The Korean Communications
in Statistics Vol. 10 No. 3, 2003
pp. 749-764

A Study on Volume of Difference of Two Joint pdf's, Focused on the Relation to Normal Theory LR Tests

Kwangjin Lee[1)]

Abstract

In this paper we explain that normal theory likelihood-ratio tests(z, t, χ^2, F) for mean(s) or variance(s) can be geometrically related to volume of difference of two joint pdf's. One is an estimated joint pdf under null parameter space ω and the other is an estimated joint pdf under full parameter space Ω. For explanations, 'distance between two distributions' is defined. We study properties of it, and derive some results on the distance between two multivariate normal distributions.

Keywords : distance between two distributions, z, t, χ^2, F-tests, ANOVA, LR-test

1.서론

정규모집단의 확률표본으로 모평균과 모분산의 가설들에 대한 검정법은 통계적 검정이론 교육에서 가장 기본이 되는 토픽이다. 이들 중에서도 대표적인 문제들을 정리하면 다음과 같다.

문제 1) 단일표본의 경우 모평균에 관한 검정 - 모분산이 알려진 경우
문제 2) 단일표본의 경우 모평균에 관한 검정 - 모분산이 미지인 경우
문제 3) 단일표본의 경우 모분산에 관한 검정 - 모평균이 미지인 경우
문제 4) 두 독립표본의 경우 모평균의 동일성에 관한 검정 - 모분산들이 알려진 경우
문제 5) 두 독립표본의 경우 모평균의 동일성에 관한 검정 - 등분산이지만 미지인 경우
문제 6) 두 독립표본의 경우 모평균의 동일성에 관한 검정 - 이분산으로 미지인 경우
문제 7) 일원 분산분석

학부 고급 수리통계학의 추정단원에서는 추정량을 구하는 방법으로서 최우추정법, 적률법을 비롯하여 최소제곱법, 베이즈방법, 최소카이제곱법, 최소거리법 등이 소개·교육되고 있다. 그러나 검정단원에서는 가설검정법을 구하는 방법으로서 거의 독보적인 지위를 차지한다고 할 수 있는 우도비원리(likelihood-ratio principle) 이외에는 특별히 제공되지 않고 있다. 물론 석사과정 수준 이상에서는 합교원리(union-intersection principle)라는 개념이 교육되기도 한다. 사실 우도비라는 개념은 학부 수리통계학 수준에서는 쉽게 교육 또는 이해 할 수 있는 개념이라고 할 수 없다. 이에 본 연구에서는 최대우도의 비(比)라는 어려운 개념을 사용하지 않고도 귀무가설과 대립가설 각

1 Associate Professor, Department of Information Statistics, Mokwon University, Daejeon, 302-729, Korea,
E-mail : leekj@mokwon.ac.kr

각의 모수공간상에서 추정된 결합확률밀도함수들의 차의 면적이라는 기하적 개념으로도 문제1)~문제7)의 우도비 검정통계량들이 설명되어질 수 있음을 보이고자 한다.

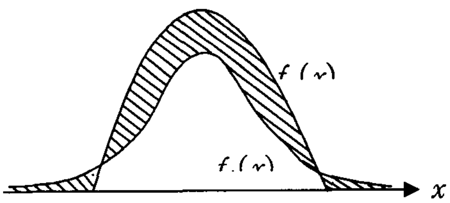
2절에서는 '분포간 거리'라는 두 확률분포들 사이의 거리를 정의하고 이의 성질들 몇 가지를 살펴본다. 3절에서는 두 다변량정규분포의 확률밀도함수들의 그래프들 사이의 관계를 살펴보고 모수가 다른 두 다변량정규분포들 사이의 분포간 거리에 대해 탐구한다. 4절에서는 결합분포간 거리 추정량과 우도비 검정통계량과의 관계를 문제1, 2, 3, 5, 7을 통해 살펴본다.

2.'분포간 거리'의 정의

[정의1] n차원의 두 연속형 확률변수벡터 $\underline{X}_a=(X_{a1}\ X_{a2}\ \cdots\ X_{an})'$와 $\underline{X}_b=(X_{b1}\ X_{b2}\ \cdots\ X_{bn})'$의 확률밀도함수를 각각 $f_a(\underline{x})=f_a(x_1,x_2,\cdots,x_n)$와 $f_b(\underline{x})=f_b(x_1,x_2,\cdots,x_n)$라고 했을 때 다음의 $D_n(a,b)$를 n차원의 두 확률분포 $f_a(\underline{x})$와 $f_b(\underline{x})$ 사이의 **'분포간 거리'**라 정의한다.

$$D_n(a,b)=\frac{1}{2}\int_{R^n}|f_a(\underline{x})-f_b(\underline{x})|(d\underline{x})$$

여기서, R^n은 n차원 유클리드 공간을 의미하며, $(d\underline{x})$은 $dx_1dx_2\cdots dx_n$을 나타낸다.



[그림1] n=1인 경우 두 분포간 거리의 기하적 의미를 보여주는 예 그림

[그림1]은 n=1인 경우에서의 분포간 거리의 기하적 의미를 보여주는 예 그림으로 빗금부분 면적의 반이 두 분포간 거리가 된다. n차원의 경우 분포간 거리는 두 확률밀도함수의 초곡면(hyper-surface)들로 둘러싸인 부분의 초부피(hyper-volume)의 1/2에 해당된다는 기하적 의미를 지닌다. 그리고 이 분포간 거리값이 0에 가까울수록 두 분포는 '확률적으로 공유하는 부분이 많음', 1에 가까울수록 두 분포는 '확률적으로 공유하는 부분이 적음'을 의미한다고 하겠다. 그리고 그 값이 0이면 두 분포는 '완전 일치', 1이면 '완전 불일치'라고 명명할 것이다.

참고로, 분포간 거리 $D_n(a,b)$는 일반적인 거리조건들 ① $D_n(a,a)=0$, ② $D_n(a,b)=D_n(b,a)$, ③ $D_n(a,b)+D_n(b,c)\geq D_n(a,c)$을 모두 만족한다. 그리고 ④ 항상 $0\leq D_n(a,b)\leq 1$도 성립된다.

[정의1]은 다변량적 일반 표현으로 정의된 것인데, 예를 들어, 이변량 확률밀도함수 $f_a(x_1,x_2)$와 $f_b(x_1,x_2)$의 분포간 거리는 다음과 같이 표현될 수 있다

$$D_2(a,b)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_a(x_1,x_2)-f_b(x_1,x_2)|\,dx_1dx_2$$

[정의2] n변량 정규분포 $N_n(\underline{\mu},\Sigma)$를 따르는 확률변수벡터 $\underline{X}$가 n차원 타원체(ellipsoid)의 외부 영역인 $H_n(\underline{\xi},M,\beta)=\{\underline{x}:(\underline{x}-\underline{\xi})'M(\underline{x}-\underline{\xi})\geq\beta,\ M$은 크기 n인 양정치행렬, β는 음 아닌 실수$\}$에 속할

확률을 $P\{\underline{X}\in H_n(\underline{\xi},M,\beta)\,;\,N_n(\underline{\mu},\Sigma)\}$라고 표현한다. 그리고 $\underline{\mu}=\underline{0}$이고 $\Sigma=I$일 때의 이 확률을 $\Phi_n(\underline{\xi},M,\beta)$라고 표현한다.

M의 최대고유값을 λ라 하자. 그러면 $H_n(\underline{\xi},M,\beta)=H_n(\underline{\xi},M/\lambda,\lambda\beta)$이고 M/λ의 최대고유값은 1이 되기 때문에 우리는 이를 고려하여 $H_n(\underline{\xi},M,\beta)$ 표현에서 n을 타원체의 '차원', $\underline{\xi}$를 타원체의 '중심벡터', M/λ을 타원체의 '모양행렬', $\lambda\beta$를 타원체의 '크기값'이라 명명한다.

[성질1] $P\{\underline{X}\in H_n(\underline{\xi},M,\beta)\,;\,N_n(\underline{\mu},\Sigma)\}=\Phi_n(\Sigma^{-1/2}(\underline{\xi}-\underline{\mu}),\Sigma^{1/2}M\Sigma^{1/2},\beta)$이 항상 성립된다.

(증명) $N_n(\underline{\mu},\Sigma)$을 따르는 확률변수벡터 $\underline{X}$의 확률밀도함수를 $\phi(\underline{x};\underline{\mu},\Sigma)$라고 하자. 그러면 증명과정은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&P\{\underline{X}\in H_n(\underline{\xi},M,\beta)\,;\,N_n(\underline{\mu},\Sigma)\} \\
&=\int_{H_n(\underline{\xi},M,\beta)}\phi(\underline{x};\underline{\mu},\Sigma)(d\underline{x}), && \text{[정의2]에 의해} \\
&=\int_{H_n(\Sigma^{-1/2}(\underline{\xi}-\underline{\mu}),\Sigma^{1/2}M\Sigma^{1/2},\beta)}\phi(\underline{z};\underline{0},I)(d\underline{z}), && \text{치환 } \underline{z}=\Sigma^{-1/2}(\underline{x}-\underline{\mu})\text{에 의해} \\
&=P\{\underline{Z}\in H_n(\Sigma^{-1/2}(\underline{\xi}-\underline{\mu}),\Sigma^{1/2}M\Sigma^{1/2},\beta)\,;\,N_n(\underline{0},I)\}, && \text{[정의2]에 의해} \\
&=\Phi_n(\Sigma^{-1/2}(\underline{\xi}-\underline{\mu}),\Sigma^{1/2}M\Sigma^{1/2},\beta) && \text{[정의2]에 의해}
\end{aligned}
$$

[성질1]은 어떤 다변량정규분포 $N_n(\underline{\mu},\Sigma)$에서라도 주어진 타원체의 외부영역 $H_n(\underline{\xi},M,\beta)$의 확률은 표준화 변환된 타원체의 외부영역 $H_n(\Sigma^{-1/2}(\underline{\xi}-\underline{\mu}),\Sigma^{1/2}M\Sigma^{1/2},\beta)$에 대한 다변량표준정규분포 $N_n(\underline{0},I)$에서의 확률과 같음을 의미하는 것이다.

