측을 위한 개별예측값의 결합방법은 개별예측오차의 특성에 따라서 달라질 수 있다. 따라서 개별예측오차의 표본 분산공분산행렬이 주어질 때의 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 상대적으로 우월한 결합방법을 결정한다.

1) 모의실험

개별예측오차의 분산공분산 행렬이 주어질 때 어떠한 결합예측방법이 상대적으로 더 우수한가를 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 분석한다. 이를 위해 먼저 개별예측값들에 대한 표본 분산공분산행렬($\hat{\Sigma}$)을 계산하면 다음과 같이된다.

<표 10> 개별예측오차에 대한 표본분산공분산 행렬

	F1	F2	F3	F4
F1	24.2382	24.2278	24.2453	24.0514
F2	24.2278	24.3214	24.1440	24.0410
F3	24.2453	24.1440	24.3320	24.0584
F4	24.0514	24.0410	24.0584	24.0438

추정된 분산공분산행렬을 갖는 다변량정규확률난수를 생성하여 다음과 같은 T+1개의 개별예측 오차벡터를 생성한다(SAS/IML의 다변량정규확률난수 매크로 MVN을 사용함).

$$\epsilon_t \sim Nid(\Omega, \hat{\Sigma})$$

여기서 T개의 오차벡터는 결합가중치의 추정을 위하여 사용되고, T+1 번째 오차벡터는 예측방법들의 예측력을 평가하기 위한 평균제곱예측오차(MSFE)를 계산하기 위하여 사용된다. 이 때 k 개의 예측방법에 대한 예측값들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{it} = Z_t + \epsilon_{it}, \quad i=1,2, \dots, k, \quad t=1,2, \dots, T+1 \tag{4.5}$$

결합예측을 위한 가중값벡터 ω 의 추정방법은 다음과 같은 4가지 방법을 사용한다.

- 1) 제한조건이 없는 최소제곱추정량(URLS)
- 2) 제한 최소제곱추정량(RLS)
- 3) 상수항이 없는 최소제곱추정량(NONCOM)
- 4) 단순평균(MEAN)

예측오차의 분산공분산 행렬이 <표 10>과 같은 4*200의 개별예측행렬을 생성하여 4가지의 결합방법에 따른 결합예측을 행하고, 이와 같은 과정을 1000회 반복한다. 이 때 예측력의 평가는 다

음과 같은 평균제곱예측오차(MSFE)와 평균제곱오차의 평균(MMSE)을 사용한다.

$$MSFE = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R (Z_{T+1,i} - F_{T+1,i})^2$$

$$MMSE = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \left[\sum_{t=1}^T (Z_{t,i} - F_{t,i})^2 / T \right] \quad , \quad \text{여기서 } T=200, R=1000.$$

이와 같은 시뮬레이션의 결과는 <표 11>과 같이 된다. 이 분석결과에 의하면, 2개 혹은 3개의 개별예측값들의 결합방법들 중에서 제한조건이 없는 최소제곱방법이 모든 경우에 평균제곱예측오차(MSFE)와 평균제곱오차의 평균(MMSE)이 가장 작은 것으로 나타난다.

<표 11> 시뮬레이션 결과

모형	평가 기준	결합방법			
		NONCON	URLS	RLS	MEAN
F1, F2, F3	MSFE	11.005	1.552	24.630	24.496
	MMSE	13.379	5.508	24.476	24.240
F1, F2, F4	MSFE	10.636	1.449	22.918	22.732
	MMSE	13.458	5.537	24.447	24.285
F1, F3, F4	MSFE	12.222	1.455	24.855	24.436
	MMSE	13.396	5.544	24.361	24.226
F2, F3, F4	MMFE	10.918	1.483	23.198	22.961
	MMSE	13.413	5.525	24.323	24.148
F1, F2	MSFE	10.862	1.412	23.117	22.971
	MMSE	13.449	5.541	24.470	24.240
F1, F3	MSFE	11.442	1.500	24.881	24.784
	MMSE	13.510	5.569	24.610	24.380
F1, F4	MSFE	10.424	1.562	24.635	24.416
	MMSE	13.300	5.553	24.260	24.060
F2, F3	MMFE	11.113	1.589	25.291	25.258
	MMSE	13.390	5.545	24.560	24.310
F2, F4	MMFE	11.880	1.503	24.868	24.949
	MMSE	13.301	5.531	24.300	24.120
F3, F4	MMFE	10.661	1.4507	23.046	22.646
	MMSE	13.410	5.539	24.300	24.120

2) 제한조건이 없는 최소제곱법에 의한 결합예측

결합예측을 위하여 먼저 제한조건이 없는 최소제곱법에 의한 결합가중값을 추정 한 후, 표본기간에 대한 평균제곱오차(MSE)와 평균절대백분비오차(MAPE)를 구하면 <표 12>와 같이 된다.