[성질2] $\alpha<1/2$일 때 $P\{X\in H_1(\mu,\ \sigma^{-2},z_\alpha^2)\,;N_1(\mu,\sigma^2)\}=\Phi_1(0,1,z_\alpha^2)=2\alpha$가 된다. 여기서, z_α는 $\int_{-\infty}^{z_\alpha}\phi(x;0,1)dx=1-\alpha$를 만족하는 값이다.

(증명) [성질1]에 의해 $P\{X\in H_1(\mu,\ \sigma^{-2},z_\alpha^2)\,;N_1(\mu,\sigma^2)\}=\Phi_1(0,1,z_\alpha^2)$가 되고, [정의2]의 $\Phi_n(\ ,\ ,\ )$의 정의에 의해 $\Phi_1(0,1,z_\alpha^2)=\int_{x'x\geq z_\alpha^2}\phi(x;0,1)dx=2\alpha$가 된다.

$\Phi(\ )$가 일변량 표준정규분포의 분포함수(cdf)라면 [성질2]를 통해 $\Phi_1(0,1,\beta)=2(1-\Phi(\sqrt{\beta}))$가 성립함을 알 수 있다.

[성질3] $\lambda>0$이면 $\Phi_n(\underline{\xi},\lambda M,\beta)=\Phi_n(\underline{\xi},M,\beta/\lambda)$이 항상 성립된다.

(증명) 좌변$=\int_{(\underline{x}-\underline{\xi})'(\lambda M)(\underline{x}-\underline{\xi})\geq\beta}\phi(\underline{z};\underline{0},I)(d\underline{z})=\int_{(\underline{x}-\underline{\xi})'M(\underline{x}-\underline{\xi})\geq\beta/\lambda}\phi(\underline{z};\underline{0},I)(d\underline{z})=$우변

[성질4] P_n이 크기 n인 직교행렬이라면 $\Phi_n(\underline{\xi},I,\beta)=\Phi_n(P_n\underline{\xi},I,\beta)$이 항상 성립한다.

(증명) P_n가 직교행렬이면 $\underline{y}=P_n\underline{x}$라는 치환에서 $(d\underline{y})=(d\underline{x})$가 된다는 성질을 이용하면 다음에 의해 쉽게 증명된다.

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(\underline{\xi}, I, \beta) &= \int_{(\underline{x}-\underline{\xi})'(\underline{x}-\underline{\xi})\geq\beta} \phi(\underline{x};\underline{0}, I)(d\underline{x}) \\
&= \int_{(P_n'\underline{y}-\underline{\xi})'(P_n'\underline{y}-\underline{\xi})\geq\beta} \phi(\underline{y};\underline{0}, I)(d\underline{y}), \quad \text{치환 } \underline{y}=P_n\underline{x}\text{에 의해} \\
&= \int_{(\underline{y}-P_n\underline{\xi})'(\underline{y}-P_n\underline{\xi})\geq\beta} \phi(\underline{y};\underline{0}, I)(d\underline{y}) \\
&= \Phi_n(P_n\underline{\xi}, I, \beta)
\end{aligned}
$$

이 [성질4]는 다른 표현으로는 「$\underline{\xi}'\underline{\xi}=\underline{\eta}'\underline{\eta}$이면 $\Phi_n(\underline{\xi}, I, \beta)=\Phi_n(\underline{\eta}, I, \beta)$이 항상 성립」가 되는데 이는 n변량 표준정규분포에서 반경이 정해진 n차원 초구(hyper-sphere)영역 외부의 확률은 그 초구의 중심 좌표값들 개개에 의존한다기 보다는 원점에서 중심까지의 거리에만 의존함을 의미한다. 이에 본 연구에서는 편의상 $\underline{\eta}=P_n\underline{\xi}=(\sqrt{\underline{\xi}'\underline{\xi}}\ 0\ \cdots\ 0)'$을 이용할 것이며, $\sqrt{\underline{\xi}'\underline{\xi}}$을 초구의 '중심거리값'이라 한다.

3.두 다변량정규분포 확률밀도함수 그래프들의 관계와 이들의 분포간 거리

본 절에서는 차원이 동일한 두 다변량정규분포 확률밀도함수 그래프들의 교점에 관해 [정리1]에서 먼저 살펴보고, 이를 이용하여 [정의1]에서의 '분포간 거리' 정의에 따라 두 다변량정규분포들 사이의 분포간 거리를 [정리2]와 [정리3]에서 밝힌다. [정리2]는 공분산행렬이 동일한 경우의 결과이며, [정리3]은 공분산행렬이 서로 다른 경우의 결과이다. 그리고 [따름정리1], [따름정리2]를 통해 일변량 정규분포에 적용된 [정리1]~[정리3]의 유도과정과 결과를 제공한다. 이에는 교육적 목적을 위해 행렬표현을 사용하지 않았다.

[보조정리]

$$
\begin{aligned}
&(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1})(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}(\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a)-(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a) \\
&=(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)
\end{aligned}
$$

(증명) 행렬 A, B는 각각 크기가 $p\times p$, $q\times q$인 정칙(nonsingular)행렬이고, 행렬 C, D는 각각 크기가 $p\times q$, $q\times p$라고 하자. 그러면 $Q=A+CBD$일 때 다음 식(1)이 항상 성립된다(Muirhead, 1982. 580쪽 참조).

$$
Q^{-1}=A^{-1}-A^{-1}CB(B+BDA^{-1}CB)^{-1}BDA^{-1} \tag{1}
$$

이 식(1)를 이용하면 다음 식(2)의 관계식들을 얻을 수 있다.

$$
\{\Sigma_b-\Sigma_b\Sigma_a^{-1}\Sigma_b\}^{-1}=\Sigma_b^{-1}-(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}, \quad \{\Sigma_a-\Sigma_a\Sigma_b^{-1}\Sigma_a\}^{-1}=\Sigma_a^{-1}+(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1} \tag{2}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
\text{좌변} =\ & (\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1})(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}(\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a)-(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a) \\
=\ & \underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b \\
& +\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}(\Sigma_b^{-1}-\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a-(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a) \\
=\ & \underline{\mu}_b'\{\Sigma_b-\Sigma_b\Sigma_a^{-1}\Sigma_b\}^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_b'\{\Sigma_a-\Sigma_b\}^{-1}\underline{\mu}_a \\
& -\underline{\mu}_a'\{\Sigma_a-\Sigma_b\}^{-1}\underline{\mu}_b+\underline{\mu}_a'\{\Sigma_a\Sigma_b^{-1}\Sigma_a-\Sigma_a\}^{-1}\underline{\mu}_a-(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a) \\
=\ & \underline{\mu}_b'\{\Sigma_b^{-1}-(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_b'\{\Sigma_a-\Sigma_b\}^{-1}\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_a'\{\Sigma_a-\Sigma_b\}^{-1}\underline{\mu}_b \qquad \text{식(2)에 의해} \\
& -\underline{\mu}_a'\{\Sigma_a^{-1}+(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\}\underline{\mu}_a-(\underline{\mu}_b'\Sigma_b^{-1}\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a'\Sigma_a^{-1}\underline{\mu}_a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_b'\Sigma_b^{-1}\mu_b - \mu_b'(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\mu_b + \mu_b'\{\Sigma_b-\Sigma_a\}^{-1}\mu_a + \mu_a'\{\Sigma_b-\Sigma_a\}^{-1}\mu_b \\
&\quad - \mu_a'\Sigma_a^{-1}\mu_a - \mu_a'(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\mu_a - (\mu_b'\Sigma_b^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma_a^{-1}\mu_a) \\
&= -\mu_b'(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\mu_b + \mu_b'\{\Sigma_b-\Sigma_a\}^{-1}\mu_a + \mu_a'\{\Sigma_b-\Sigma_a\}^{-1}\mu_b - \mu_a'(\Sigma_b-\Sigma_a)^{-1}\mu_a \\
&= (\mu_b-\mu_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\mu_b-\mu_a) \\
&= \text{우변}
\end{aligned}
$$

[정리1] $X_a \sim N_n(\mu_a, \Sigma_a)$, $X_b \sim N_n(\mu_b, \Sigma_b)$의 확률밀도함수들 $\phi_a(x;\mu_a,\Sigma_a)$, $\phi_b(x;\mu_b,\Sigma_b)$에 대하여 부등식 $\phi_a(x;\mu_a,\Sigma_a) \geq \phi_b(x;\mu_b,\Sigma_b)$의 해집합을 $C_n(\phi_a \geq \phi_b)$라고 표현한다면 다음의 (i)와 (ii)가 성립된다.

(i) $\Sigma_a = \Sigma_b (=\Sigma)$일 때, $C_n(\phi_a \geq \phi_b) = \{x \mid 2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}x \leq \mu_b'\Sigma^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma^{-1}\mu_a\}$

(ii) $\Sigma_a \neq \Sigma_b$일 때, $C_n(\phi_a \geq \phi_b) = \{x \mid (x-\alpha)'A(x-\alpha) \geq \beta\}$

여기서, $A = \Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1}$, $\alpha = A^{-1}(\Sigma_b^{-1}\mu_b - \Sigma_a^{-1}\mu_a)$,

$\beta = (\mu_b-\mu_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\mu_b-\mu_a) + (\log|\Sigma_a| - \log|\Sigma_b|)$이다.

(증명)

$$
\begin{aligned}
&\phi_a(x;\mu_a,\Sigma_a) \geq \phi_b(x;\mu_b,\Sigma_b) \\
\Leftrightarrow\ & (2\pi)^{-n/2}|\Sigma_a|^{-1/2}\exp[-(x-\mu_a)'\Sigma_a^{-1}(x-\mu_a)/2] \\
&\quad \geq (2\pi)^{-n/2}|\Sigma_b|^{-1/2}\exp[-(x-\mu_b)'\Sigma_b^{-1}(x-\mu_b)/2] \\
\Leftrightarrow\ & (x-\mu_b)'\Sigma_b^{-1}(x-\mu_b) - (x-\mu_a)'\Sigma_a^{-1}(x-\mu_a) \geq \log(|\Sigma_a|/|\Sigma_b|) \\
\Leftrightarrow\ & x'\Sigma_b^{-1}x - \mu_b'\Sigma_b^{-1}x - x'\Sigma_b^{-1}\mu_b + \mu_b'\Sigma_b^{-1}\mu_b \\
&\quad - x'\Sigma_a^{-1}x + \mu_a'\Sigma_a^{-1}x + x'\Sigma_a^{-1}\mu_a - \mu_a'\Sigma_a^{-1}\mu_a \geq \log(|\Sigma_a|/|\Sigma_b|) \\
\Leftrightarrow\ & x'(\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})x - (\mu_b'\Sigma_b^{-1} - \mu_a'\Sigma_a^{-1})x \\
&\quad - x'(\Sigma_b^{-1}\mu_b - \Sigma_a^{-1}\mu_a) + (\mu_b'\Sigma_b^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma_a^{-1}\mu_a) \geq \log(|\Sigma_a|/|\Sigma_b|)
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

윗 식(3)에서 $\Sigma_a = \Sigma_b = \Sigma$을 대입하면 (i)이 증명된다. 한편 $\Sigma_a \neq \Sigma_b$일 때의 윗 부등식(3)는 다시 아래와 같이 재표현될 수 있는데 이의 우변에 [보조정리]의 결과를 적용하면 (ii)가 증명된다.

$$
\begin{aligned}
&\{x - (\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})^{-1}(\Sigma_b^{-1}\mu_b - \Sigma_a^{-1}\mu_a)\}'(\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})\{x - (\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})^{-1}(\Sigma_b^{-1}\mu_b - \Sigma_a^{-1}\mu_a)\} \\
&\geq (\mu_b'\Sigma_b^{-1} - \mu_a'\Sigma_a^{-1})(\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})^{-1}(\Sigma_b^{-1}\mu_b - \Sigma_a^{-1}\mu_a) - (\mu_b'\Sigma_b^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma_a^{-1}\mu_a) + \log(|\Sigma_a|) - \log(|\Sigma_b|)
\end{aligned}
$$

참고로 [정리1]-(i)의 결과는 공분산구조가 같은 두 개의 n변량정규분포 확률밀도함수 그래프들의 교집합은 평균벡터까지 일치하지 않은 한 $(n-1)$차원 초평면(hyper-plane)이 됨을 의미한다. 그리고 [정리1]-(ii)의 결과는 공분산구조가 다르되 $(\Sigma_a - \Sigma_b)$가 양정치(positive definite) 또는 음정치(negative definite) 행렬이 되면 n변량정규분포 확률밀도함수 그래프들의 교집합은 n차원 타원체가 됨을 의미한다.

[정리2] $X_a \sim N_n(\mu_a, \Sigma_a)$, $X_b \sim N_n(\mu_b, \Sigma_b)$이고, $\Sigma_a = \Sigma_b (=\Sigma)$일 때 다음의 사실들이 성립된다.

(i) $P\{X_a \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} = \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1/2}z \leq (\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}(\mu_b-\mu_a)} \phi_n(z;0,I_n)(dz)$

$P\{X_b \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} = \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1/2}z \leq -(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}(\mu_b-\mu_a)} \phi_n(z;0,I_n)(dz)$

(ii) 특히 $\mu_a = u1_n$, $\mu_b = v1_n$, $\Sigma = k^2 I_n$ (u, v, k는 $u < v$, $k > 0$인 상수)이라면 다음이 성립된

다. 여기서 $\Phi()$은 일변량 표준정규분포의 분포함수(cdf)이다.

$$P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} = \Phi(\sqrt{n}(v-u)/2k), \qquad P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} = \Phi(-\sqrt{n}(v-u)/2k)$$

(iii) 따라서 (ii)의 조건하에서는 다음이 성립된다. $D_n(a,b) = 2\Phi(\sqrt{n}(v-u)/2k) - 1$

(증명) [정리1]의 (i)에 의하면 $C_n(\phi_a \ge \phi_b) = \{\underline{x} \mid 2(\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a)'\Sigma^{-1}\underline{x} \le \underline{\mu}_b'\Sigma^{-1}\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a'\Sigma^{-1}\underline{\mu}_a\}$가 된다. 따라서 다음의 식(4), 식(5)에 의해 (i)이 증명된다.

$$\begin{aligned}
&P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} \\
&= P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\,;\, N_n(\underline{\mu}_a, \Sigma)\} \\
&= \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}x \le \mu_b'\Sigma^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma^{-1}\mu_a} \phi_n(\underline{x}\,;\underline{\mu}_a, \Sigma)(d\underline{x}), \quad \text{[정리1]의 } (ii)\text{에 의해} \\
&= \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1/2}z \le (\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}(\mu_b-\mu_a)} \phi_n(\underline{z}\,;\underline{0}, I_n)(d\underline{z}), \quad \text{치환 } \underline{x} = \Sigma^{1/2}\underline{z} + \underline{\mu}_a\text{에 의해}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} \\
&= P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\,;\, N_n(\underline{\mu}_b, \Sigma)\} \\
&= \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}x \le \mu_b'\Sigma^{-1}\mu_b - \mu_a'\Sigma^{-1}\mu_a} \phi_n(\underline{x}\,;\underline{\mu}_b, \Sigma)(d\underline{x}), \quad \text{[정리1]의 } (ii)\text{에 의해} \\
&= \int_{2(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1/2}z \le -(\mu_b-\mu_a)'\Sigma^{-1}(\mu_b-\mu_a)} \phi_n(\underline{z}\,;\underline{0}, I_n)(d\underline{z}), \quad \text{치환 } \underline{x} = \Sigma^{1/2}\underline{z} + \underline{\mu}_b\text{에 의해}
\end{aligned} \tag{5}$$

식(4)와 식(5)에서 $\underline{\mu}_a = u\underline{1}_n$, $\underline{\mu}_b = v\underline{1}_n$, $\Sigma = k^2 I_n$ (u, v, k는 $v > u$, $k > 0$인 상수)이라면, 그리고 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$이 표준정규분포로부터 얻어진 확률표본인 경우 $(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)/\sqrt{n}$은 표준정규분포를 따른다는 사실을 이용하면 (ii)를 증명하는 다음의 전개과정들을 얻을 수 있다.

$$P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} = \int_{\underline{1}'z/\sqrt{n} \le \sqrt{n}(v-u)/2k} \phi_n(\underline{z}\,;\underline{0}, I_n)(d\underline{z}) = \Phi(\sqrt{n}(v-u)/2k),$$

$$P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} = \int_{\underline{1}'z/\sqrt{n} \le -\sqrt{n}(v-u)/2k} \phi_n(\underline{z}\,;\underline{0}, I_n)(d\underline{z}) = \Phi(-\sqrt{n}(v-u)/2k)$$

그리고 (iii)은 다음에 의해 쉽게 증명된다.

$$\begin{aligned}
D_n(a,b) &= 1/2\{\ [P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\}], \quad \text{[정의1]에 의해} \\
&\qquad + [P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \le \phi_b)\} - P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \le \phi_b)\}]\ \} \\
&= 1/2\{\ [P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\}] \\
&\qquad + [\{1 - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\}\} - \{1 - P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\}\}]\} \\
&= P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} \\
&= \Phi(\sqrt{n}(v-u)/2k) - \Phi(-\sqrt{n}(v-u)/2k) \\
&= 2\Phi(\sqrt{n}(v-u)/2k) - 1, \quad \text{성질 } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)\text{을 이용하면}
\end{aligned}$$

[정리3] $\underline{X}_a \sim N_n(\underline{\mu}_a, \Sigma_a)$, $\underline{X}_b \sim N_n(\underline{\mu}_b, \Sigma_b)$이고, $(\Sigma_a - \Sigma_b)$가 양정치행렬일 때 다음의 사실들이 성립된다.

(i) $C_n(\phi_a \ge \phi_b) = \{\underline{x} \mid \phi_a(\underline{x}\,;\underline{\mu}_a, \Sigma_a) \ge \phi_b(\underline{x}\,;\underline{\mu}_b, \Sigma_b)\} = H_n(\underline{\alpha}, A, \beta)$

여기서, $\underline{\alpha}$, A, β는 [정리1]의 (ii)에 주어진 것과 같다.

(ii) $P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \ge \phi_b)\} = \Phi_n(\underline{\eta}_a, \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I, \beta)$

$P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} = \Phi_n(\underline{\eta}_b, I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}, \beta)$

여기서, $\underline{\eta}_a = (\sqrt{(\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a)'(I - \Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I - \Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a)}\ 0 \cdots 0)'$,

$\underline{\eta}_b = (\sqrt{(\underline{\mu}_a - \underline{\mu}_b)'(I - \Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I - \Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_a - \underline{\mu}_b)}\ 0 \cdots 0)'$ 이다.

(iii) 특히 $\underline{\mu}_a = \underline{\mu}_b$라면 다음이 성립되는데 이는 모두 $\Sigma_a^{-1/2}\Sigma_b^{1/2}$의 함수가 된다.