<표 12> 결합예측방법에 따른 예측력의 사전평가

개별예측방법	MSE	RMSE	MAPE
F1, F2, F3, F4	24.0660	4.9057	0.0000155
F1, F2, F3	24.0656	4.9056	0.0000152
F1, F2, F4	24.0950	4.9086	0.0000160
F1, F3, F4	24.0977	4.9089	0.0000160
F2, F3, F4	24.0973	4.9089	0.0000160
F1, F2	24.2780	4.9272	0.0000161
F1, F3	24.2812	4.9276	0.0000161
F1, F4	24.0792	4.9070	0.0000160
F2, F3	24.2632	4.9257	0.0000161
F2, F4	24.0798	4.9070	0.0000160
F3, F4	24.0793	4.9070	0.0000160

전체적으로는 (F1, F2, F3)를 결합했을 때가 MSE가 가장 낮게 나타났고, MAPE도 가장 낮게 나타난다. 그 다음으로는 (F1, F2, F3, F4)를 결합했을 때와 (F1, F4) 및 (F3, F4)를 결합했을 때가 MSE, MAPE가 낮은 것으로 나타난다. 따라서 표본후 기간을 예측하기 위해서 최종적으로 (F1, F2, F3), (F1, F2, F3, F4) 와 (F1, F4) 및 (F3, F4)를 제한조건이 없는 최소제곱법으로 결합예측을 행한다.

1998년 12월 9일에서 2003년 7월 31일까지 1301개의 일별환율의 변환된 자료를 이용하여 추정된 개별예측모형과 결합예측모형에 대하여 2003년 8월 1일부터 8월 12일까지(N=10) 기간과 8월 30일까지(N=26) 기간에 대한 예측력을 평가하면 <표 13>과 같이 된다.

개별예측방법중에서는 표본 기간후의 기간에 대해서는 AR 모형 및 Bilinear 모형에 의한 예측(F1, F4)이 MSFE와 MAPE가 낮게 예측되고 있으나 N=26인 경우에는 AR-GARCH 모형이 가장 낮게 나타났다. 결합예측의 경우에는 MAPE를 기준으로하면 모든 경우에 개별예측보다 우수한 것으로 나타난다. 그러나 MSFE를 기준으로 하면 F1, F2, F3, F4를 결합하는 경우는 오히려 개별예측의 경우보다 크게 나타났고 또 F1, F2, F3를 결합하는 경우도 개별예측보다는 낮게 나타나지만 (F1, F4) 혹은 (F3 F4)를 결합하는 경우보다는 훨씬 크게 나타난다(이러한 문제는 결합가중치를 추정할 때 발생하는 개별예측값들 간의 다중공선성의 문제에 기인 된 것으로 추측된다). 전체적으로는 (F1, F4) 와 (F3 F4)를 결합하는 경우가 모든 경우에 예측력이 가장 높은 것으로 나타난다.

<표 13> 예측방법들 간의 예측력의 사후평가

		N=10(2003.8.01-8.12)		N=26(2003.8.01-8.30)	
		MSFE	MAPE	MSFE	MAPE
개별 예측	F1	4.3277	2.778E-6	5.2474	3.623E-6
	F2	4.4516	2.856E-6	5.3467	3.690E-6
	F3	4.3421	2.786E-6	5.2431	3.620E-6
	F4	4.3236	2.775E-6	5.2425	3.619E-6
결합 예측	F1 F4	4.0584	2.026E-6	5.1650	3.268E-6
	F3 F4	4.0566	2.025E-6	5.2048	3.294E-6
	F1 F2 F3	4.3095	1.872E-6	5.2859	3.266E-6
	F1,F2,F3,F4	4.4568	1.860E-6	5.4076	3.252E-6

5. 요약 및 결론

이 연구에서는 비선형 특성을 갖는 경제시계열을 예측하고자 하는 경우에, 먼저 선형 및 비선형 모형으로 예측을 하고, 다시 이들 예측값들을 결합하여 예측하는 결합예측방법을 제안했다. 이를 위해 먼저 비선형 검정방법과 결합예측방법을 간략히 기술하고 또한 결합예측을 하는 경우에 개별예측오차들의 추정된 분산-공분산 행렬을 사용한 사전 시뮬레이션 분석을 통하여 상대적으로 더 우월한 결합방법을 결정하는 방법을 제안했고, 한국의 일별 대미환률자료를 사용한 실증적 분석을 통하여 이러한 방법의 우월성을 보였다.

일반적으로 경제시계열은 선형성 뿐만아니라 비선형성의 특성을 동시에 갖고 있으므로 선형 모형 혹은 비선형 모형으로 계열의 특성을 다 설명할 수 없게 된다. 따라서 선형 및 비선형 모형에 의한 예측값들의 선형결합을 통하여 예측력을 높일 수 있게 된다.

한국의 일별 대미환률자료를 사용한 실증적분석에서는 선형모형으로는 전통적인 자기회귀 모형을, 그리고 비선형 모형으로는 GARCH 및 변형된 GARCH 모형과 접선형 모형을 사용하여 예측했다.

그리고 결합예측을 위해서 먼저, 개별예측값의 결합방법은 개별예측오차의 특성에 따라서 달라질 수 있으므로 개별예측오차의 표본 분산공분산행렬이 주어질 때 어떠한 결합방법이 상대적으로 더 우월한 방법인지를 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 분석했다.

이와 같은 시뮬레이션의 결과에서는 2개 혹은 3개의 개별예측값들의 결합방법들 중에서 제한조건이 없는 최소제곱방법이 표본기간동안의 평균제곱오차의 평균(MMSE) 뿐만아니라 표본후 기간의 평균제곱예측오차(MSFE)도 가장 작은 것으로 나타났다.

제한조건이 없는 최소제곱법으로 표본기간('98.12.09-'03.07.31) 동안의 결합예측값을 구하면, 전체적으로는 (F1, F2, F3)를 결합했을 때가 MSE가 가장 낮게 나타났고, MAPE도 가장 낮게 나타났다. 그 다음으로는 (F1, F4) 및 (F3, F4)를 결합했을 때가 MSE, MAPE가 낮은 것으로 나타났다. 표본후 기간('03.08.01-08.12, '03.08.01-08.30)을 예측하기 위해서 최종적으로 (F1, F2, F3), (F1, F2, F3, F4) 와 (F1, F4) 및 (F3, F4)를 제한조건이 없는 최소제곱법으로 결합예측값을 추정했고, 그 결과 결합예측의 경우에는 MAPE를 기준으로하면 모든 경우에 개별예측보다 우수한 것으로 나타났다. 그러나 MSFE를 기준으로 하면 F1, F2, F3, F4를 결합하는 경우는 오히려 개별예측의 경우보다 크게 나타났고, 또 F1, F2, F3를 결합하는 경우도 개별예측보다는 낮게 나타나지만 (F1, F4) 혹은 (F3, F4)를 결합하는 경우보다는 훨씬 크게 나타났다. 이러한 문제는 결합가중값을 추정할 때 발생하는 개별예측값들 간의 다중공선성의 문제에 기인 된 것으로 추측되며 추가적인 연구가 있어야 할 것이다. 전체적으로는 (F1, F4) 와 (F3, F4)를 결합하는 경우가 모든 경우에 예측력이 가장 높은 것으로 나타났고, 이들은 (AR 모형) + (Bilinear 모형) 그리고 (AR-GARCH 모형) + (Bilinear 모형), 즉 선형 및 비선형 모형에 의한 예측값들의 결합을 통한 예측임을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] 이우리(1987), 결합예측에 관한 실증적 연구, "응용통계연구", 1권 2호, 10-26.