$P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} = \Phi_n(\underline{0}, \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I, \log|\Sigma_a\Sigma_b^{-1}|)$

$P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} = \Phi_n(\underline{0}, I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}, \log|\Sigma_a\Sigma_b^{-1}|)$

(iv) $D_n(a,b) = \Phi_n(\underline{\eta}_a, \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I, \beta) - \Phi_n(\underline{\eta}_b, I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}, \beta)$

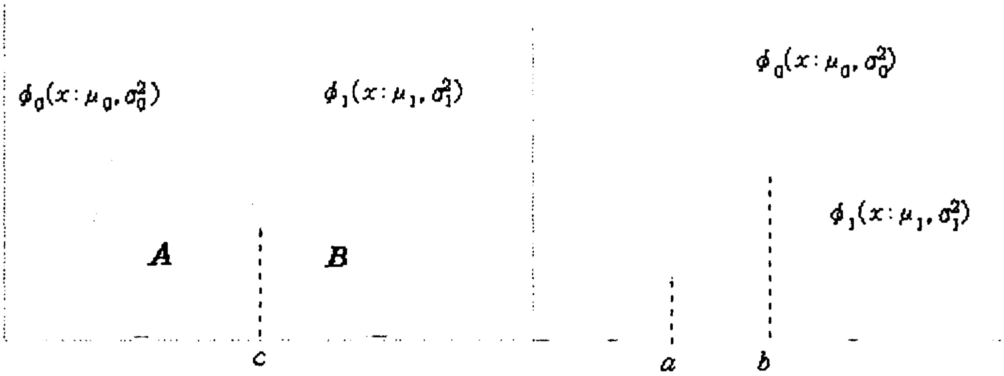
(증명) $(\Sigma_a - \Sigma_b)$가 양정치행렬이라면 $(\Sigma_b^{-1} - \Sigma_a^{-1})$도 양정치행렬이 된다는 사실을 이용하면 $C_n(\phi_a \geq \phi_b)$는 [정리1]의 (ii)에 의하면 n차원 타원체의 외부영역이 되고, 이는 [정의2]에 주어진 $H_n(\ ,\ ,\ )$의 조건을 만족하기 때문에 [정의2]에 의해 (i)이 증명된다. 한편 (ii)의 첫 번째 관계식은 아래 식(6)의 두 관계식을 이용하면 다음과 같이 증명된다.

$$\underline{a} - \underline{\mu}_a = (I - \Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a)\ , \qquad \Sigma_a^{1/2}A\Sigma_a^{1/2} = \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} &= P\{\underline{X}_a \in H_n(\underline{a}, A, \beta);\ N_n(\underline{\mu}_a, \Sigma_a)\} \\
&= P\{\underline{Z} \in H_n(\Sigma_a^{-1/2}(\underline{a} - \underline{\mu}_a), \Sigma_a^{1/2}A\Sigma_a^{1/2}, \beta);\ N_n(\underline{0}, I)\}, && \text{[성질1]에 의해} \\
&= \Phi_n(\Sigma_a^{-1/2}(\underline{a} - \underline{\mu}_a), \Sigma_a^{1/2}A\Sigma_a^{1/2}, \beta) \\
&= \Phi_n(\Sigma_a^{-1/2}(I - \Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b - \underline{\mu}_a), \Sigma_a^{1/2}A\Sigma_a^{1/2}, \beta), && \text{식(6)에 의해} \\
&= \Phi_n(\underline{\eta}_a, \Sigma_a^{1/2}A\Sigma_a^{1/2}, \beta), && \text{[성질4]에 의해} \\
&= \Phi_n(\underline{\eta}_a, \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I, \beta), && \text{식(6) 의해}
\end{aligned}$$

비슷한 과정에 의해 (ii)의 두 번째 관계식도 증명될 수 있다. (iii)은 (ii)의 특수한 경우로 이의 증명과정은 필요치 않겠다. (iv)는 다음에 의해 쉽게 증명된다.

$$\begin{aligned}
D_n(a,b) &= 1/2\{[P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\}] && \text{[정의1]에 의해} \\
&\quad + [P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \leq \phi_b)\} - P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \leq \phi_b)\}]\} \\
&= [P\{\underline{X}_a \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\} - P\{\underline{X}_b \in C_n(\phi_a \geq \phi_b)\}] \\
&= \Phi_n(\underline{\eta}_a, \Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I, \beta) - \Phi_n(\underline{\eta}_b, I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}, \beta), && \text{[정리3]의 }(ii)\text{에 의해}
\end{aligned}$$



[그림2] 두 일변량정규분포의 확률밀도함수 그래프들의 관계

[따름정리1] $N(\mu_0, \sigma_0^2)$와 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$의 확률밀도함수를 각각 $\phi_0(x;\mu_0, \sigma_0^2)$, $\phi_1(x;\mu_1, \sigma_1^2)$라 하자. 그러면 두 확률밀도함수의 곡선은 i) $\mu_0 = \mu_1$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$이면 완전히 일치하고, ii) $\mu_0 \neq \mu_1$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$이면 오직 한 점 $c = (\mu_0 + \mu_1)/2$에서만 만나며, iii) $\sigma_0^2 \neq \sigma_1^2$이면 다음의 서로 다른 두 점 a, b $(a < b)$에서 만난다([그림2] 참조).

$$a = \frac{\mu_0\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_0^2 - \sigma_0\sigma_1\sqrt{(\mu_1-\mu_0)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2)}}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

$$b = \frac{\mu_0\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_0^2 + \sigma_0\sigma_1\sqrt{(\mu_1-\mu_0)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2)}}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$$

(증명) i)는 자명하므로 ii)와 iii)만 증명한다. [정리1]의 결과를 이용하여 증명할 수 있지만 이해를 위해 행렬표현이 없는 방식으로 직접 증명을 해 본다.

$$\begin{aligned}
& \phi_0(x) = \phi_1(x) \\
\Leftrightarrow\ & (\sqrt{2\pi}\sigma_0)^{-1}\exp\{-(x-\mu_0)^2/2\sigma_0^2\} = (\sqrt{2\pi}\sigma_1)^{-1}\exp\{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2\} \\
\Leftrightarrow\ & \sigma_1/\sigma_0 = \exp\{(x-\mu_0)^2/2\sigma_0^2 - (x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2\} \\
\Leftrightarrow\ & \log(\sigma_1^2/\sigma_0^2) = \{\sigma_1^2(x-\mu_0)^2 - \sigma_0^2(x-\mu_1)^2\}/\sigma_0^2\sigma_1^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)x^2 - 2(\mu_0\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_0^2)x + (\mu_0^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_0^2) - \sigma_0^2\sigma_1^2(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2) = 0
\end{aligned}$$

이는 $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 \cdot\ \mu_0 \neq \mu_1$일 때 x에 대한 1차방정식으로 $x = (\mu_0 + \mu_1)/2$가 유일해가 되고, $\sigma_0^2 \neq \sigma_1^2$일 때는 x에 대한 이차방정식이 되는데 이의 판별식(Determinant) D'은 다음과 같고 이로부터 서로 다른 두 점 $x = a$, $x = b$에서 만남을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
D' &= (\mu_0\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_0^2)^2 - (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)(\mu_0^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_0^2) + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)\sigma_0^2\sigma_1^2(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2) \\
&= \sigma_0^2\sigma_1^2(\mu_1 - \mu_0)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)\sigma_0^2\sigma_1^2(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2) \\
&= \sigma_0^2\sigma_1^2[(\mu_1 - \mu_0)^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_0^2)(\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2)] > 0, \quad \text{if } \sigma_0^2 \neq \sigma_1^2
\end{aligned}$$

[따름정리2] 두 정규분포 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$와 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 사이의 분포거리 $D_1(0,1)$는 다음과 같다.

i) $\mu_0 = \mu_1$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 (= \sigma^2)$일 때 $D_1(0,1) = 0$,

ii) $\mu_0 \neq \mu_1$, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 (= \sigma^2)$일 때 $D_1(0,1) = 2\Phi(|\mu_1 - \mu_0|/2\sigma) - 1$,

iii) $\sigma_0^2 \neq \sigma_1^2$일 때 $D_1(0,1) = |\Phi(\sigma_0\alpha + \sigma_1\beta) - \Phi(\sigma_0\alpha - \sigma_1\beta) - \Phi(\sigma_1\alpha + \sigma_0\beta) + \Phi(\sigma_1\alpha - \sigma_0\beta)|$,

여기서, $\alpha = -(\mu_1 - \mu_0)/(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 + (\log\sigma_1^2 - \log\sigma_0^2)/(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}$이고 $\Phi(\ )$은 표준정규분포의 분포함수(cdf)이다.