- [2] 이우리(2000), 결합예측 방법에 의한 종합주가지수의 예측, "경기대학교 논문집" 44-1, 309-332.
- [3] Bates, J.M. and Granger C.W.J. (1969), "The Combination of Forecasts", *Oper. Res. Quar.*,20, 451-468.
- [4] Bera, A.K and Higgins M. L.(1997),"ARCH and Bilinearity as Competing Models for Nonlinear Dependence", *JBES*,15-1.43-50.
- [5] Bollerslev, T. (1986), 'Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity' , *Journal of Econometrics*, 31, 307-27.
- [6] Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1975), "Intervention analysis with applications to economic and environmental problems, *JASA*, 70, 70-79.
- [7] Brock, W.A., Dechert, W., and Scheinkman, J. (1987),"A Test for Independence Based on the Correlation Dimension," University of Wisconsin-Madison. Working Paper.
- [8] Brooks, Chris (2001), "A Double-threshold GARCH Model for the French Franc/Deutschmarc Exchange Rate", *Journal of Forecasting*, 20, 135-143.
- [9] Clemen, R.T. and Winkler R.L. (1986), "Combining Economic Forecasts", *JBES*, Vol.4, No.1, 39-46.
- [10] Clements, M.P. and Smith J. (1999),"A Monte carlo study of the forecasting performance of empirical SETAR models", *Journal of Applied Econometrics*, 14, 123-141.
- [11] Cox, D. R. (1961), "Tests for Separate Families of Hypothesis," in *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics*(Vol.1), Berkely: University of California Press, 751-767.
- [12] Cox, D. R. (1962), "Further Results on Tests of Separate Families of Hypothesis," *JRRS*, Ser. B, 24, 406-424.
- [13] Davidson, R., and Mackinnon, J. (1981), "Several Tests for Model Specification in the Presense of Alternative Hypothesis," *Econometrica*, 49, 781-793.
- [14] Engle, R.F. (1982), 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K Inflation' , *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [15] Engle, R.F. and Bollerslev, T. (1986), 'Modelling the Persistence of Conditional Variances' , *Econometric Reviews*, 5, 1-50.
- [16] Engle, R.F., Lilien, D.M. and Robbins, R.P. (1987), 'Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model' , *Econometrica*, 55, 391-408.
- [17] Gencay, R. (1999), "Linear, nonlinear and essential foreign exchange rate prediction with simple trading rules", *J. of International Economics*, 47, 91-107.
- [18] Glosten, L.R., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993), 'Relationship Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks' , *Journal of Finance*, 48, 1779-801.
- [19] Goetzmann, W. N.(1993)."Patterns in three Centuries of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 66(2), 249-270.
- [20] Granger, C.W.J. and Ramanadan, R. (1984), "Improved Methods of Combining Forecasts", *J. of Forecasting*, 3, 197-201.

- [21] Higgins, M.L. and Bera, A.K. (1992), 'A Class of Nonlinear ARCH Models' , *International Economic Review*, 33, 137-58.
- [22] Hsieh, D. A. (1989), "Modelling heteroskedasticity in daily foreign exchange rates estimation", *JBES*, 7, 307-317.
- [23] Hsieh, D. (1991), "Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets," *Journal of Finance*, 46(5), 1839-1878.
- [24] Keenan, D.(1985)," A Tukey nonadditivity-type test for time series nonlinearity," *Biometrika*, 72, 39-44.
- [25] McLeod, A.I. and W.K. Li (1983),"Diagnostic checking ARMA time series models using squared residual autocorrelations", *J. of Time Series Analysis*, 4, 269-273.
- [26] Meade, Nigel(2002), "A comparison of the accuracy of short term foreign exchange forecasting methods", *International Journal of Forecasting*, 18, 67-83.
- [27] Ramsey, J.B. (1969),"Tests for specification errors in classical linear least-squares regression analysis", *JRSS*, 31, 350-371.
- [28] Sarantis, Nicholas (2001),"Nonlinearities, cyclical behaviour and predictability in stock markets: international evidence", *International Journal of Forecasting*, 17, 459-482.
- [29] Schmittlein, D.c., Kim, J., Morrison, D.G. (1990),"Combining forecasts: operational adjustments to theoretically optimal rules", *Management Science*, 36, 1044-1056.
- [30] Sentana, E. (1995), 'Quadratic ARCH Models' , *Review of Economic Studies*, 62, 639-61.
- [31] Terui, Nobuhiko and Herman K. van Dijk (2002),"Combined forecasts from linear and nonlinear time series models', *International Journal of Forecasting*, 18, 421-438.
- [32] Tsay, R. (1986),"Nonlinearity tests for time series", *Biometrika*, 73,461-466.
- [33] Verhoeven, P., Pilgram B., McAleer M., and Mees A. (2002)"Non-linear modelling and forecasting of S&P 500 volatility", *Mathematics and Computers in Simulation*, 59,233-241.
- [34] Weiss, A.A. (1986),"ARCH and Bilinear Time Series Models: comparison and combination", *JBES*, 4, 59-70.
- [35] Wu, Berin and Chih-Li Chang (2002), "Using genetic algorithms to parameters (d,r) estimation for threshold autoregressive models", *Computational Statistics & Data Analysis*, 38, 315-330.
- [36] Zakoian, J.M. (1994), 'Threshold Heteroskedasti Models' , *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-55.

[2003년 9월 접수, 2003년 11월 채택]