(증명) 여기에서도 i)은 자명하므로 ii)와 iii)만 증명한다. ii)의 경우 우선 $\mu_0 < \mu_1$라고 하자. 여기서 [따름정리1]의 (ii)를 이용하면

$$\begin{aligned} D_1(0,1) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\phi_0(x)-\phi_1(x)|dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{(\mu_0+\mu_1)/2}[\phi_0(x)-\phi_1(x)]dx + \int_{(\mu_0+\mu_1)/2}^{\infty}[\phi_1(x)-\phi_0(x)]dx\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{(\mu_0+\mu_1)/2-\mu_0}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\mu_0+\mu_1)/2-\mu_1}{\sigma}\right) \\ &= 2\,\Phi(\frac{\mu_1-\mu_0}{2\sigma})-1 \end{aligned}$$

가 얻어진다. 그리고 $\mu_0 > \mu_1$라면 $D_1(0,1)=2\Phi((\mu_0-\mu_1)/2\sigma)-1$가 비슷한 과정을 통해 얻어진다. 따라서 ii)가 증명된다.

iii)을 증명하기에 앞서 우선 서로 다른 분산을 가지는 두 정규분포의 확률밀도함수 곡선들 사이에는 다음의 그래프적 관계가 있음을 [따름정리1]로부터 쉽게 얻을 수 있다([그림2] 참조). 즉, μ_1, μ_2의 크기에 관계없이 (a,b)구간 밖에서는 분산이 큰 분포의 확률밀도함수 곡선이 분산이 작은 분포의 확률밀도함수 곡선보다 위에 있고, (a,b)구간 안에서는 반대로 분산이 큰 분포의 확률밀도함수 곡선이 분산이 작은 분포의 확률밀도함수 곡선보다 아래에 있게 된다. 이제 iii)을 증명하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_1(0,1) &= \frac{1}{2}\left|\int_{-\infty}^{a}[\phi_1(x)-\phi_0(x)]dx+\int_{a}^{b}[\phi_0(x)-\phi_1(x)]dx+\int_{b}^{\infty}[\phi_1(x)-\phi_0(x)]dx\right| \\ &= \left|\int_a^b\phi_0(x)dx-\int_a^b\phi_1(x)dx\right| \\ &= \left|\Phi\left(\frac{b-\mu_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu_0}{\sigma_0}\right)-\Phi\left(\frac{b-\mu_1}{\sigma_1}\right)+\Phi\left(\frac{a-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right| \\ &= |\,\Phi(\sigma_0\alpha+\sigma_1\beta)-\Phi(\sigma_0\alpha-\sigma_1\beta)-\Phi(\sigma_1\alpha+\sigma_0\beta)+\Phi(\sigma_1\alpha-\sigma_0\beta)\,| \end{aligned}$$

4.결합분포간 거리추정량과 우도비 검정통계량의 관계

만일 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $f(x;\underline{\theta})$로부터 얻어진 확률표본이라 한다면 이들의 결합확률밀도함수는 $f(\underline{x};\underline{\theta})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\underline{\theta})=\Pi_{i=1}^{n}f(x_i;\underline{\theta})$가 된다. 그리고 귀무가설과 대립가설을 각각 $H_0:\underline{\theta}\in\omega$, $H_1:\underline{\theta}\in(\Omega-\omega)$이라 한다면, 그리고 모수공간 ω에서 추정된 $\underline{\theta}$의 추정량을 $\hat{\underline{\theta}}_0$, 모수공간 Ω에서 추정된 $\underline{\theta}$의 추정량을 $\hat{\underline{\theta}}_1$이라 한다면 ω와 Ω에서 각각 추정된 결합확률밀도함수들 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$, $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$은 다음과 같다.

$$f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\underline{\theta}}_0)=\Pi_{i=1}^{n}f(x_i;\hat{\underline{\theta}}_0),\quad f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\underline{\theta}}_1)=\Pi_{i=1}^{n}f(x_i;\hat{\underline{\theta}}_1)$$

여기서 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$와 $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$가 우도(likelihood)들이 아니라 결합확률밀도함수들 이라는 점에 유의할 필요가 있다. 다시 말하면 $\hat{\underline{\theta}}_0$, $\hat{\underline{\theta}}_1$는 추정량들로서 비록 $\underline{x}$의 함수처럼 표현되지만 이들은

$f_0(x;\hat{\theta}_0)$와 $f_1(x;\hat{\theta}_1)$의 변수를 표시하는 x와 결합되면 안 된다는 것이다. 물론 우도는 이들의 결합을 통해서 얻어진다. 따라서 아래 [정의2]에서 $\hat{D}_n(0,1)$ 을 계산할 때는 $\hat{\theta}_0$과 $\hat{\theta}_1$을 상수 취급하여야 한다.

[정의2] 모수공간 ω에서 추정된 결합확률밀도함수 $f_0(x:\hat{\theta}_0)$와 모수공간 Ω에서 추정된 결합확률밀도함수 $f_1(x:\hat{\theta}_1)$ 사이의 분포간 거리를 '**결합분포간 거리추정량**'이라 하고, $\hat{D}_n(0,1)$ 로 표현한다.

$$\hat{D}_n(0,1) = \frac{1}{2}\int_{R^n} |f_0(x;\hat{\theta}_0)-f_1(x;\hat{\theta}_1)|(dx)$$

사실 결합분포 거리통계량을 정의함에 있어서 $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$이 반드시 최대우도법에 의한 추정량일 필요는 없다. 그러나 이들이 최우추정량일 때는 결합분포 거리통계량은 우도비 검정통계량과 밀접한 관계를 가진다. 이하에서는 정규모집단에서의 모평균과 모분산에 관한 가설검정에서 $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_1$이 최우추정량일 경우의 결합분포 거리통계량이 우도비 검정통계량의 함수가 된다는 것을 몇 가지의 경우에 대해 보이고자 한다.

참고로, $f(x;\theta)=\phi(x;\mu,\sigma^2)$이라면 즉 $X_1,X_2,\cdots,X_n$이 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포로부터 얻어진 확률표본이라고 한다면 결합확률밀도함수 $f(x;\theta)$은 n변량정규분포 $N_n(\mu 1_n,\sigma^2 I_n)$의 확률밀도함수 $\phi_n(\mu 1_n,\sigma^2 I_n)$가 된다는 것은 이하 부분들을 이해하는데 필요한 중요한 사실이 된다.

[Z-검정] $X_1,X_2,\cdots,X_n$이 모분산이 σ_0^2인 것으로 알려진 정규모집단 $N(\mu,\sigma_0^2)$로부터 얻어진 확률표본이라 하자. 귀무가설과 대립가설이 $H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu>\mu_0$인 검정문제에 대한 우도비 검정통계량은 $z=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/\sigma_0$이다. 이에 대한 결합분포간 거리추정량을 구해보자. 이 검정문제에서의 결합확률밀도함수 $f(x;\theta)$, 모수 θ, 모수공간들 ω와 Ω, ω에서 추정된 θ와 $f(x;\theta)$의 추정량 $\hat{\theta}_0$와 $f_0(x;\hat{\theta}_0)$, Ω에서 추정된 θ와 $f(x;\theta)$의 추정량 $\hat{\theta}_1$와 $f_1(x;\hat{\theta}_1)$은 각각 다음과 같다.

$$f(x;\theta)=\phi_n(\mu 1_n,\sigma_0^2 I_n),\quad \theta=\mu,\quad \omega=\{\mu;\mu=\mu_0\},\quad \Omega=\{\mu;\mu\ge\mu_0\}$$

$$\hat{\theta}_0=\mu_0,\quad f_0(x;\hat{\theta}_0)=\phi_n(\mu_0 1_n,\sigma_0^2 I_n),\quad \hat{\theta}_1=\begin{cases}\bar{x}, & \text{if } \bar{x}>\mu_0\\ \mu_0, & \text{if } \bar{x}\le\mu_0\end{cases},\quad f_1(x;\hat{\theta}_1)=\phi_n(\hat{\theta}_1 1_n,\sigma_0^2 I_n)$$

따라서 이 경우는 두 결합분포의 공분산행렬이 동일한 경우이므로 [정리2]의 iii)을 이용하여 결합분포간 거리추정량을 구하기 위해서는 [정리2]의 iii)의 조건에 의해 $\bar{x}>\mu_0$인 경우에는 $\mu_a=\mu_0 1_n$, $\Sigma_a=\sigma_0^2 I_n$, $\mu_b=\bar{x}1_n$, $\Sigma_b=\sigma_0^2 I_n$(즉, $v=\bar{x}$, $u=\mu_0$, $k=\sigma_0$)라고, $\bar{x}\le\mu_0$인 경우에는 $\mu_a=\mu_0 1_n$, $\Sigma_a=\sigma_0^2 I_n$, $\mu_b=\mu_0 1_n$, $\Sigma_b=\sigma_0^2 I_n$(즉, $v=\mu_0$, $u=\mu_0$, $k=\sigma_0$)라고 두어야 한다. 따라서 결합분포간 거리추정량은 다음과 같다.

$$\hat{D}_n(0,1) = \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/2\sigma_0)-1, & \bar{x} > \mu_0\text{일 때} \\ 0, & \bar{x} \le \mu_0\text{일 때} \end{cases}$$

그런데 이는 우도비 검정통계량인 $z=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/\sigma_0$의 함수인 것을 볼 수 있으며, z의 값이 클수록 $\hat{D}_n(0,1)$의 값도 커짐을 알 수 있다.

[T-검정(단일집단)] 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 μ와 σ^2가 미지인 정규모집단 $N(\mu, \sigma^2)$로부터 얻어진 것으로 가정하자. 귀무가설과 대립가설이 $H_0: \mu=\mu_0$, $H_1: \mu \neq \mu_0$인 검정문제에 대한 우도비 검정통계량은 $t=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)/s_*$인 것으로 널리 알려져 있다. 여기서, $s_*^2=\Sigma_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$이다. 이 문제에 대한 결합분포간 거리추정량도 구해보자. 이 검정문제에서의 결합확률밀도함수 $f(\underline{x};\underline{\theta})$, 모수 $\underline{\theta}$, 모수공간들 ω와 Ω, ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_0$와 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$, Ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_1$와 $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$은 각각 다음과 같다.

$$f(\underline{x};\underline{\theta}) = \phi_n(\mu \underline{1}_n, \sigma^2 I_n), \quad \underline{\theta}=(\mu\ \sigma^2)',$$
$$\omega=\{(\mu\ \sigma^2)';\mu=\mu_0, 0<\sigma^2<\infty\}, \quad \Omega=\{(\mu\ \sigma^2)'; -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\},$$
$$\hat{\underline{\theta}}_0=(\mu_0\ s_0^2)', \quad f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)=\phi_n(\mu_0\underline{1}_n, s_0^2 I_n), \quad \hat{\underline{\theta}}_1=(\bar{x}\ s^2)', \quad f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)=\phi_n(\bar{x}\underline{1}_n, s^2 I_n)$$

여기서 $s_0^2=\Sigma_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2/n$, $s^2=\Sigma_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2/n$으로 $s_0^2=s^2+(\bar{x}-\mu_0)^2$, $s^2=(n-1)s_*^2/n$라는 관계가 있다. [정리3]의 iv)에 의해 결합분포간 거리추정량을 구하기 위해서는 $\mu_a=\mu_0\underline{1}_n$, $\Sigma_a=s_0^2 I_n$, $\mu_b=\bar{x}\underline{1}_n$, $\Sigma_b=s^2 I_n$라고 두어야 한다. 왜냐하면 [정리3]의 결과를 이용하기 위해서는 $(\Sigma_a-\Sigma_b)$가 양정치행렬이 되어야 하기 때문이다. 그러면 우선 다음과 같은 관계들을 얻을 수 있는데 이의 중간 계산과정은 별첨의 (I)부분에 남긴다.

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=\{t^2/(n-1)\}I_n, \qquad I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=\{t^2/(n-1)\}/\{1+t^2/(n-1)\}I_n,$$
$$\eta_a=\left(\sqrt{n+n\{t^2/(n-1)\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0\right)', \quad \eta_b=\left(\sqrt{n\{t^2/(n-1)\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0\right)', \quad \beta=n+n\log(1+t^2/(n-1))$$

따라서 [정리3]-vi와 [성질3]으로부터 다음과 같은 결합분포간 거리추정량 $\hat{D}_n(0,1)$을 얻을 수 있는데 이는 완전히 $t^2=n(\bar{x}-\mu_0)^2/s_*^2$의 함수로서 σ^2에 의존하지 않음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{D}_n(0,1) = \ & \Phi_n\left((\sqrt{n+n\{t^2/(n-1)\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)', I_n, \{n+n\log(1+t^2/(n-1))\}\{t^2/(n-1)\}^{-1}\right) \\ & -\Phi_n\left((\sqrt{n\{t^2/(n-1)\}^{-1}}\ \ 0\ \cdots\ 0)', I_n, \{n+n\log(1+t^2/(n-1))\}\{1+\{t^2/(n-1)\}^{-1}\}\right)\end{aligned}$$

[χ^2-검정] 확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 μ와 σ^2가 미지인 정규모집단 $N(\mu, \sigma^2)$로부터 얻어진 것으로 가정하자. 귀무가설과 대립가설이 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$인 검정문제에 대한 일반우도비 검정통계량은 $\chi^2 = ns^2/\sigma_0^2$인 것으로 널리 알려져 있다. 이에 대한 결합분포간 거리추정량을 구해보자. 이 검정문제에서의 결합확률밀도함수 $f(\underline{x};\underline{\theta})$, 모수 $\underline{\theta}$, 모수공간들 ω와 Ω, ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_0$와 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$, Ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_1$와 $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$은 각각 다음과 같다.

$$f(\underline{x};\underline{\theta}) = \phi_n(\mu \mathbb{1}_n, \sigma^2 I_n), \quad \underline{\theta} = (\mu \ \ \sigma^2)',$$
$$\omega = \{(\mu \ \ \sigma^2)' : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 = \sigma_0^2\}, \quad \Omega = \{(\mu \ \ \sigma^2)' : -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma^2 < \infty\},$$
$$\hat{\underline{\theta}}_0 = (\bar{x} \ \ \sigma_0^2)', \quad f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0) = \phi_n(\bar{x}\mathbb{1}_n, \sigma_0^2 I_n), \quad \hat{\underline{\theta}}_1 = (\bar{x} \ \ s^2)', \quad f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1) = \phi_n(\bar{x}\mathbb{1}_n, s^2 I_n)$$

[정리3]의 iv)에 의해 결합분포간 거리추정량을 구하기 위해서는 $\sigma_0^2 > s^2$인 경우는 $\underline{\mu}_a = \bar{x}\mathbb{1}_n$, $\Sigma_a = \sigma_0^2 I_n$, $\mu_b = \bar{x}\mathbb{1}_n$, $\Sigma_b = s^2 I_n$라고 두어야 한다. 그리고 $\sigma_0^2 < s^2$인 경우는 $\underline{\mu}_a = \bar{x}\mathbb{1}_n$, $\Sigma_a = s^2 I_n$, $\underline{\mu}_b = \bar{x}\mathbb{1}_n$, $\Sigma_b = \sigma_0^2 I_n$라고 두어야 한다. 왜냐하면 [정리3]의 결과를 이용하기 위해서는 $(\Sigma_a - \Sigma_b)$가 양정치행렬이 되어야 하기 때문이다. 그러면 $\sigma_0^2 > s^2$인 경우 우선 다음과 같은 관계들을 얻을 수 있는데 이의 중간 계산과정은 별첨의 (II)-1 부분에 남긴다.

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I = (n/\chi^2 - 1)I_n \ , \quad I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2} = (1 - \chi^2/n)I_n \ , \quad \underline{\eta}_a = \underline{0}, \ \ \underline{\eta}_b = \underline{0}, \ \ \beta = n\log(n/\chi^2)$$
$$\begin{aligned} \hat{D}_n(0,1) &= \Phi_n(0, (n/\chi^2 - 1)I_n, n\log(n/\chi^2)) - \Phi_n(0, (1 - \chi^2/n)I_n, n\log(n/\chi^2)) \\ &= \Phi_n(0, I_n, \{n\log(n/\chi^2)\}/(n/\chi^2 - 1)) - \Phi_n(0, I_n, \{n\log(n/\chi^2)\}/(1 - \chi^2/n)) \end{aligned}$$

그리고 $\sigma_0^2 < s^2$인 경우는 다음과 같은 관계들을 얻을 수 있는데 이의 중간 계산과정은 별첨의 (II)-2 부분에 남긴다.

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2} - I = (\chi^2/n - 1)I_n, \quad I - \Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2} = (1 - n/\chi^2)I_n, \quad \underline{\eta}_a = \underline{0}, \ \ \underline{\eta}_b = \underline{0}, \ \ \beta = n\log(\chi^2/n)$$
$$\begin{aligned} \hat{D}_n(0,1) &= \Phi_n(0, (\chi^2/n - 1)I_n, n\log(\chi^2/n)) - \Phi_n(0, (1 - n/\chi^2)I_n, n\log(\chi^2/n)) \\ &= \Phi_n(0, I_n, \{n\log(\chi^2/n)\}/(\chi^2/n - 1)) - \Phi_n(0, I_n, \{n\log(\chi^2/n)\}/(1 - n/\chi^2)) \end{aligned}$$

[T-검정(두 독립집단)] 독립인 두 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$으로부터 표본의 크기가 n_1, n_2인 확률표본을 얻었다고 가정하자. 여기서 공통 모분산인 σ^2은 미지이다. 이 때 귀무가설과 대립가설이 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$인 검정문제에 대한 우도비 검정통계량은 $t_p = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\{s_{p*}\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}\}$로서, $s_{p*}^2 = \Sigma_{i=1}^{2}\Sigma_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2/(n-2)$이다. 이 문제에 대한 결합분포간 거리추정량을 구해보자. 이 검정문제에서의 결합확률밀도함수 $f(\underline{x};\underline{\theta})$, 모수 $\underline{\theta}$, 모수공간들

ω와 Ω, ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_0$와 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$, Ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_1$와 $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$은 각각 다음과 같다.

$$f(\underline{x};\underline{\theta}) = \phi_{n_1}(\underline{x}_1;\mu_1\underline{1}_{n_1},\sigma^2 I_{n_1})\cdot\phi_{n_2}(\underline{x}_2;\mu_2\underline{1}_{n_2},\sigma^2 I_{n_2}) = \phi_n(\underline{x};\underline{\mu},\Sigma),\quad \theta=(\mu_1\ \mu_2\ \sigma^2)'$$

$$\omega=\{(\mu_1\ \mu_2\ \sigma^2)';-\infty<\mu_1=\mu_2<\infty,0<\sigma^2<\infty\},\ \Omega=\{(\mu_1\ \mu_2\ \sigma^2)';-\infty<\mu_1<\infty,-\infty<\mu_2<\infty,0<\sigma^2<\infty\}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_0=(\overline{m}\ \overline{m}\ s_m^2)',\ f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)=\phi_n(\underline{x};\overline{m}\underline{1}_n,s_m^2 I_n),\ \hat{\underline{\theta}}_1=(\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ s_p^2)',\ f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)=\phi_n(\underline{x};\overline{\underline{x}},s_p^2 I_n)$$

여기서, $\underline{x}_i=(x_{i1}\ x_{i2}\ \cdots\ x_{in_i})'\ (i=1,2)$, $\underline{x}=(\underline{x}_1'\ \underline{x}_2')'$, $\underline{\mu}=(\mu_1\underline{1}_{n_1}'\ \mu_2\underline{1}_{n_2}')'$, $\Sigma=\sigma^2 I_n$, $n=n_1+n_2$, $\overline{x}_i=\Sigma_{j=1}^{n_i}x_{ij}/n_i\ (i=1,2)$, $\overline{m}=(n_1\overline{x}_1+n_2\overline{x}_2)/n$, $\overline{\underline{x}}=(\overline{x}_1\underline{1}_{n_1}'\ \overline{x}_2\underline{1}_{n_2}')'$, $s_m^2=\Sigma_{i=1}^2\Sigma_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{m})^2/n$, $s_p^2=\Sigma_{i=1}^2\Sigma_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2/n$으로, $s_m^2=s_p^2+(n_1n_2/n^2)(\overline{x}_1-\overline{x}_2)^2$, $s_p^2=(n-2)s_{P*}^2/n$의 관계가 있다.

[정리3]의 iv)에 의해 결합분포간 거리추정량을 구하기 위해서는 $\underline{\mu}_a=\overline{m}\underline{1}_n$, $\Sigma_a=s_m^2 I_n$, $\underline{\mu}_b=\overline{\underline{x}}$, $\Sigma_b=s_p^2 I_n$이라고 두어야 한다. 왜냐하면 [정리3]의 결과를 이용하기 위해서는 $(\Sigma_a-\Sigma_b)$가 양정치행렬이 되어야 하기 때문이다. 그러면 우선 다음과 같은 관계들을 얻을 수 있는데 이의 중간 계산과정은 별첨의 (III)부분에 남긴다.

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=t_p^2/(n-2)I_n\ ,\qquad I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=\{t_p^2/(n-2)\}/\{1+t_p^2/(n-2)\}I_n\ ,$$

$$\underline{\eta}_a=(\sqrt{n+n(t_p^2/(n-2))^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)',\quad \eta_b=(\sqrt{n(t_p^2/(n-2))^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)',\ \beta=n+n\log(1+t_p^2/(n-2))$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_n(0,1)\ =\ &\Phi_n((\sqrt{n+n(t_p^2/(n-2))^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)',I_n,\{n+n\log(1+t_p^2/(n-2))\}\{t_p^2/(n-2)\}^{-1})\\ &-\Phi_n((\sqrt{n(t_p^2/(n-2))^{-1}}\ \ 0\ \cdots\ 0)',I_n,\{n+n\log(1+t_p^2/(n-2))\}\{1+\{t_p^2/(n-2)\}^{-1}\})\end{aligned}$$

이로부터 $\hat{D}_n(0,1)$은 모두 t_p^2에만 의존함을 볼 수 있다

[일원분산분석] 독립인 k개의 정규모집단 $N(\mu_i,\sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,k)$으로부터 각각 표본의 크기가 n_i인 확률표본들을 얻었다고 가정하자. 여기서 공통 모분산인 σ^2은 미지이다. 이 때 귀무가설과 대립가설이 $H_0{:}\,\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$, $H_1:$ *not* H_0인 일원분산분석 문제에 대한 우도비 검정통계량은 $F=\{n(s_m^2-s_p^2)/(k-1)\}/\{ns_p^2/(n-k)\}$인 것으로 잘 알려져 있다. 여기서 표현들의 정의는 아래를 참조하면 된다. 이 문제에 대한 결합분포간 거리추정량을 구해보자. 이 검정문제에서의 결합확률밀도함수 $f(\underline{x};\underline{\theta})$, 모수 $\underline{\theta}$, 모수공간들 ω와 Ω, ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_0$와 $f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)$, Ω에서 추정된 $\underline{\theta}$와 $f(\underline{x};\underline{\theta})$의 추정량 $\hat{\underline{\theta}}_1$와 $f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)$은 각각 다음과 같다.

$$f(\underline{x})=\Pi_{i=1}^k\phi_{n_i}(\underline{x}_i;\mu_i\underline{1}_{n_i},\sigma^2 I_{n_i})=\phi_n(\underline{x};\underline{\mu},\Sigma),\quad \underline{\theta}=(\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_k\ \sigma^2)',$$

$$\omega=\{(\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_k\ \sigma^2)';-\infty<\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k<\infty,0<\sigma^2<\infty\},$$

$$\Omega=\{(\mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_k\ \sigma^2)';-\infty<\mu_i<\infty\ ,i=1,2,\cdots,k,\ 0<\sigma^2<\infty\ \}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_0=(\overline{m}\ \overline{m}\ \cdots\ \overline{m}\ s_m^2)',\ f_0(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_0)=\phi_n(\underline{x};\overline{m}\underline{1}_n,s_m^2 I_n),$$

$$\hat{\underline{\theta}}_1=(\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \cdots\ \overline{x}_k\ s_p^2)',\ f_1(\underline{x};\hat{\underline{\theta}}_1)=\phi_n(\underline{x};\overline{\underline{x}},s_p^2 I_n)$$

여기서, $n=\Sigma_{i=1}^k n_i$, $\underline{x}_i=(x_{i1}\ x_{i2}\ \cdots\ x_{in_i})'\ (i=1,2,\cdots,k)$, $\underline{x}=(\underline{x}_1'\ \underline{x}_2'\ \cdots\ \underline{x}_k')'$,

$\underline{\mu}=(\mu_1 1_{n_1}{}' \ \mu_2 1_{n_2}{}' \ \cdots \ \mu_k 1_{n_k}{}')'$, $\Sigma=\sigma^2 I_n$, $\bar{x}_i=\Sigma_{j=1}^{n_i} x_{ij}/n_i \ (i=1,2,\cdots,k)$, $\overline{m}=\Sigma_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i/n$, $\underline{\bar{x}}=(\bar{x}_1 1_{n_1}{}' \ \bar{x}_2 1_{n_2}{}' \ \cdots \ \bar{x}_k 1_{n_k}{}')'$, $s_m^2=\Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{m})^2/n$, $s_p^2=\Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2/n$으로, $s_m^2=s_p^2+\Sigma_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i-\overline{m})^2/n$의 관계가 있다.

[정리3]의 iv)에 의해 결합분포간 거리추정량을 구하기 위해서는 $\underline{\mu}_a=\overline{m}1_n$, $\Sigma_a=s_m^2 I_n$, $\underline{\mu}_b=\underline{\bar{x}}$, $\Sigma_b=s_p^2 I_n$이라고 두어야 한다. 왜냐하면 [정리3]의 결과를 이용하기 위해서는 $(\Sigma_a-\Sigma_b)$가 양정치행렬이 되어야 하기 때문이다. 그러면 우선 다음과 같은 관계들을 얻을 수 있는데 이의 중간 계산과정은 별첨의 (IV)부분에 남긴다.

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=(k-1)F/(n-k)\, I_n\ , \quad I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=\{(k-1)F/(n-k)\}/\{(k-1)F/(n-k)+1\}\, I_n$$

$$\eta_a=(\sqrt{n+n\{(k-1)F/(n-k)\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)'\ , \quad \eta_b=(\sqrt{n\{(k-1)F/(n-k)\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)'\ ,$$

$$\beta=\ n+n\log\{1+(k-1)F/(n-k)\}$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_n(0,1)\ =\ &\Phi_n\left((\sqrt{n+n\left\{\frac{(k-1)F}{(n-k)}\right\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)', I_n, \left\{n+n\log(1+\frac{(k-1)F}{(n-k)})\right\}\left\{\frac{(k-1)F}{(n-k)}\right\}^{-1}\right)\\ &-\Phi_n\left((\sqrt{n\left\{\frac{(k-1)F}{(n-k)}\right\}^{-1}}\ 0\ \cdots\ 0)', I_n, \left\{n+n\log(1+\frac{(k-1)F}{(n-k)})\right\}\left\{1+\left\{\frac{(k-1)F}{(n-k)}\right\}^{-1}\right\}\right)\end{aligned}$$

이로부터 $\hat{D}_n(0,1)$은 F의 함수임을 알 수 있다. 물론 이 식에서 k의 값을 2로 두고 $T^2(df=\upsilon)$통계량은 $F(df=(1,\upsilon))$통계량과 일치한다는 사실을 이용하면 두 독립집단의 T-검정 결과와 일치함을 볼 수 있다.

참고문헌

[1] Alexander M. Mood, Franklin A. Graybill, Duane C. Boes. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics, 3rd Edition.* McGRAW-Hill.

[2] Robb J. Muirhead. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory.* John Wiley & Sons, INC.

[2003년 6월 접수, 2003년 10월 채택]

[별첨I]

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=s_0I_n\frac{1}{s^2}I_ns_0I_n-I_n=\frac{s_0^2-s^2}{s^2}I_n=\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2}I_n=\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{(n-1)s_*^2/n}I_n=\frac{t^2}{(n-1)}I_n$$

$$I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=I-sI_n\frac{1}{s_0^2}I_nsI_n=\frac{(s_0^2-s^2)}{s_0^2}I_n=\frac{(\bar{x}-\mu_0)^2/s^2}{1+(\bar{x}-\mu_0)^2/s^2}I_n=\frac{(t^2/(n-1))}{1+(t^2/(n-1))}I_n$$

$\eta_a=(\sqrt{(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$\begin{aligned}&(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)\\
=&(\bar{x}1_n-\mu_01_n)'(I-s^2I_n\cdot s_0^{-2}I_n)^{-1}\cdot s_0^{-2}I_n\cdot(I-s^2I_n\cdot s_0^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\bar{x}1_n-\mu_01_n)\\
=&(\bar{x}-\mu_0)^2(1-s^2s_0^{-2})^{-2}s_0^{-2}1_n'1_n=n(\bar{x}-\mu_0)^2(1-s^2s_0^{-2})^{-2}s_0^{-2}\\
=&n(\bar{x}-\mu_0)^2s_0^2/(s_0^2-s^2)^2=ns_0^2/(s_0^2-s^2)=n[1+(t^2/(n-1))^{-1}]\end{aligned}$$

$\eta_b=(\sqrt{(\mu_a-\mu_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\mu_a-\mu_b)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$\begin{aligned}&(\mu_a-\mu_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\mu_a-\mu_b)\\
=&(\mu_01_n-\bar{x}1_n)'(I-s_0^2I_n\cdot s^{-2}I_n)^{-1}\cdot s^{-2}I_n\cdot(I-s_0^2I_n\cdot s^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\mu_01_n-\bar{x}1_n)\\
=&(\mu_0-\bar{x})^2(1-s_0^2s^{-2})^{-2}s^{-2}1_n'1_n=n(\mu_0-\bar{x})^2(1-s_0^2s^{-2})^{-2}s^{-2}\\
=&n(\mu_0-\bar{x})^2s^2/(s^2-s_0^2)^2=ns^2/(s_0^2-s^2)=ns^2/(\bar{x}-\mu_0)^2=n[t^2/(n-1)]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta=&(\mu_b-\mu_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\mu_b-\mu_a)+(\log|\Sigma_a|-\log|\Sigma_b|)\\
=&(\bar{x}1_n-\mu_01_n)'(s_0^2I_n-s^2I_n)^{-1}(\bar{x}1_n-\mu_01_n)+(\log|s_0^2I_n|-\log|s^2I_n|)\\
=&n(\bar{x}-\mu_0)^2/(s_0^2-s^2)+n\log(s_0^2/s^2)=n+n\log\{1+(\bar{x}-\mu_0)^2/s^2\}=n+n\log(1+t^2/(n-1))\end{aligned}$$

[별첨II]-1

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=\sigma_0I_n\cdot s^{-2}I_n\cdot\sigma_0I_n-I_n=(\sigma_0^2-s^2)/s^2\cdot I_n=(n/\chi^2-1)I_n$$

$$I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=I-sI_n\cdot\sigma_0^{-2}I_n\cdot sI_n=(\sigma_0^2-s^2)/\sigma_0^2\cdot I_n=(1-\chi^2/n)I_n$$

$\eta_a=(\sqrt{(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$\mu_a=\mu_b$이므로 $(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)=0$, 따라서 $\eta_a=0$이 된다. 마찬가지로 $\eta_b=0$이 된다.

$$\begin{aligned}\beta=&(\mu_b-\mu_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\mu_b-\mu_a)+(\log|\Sigma_a|-\log|\Sigma_b|)\\
=&(\log|\sigma_0^2I_n|-\log|s^2I_n|)=n\log(\sigma_0^2/s^2)=n\log(n/\chi^2)\end{aligned}$$

$$\hat{D}_n(0,1)=\Phi_n(0,(n/\chi^2-1)I_n,n\log(n/\chi^2))-\Phi_n(0,(1-\chi^2/n)I_n,n\log(n/\chi^2))$$

[별첨II]-2

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=sI_n\cdot\sigma_0^{-2}I_n\cdot sI_n-I_n=(s^2-\sigma_0^2)/\sigma_0^2\cdot I_n=(\chi^2/n-1)I_n$$

$$I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=I-\sigma_0I_n\cdot s^{-2}I_n\cdot\sigma_0I_n=(s^2-\sigma_0^2)/s^2\cdot I_n=(1-n/\chi^2)I_n$$

$\eta_a=(\sqrt{(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$\mu_a=\mu_b$이므로 $(\mu_b-\mu_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\mu_b-\mu_a)=0$, 따라서 $\eta_a=0$이 된다. 마찬가지로 $\eta_b=0$이 된다.

$$\beta = (\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)+(\log|\Sigma_a|-\log|\Sigma_b|)$$
$$= (\log|s^2I_n|-\log|\sigma_0^2I_n|)=n\log(s^2/\sigma_0^2)=n\log(\chi^2/n)$$

$$\tilde{D}_n(0,1)= \Phi_n(0,(\chi^2/n-1)I_n, n\log(\chi^2/n))-\Phi_n(0,(1-n/\chi^2)I_n, n\log(\chi^2/n))$$

[별첨III]

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I= s_mI_n\cdot s_p^{-2}I_n\cdot s_mI_n-I_n=(s_m^2-s_p^2)/s_p^2\cdot I_n=t_p^2/(n-2)\cdot I_n$$

$$I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=I-s_pI_n\cdot s_m^{-2}I_n\cdot s_pI_n=(s_m^2-s_p^2)/s_m^2\cdot I_n=[t_p^2/(n-2)]/[1+t_p^2/(n-2)]\cdot I_n$$

$\underline{\eta}_a=(\sqrt{(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)$$
$$=(\underline{\bar{x}}-\bar{m}\underline{1}_n)'(I-s_p^2I_n\cdot s_m^{-2}I_n)^{-1}\cdot s_m^{-2}I_n\cdot(I-s_p^2I_n\cdot s_m^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\underline{\bar{x}}-\bar{m}\underline{1}_n)$$
$$=\{n_1(\bar{x}_1-\bar{m})^2+n_2(\bar{x}_2-\bar{m})^2\}(1-s_p^2s_m^{-2})^{-2}s_m^{-2}=n(s_m^2-s_p^2)(1-s_p^2s_m^{-2})^{-2}s_m^{-2}$$
$$=n(s_m^2-s_p^2)/[(1-s_p^2s_m^{-2})^2s_m^2]=n[1+t_p^2/(n-2)]/[t_p^2/(n-2)]$$

$\eta_b=(\sqrt{(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)$$
$$=(\bar{m}\underline{1}_n-\underline{\bar{x}})'(I-s_m^2I_n\cdot s_p^{-2}I_n)^{-1}\cdot s_p^{-2}I_n\cdot(I-s_m^2I_n\cdot s_p^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\bar{m}\underline{1}_n-\underline{\bar{x}})$$
$$=\{n_1(\bar{x}_1-\bar{m})^2+n_2(\bar{x}_2-\bar{m})^2\}(1-s_m^2s_p^{-2})^{-2}s_p^{-2}$$
$$=n(s_m^2-s_p^2)(1-s_m^2s_p^{-2})^{-2}s_p^{-2}=n(s_m^2-s_p^2)/[(1-s_m^2s_p^{-2})^2s_p^2]=n[t_p^2/(n-2)]^{-1}$$

$$\beta=(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)+(\log|\Sigma_a|-\log|\Sigma_b|)$$
$$=(\bar{x}\underline{1}_n-\bar{m}\underline{1}_n)'(s_m^2I_n-s_p^2I_n)^{-1}(\bar{x}\underline{1}_n-\bar{m}\underline{1}_n)+(\log|s_m^2I_n|-\log|s_p^2I_n|)$$
$$=[n_1(\bar{x}_1-m)^2+n_2(\bar{x}_2-m)^2]/[s_m^2-s_p^2]+n\log(s_m^2/s_p^2)$$
$$=n+n\log\{1+(s_m^2-s_p^2)/s_p^2\}=n+n\log(1+t_p^2/(n-2))$$

[별첨IV]

$$\Sigma_a^{1/2}\Sigma_b^{-1}\Sigma_a^{1/2}-I=s_mI_n\cdot s_p^{-2}I_n\cdot s_mI_n-I_n=(s_m^2-s_p^2)/s_p^2\cdot I_n=(k-1)F/(n-k)\cdot I_n$$

$$I-\Sigma_b^{1/2}\Sigma_a^{-1}\Sigma_b^{1/2}=I-s_pI_ns_m^{-2}I_ns_pI_n=(s_m^2-s_p^2)/s_m^2I_n=[(k-1)F/(n-k)]/[(k-1)F/(n-k)+1]I_n$$

$\eta_a=(\sqrt{(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}\Sigma_a^{-1}(I-\Sigma_b\Sigma_a^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)$$
$$=(\underline{\bar{x}}-\bar{m}\underline{1}_n)'(I-s_p^2I_n\cdot s_m^{-2}I_n)^{-1}\cdot s_m^{-2}I_n\cdot(I-s_p^2I_n\cdot s_m^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\underline{\bar{x}}-\bar{m}\underline{1}_n)$$
$$=\{\Sigma_{i=1}^k n_i(\bar{x}_i-\bar{m})^2\}(1-s_p^2s_m^{-2})^{-2}s_m^{-2}=n(s_m^2-s_p^2)(1-s_p^2s_m^{-2})^{-2}s_m^{-2}=[n(s_m^2-s_p^2)]/[(1-s_p^2s_m^{-2})^2s_m^2]$$
$$=[n(1-s_p^2/s_m^2)]/[(1-s_p^2/s_m^2)^2]=n/[(1-s_p^2/s_m^2)]=n\{1+((k-1)F/(n-k))^{-1}\}$$

$\eta_b=(\sqrt{(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)}\ 0\ \cdots\ 0)'$에서

$$(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)'(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}\Sigma_b^{-1}(I-\Sigma_a\Sigma_b^{-1})^{-1}(\underline{\mu}_a-\underline{\mu}_b)$$
$$=(\bar{m}\underline{1}_n-\underline{\bar{x}})'(I-s_m^2I_n\cdot s_p^{-2}I_n)^{-1}\cdot s_p^{-2}I_n\cdot(I-s_m^2I_n\cdot s_p^{-2}I_n)^{-1}\cdot(\bar{m}\underline{1}_n-\underline{\bar{x}})$$
$$=\{\Sigma_{i=1}^k n_i(\bar{x}_i-\bar{m})^2\}(1-s_m^2s_p^{-2})^{-2}s_p^{-2}=n(s_m^2-s_p^2)(1-s_m^2s_p^{-2})^{-2}s_p^{-2}$$
$$=[n(s_m^2-s_p^2)]/[(1-s_m^2s_p^{-2})^2s_p^2]=n\,s_p^2/[(s_m^2-s_p^2)]=n((k-1)F/(n-k))^{-1}$$

$$\beta=(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)'(\Sigma_a-\Sigma_b)^{-1}(\underline{\mu}_b-\underline{\mu}_a)+(\log|\Sigma_a|-\log|\Sigma_b|)$$
$$=(\bar{x}\underline{1}_n-\bar{m}\underline{1}_n)'(s_m^2I_n-s_p^2I_n)^{-1}(\bar{x}\underline{1}_n-\bar{m}\underline{1}_n)+(\log|s_m^2I_n|-\log|s_p^2I_n|)$$
$$=\Sigma_{i=1}^k n_i(\bar{x}_i-\bar{m})^2/(s_m^2-s_p^2)+n\log(s_m^2/s_p^2)=n+n\log\{1+(k-1)F/(n-k)\}$$