

## A Bayesian Approach to Finite Population Sampling Using the Concept of Pivotal Quantity<sup>1)</sup>

Hyungtae Hwang<sup>2)</sup>

### Abstract

Bayesian probability models for finite populations are considered assuming so-called the super-population. We find the posterior distribution of population mean by a new approach, using the concept of pivotal quantity for the small sample case. A large sample theory is also treated through the concept of asymptotically pivotal quantity.

*Keywords* : finite population, pivotal quantity, asymptotically pivotal quantity, limiting posterior distribution

### 1. 서론

유한모집단에서의 모수에 대한 통계적 추론은 표본조사론에서의 주된 연구대상이라고 할 수 있다. 그 과정은 모집단의 일부인 표본을 관측함으로써 관측되지 않은 모집단의 다른 부분들에 대하여 추측하고자 하는 과정으로 이해된다. 유한모집단의 추론에 있어서 흔히 사용되고 있는 빈도론적 관점에서의 확률모형은 모집단의 모든 구성단위들을 정해져 있는 미지의 값으로 보고 표본추출단계에 있어서의 임의성을 바탕으로 한 확률을 주로 사용하고 있다.

한편, 유한모집단에 대한 베이즈 관점에서의 확률모형이 Ericson(1969)에 의하여 제시된 이후에 Ghosh and Meeden(1986), Lee, Park and Choi(1992), Kim(1998) 등 국내외의 많은 베이즈 통계학 자들에 의하여 이 분야에 대한 연구가 꾸준히 확장 발전되어 왔다. Ericson(1969)은 당초에 모집단의 개개 구성단위들에 대하여 초모집단(super-population)이라고도 일컬어지는 사전분포를 가정함으로써 이 문제에 접근하였다. 그는 주어진 모집단을 정규분포를 따르는 초모집단으로부터의 표본으로 가정하고, 모집단의 구성단위들 중에서 비복원으로 임의추출된 표본에 대하여 모평균의 사후분포를 구하였다. 그러나 모집단의 모든 구성단위들에 대하여 동일한 사전분포를 부여할 수 있는 근거라든가, 비복원 임의추출방법이 사전분포를 포함하는 확률모형의 설정 및 분석과정에 있어서 어떤 역할을 하는가에 대한 인과관계 등에 대해서는 충분한 설명이 제시되지 않았다.

이를 보다 구체적으로 살펴보기 위하여,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 을 크기  $N$ 의 유한모집단이라고 하자. 이 때 이 모집단의 모평균에 대한 통계적 추론에 관심이 있다고 하자. 이러한 유한모집단의 경우에

1) The present research was conducted by the research fund of Dankook University in 2003.

2) Professor, Department of Informational Statistics, Dankook University, Seoul, 140-714, Korea,  
E-mail : hthwang@dankook.ac.kr

모집단의 개개의 구성단위  $x_i$ 들은 모두 모수로 간주되며, 베이지스 관점에서 이 문제를 고려할 때  $x_i$ 들에 대하여 가정되는 사전분포를 초모집단이라고 부른다.

Ericson(1969)은 사전분포로서 모든  $x_i$ 들에 대하여 서로 독립적이며 평균과 분산이 동일한 정규분포를 가정한 후에  $\{1, \dots, N\}$ 의 크기  $n$ 인 임의의 부분집합  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ 을 비복원 임의추출에 의한 표본으로 간주하였다. 그러나 앞에서도 언급한 바와 같이, Ericson(1969)이 가정한 확률모형은 그 설정단계부터 그 이후의 분석과정에 이르기까지 비복원 임의추출의 역할이 명확하게 설명되지 못하였다. 여기에서는 먼저 비복원 임의추출의 개념이 사전분포를 포함하는 확률모형의 설정에 어떤 방법으로 반영될 수 있는가를 우선 살펴보도록 하자.

먼저,  $x_i$ 의 사전분포로서 일반적인 형태로  $x_i \sim f_i, i=1, \dots, N$ 을 가정해 보자. 즉, 일단은 모집단의 각 구성단위들에 대하여 일반적으로 동일하지 않을 수도 있는 개개의 사전분포를 가정한 다. 이제 모집단  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 으로부터 비복원 임의추출에 의하여 크기  $n$ 의 표본을 추출하는 과정은 다음과 같이 이해될 수 있다.

$y_1, y_2, \dots, y_N$ 을 모집단  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 의 임의재배열(random permutation)이라고 하자. 즉,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 중에서 크기  $n$ 의 비복원 임의추출을 위하여,  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 을 임의순서로 재배열하여  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 으로 한 것이다. 그러면  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 중에서 처음  $n$ 개, 즉,  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 은  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 의 비복원 임의표본으로 간주될 수 있을 것이다.

그런데 재배열된  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 의 평균은 원래의 모집단  $x_1, x_2, \dots, x_N$ 의 평균과 일치하므로, 적어도 모평균의 추론에 관한 한  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 을 처음부터 모집단으로 간주하여도 아무런 일반성을 잃지 않는다. 또한  $i=1, \dots, N$ 에 대하여  $x_i \sim f_i$ 이므로  $y_i \sim \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j$ 로서 모두 동일한 분포를 가지게 된다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 즉, 유한모집단에서의 모평균에 대하여 추론하고자 할 때, 비복원 단순임의추출의 개념은 모집단  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 의 각  $y_i$ 들에 대하여 동일한 사전분포를 가정하고  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 을 크기  $n$ 의 표본으로 간주함으로써, 확률모형에 반영될 수 있는 것이다.

최근에 Hwang(2002)은 무정보적 사전분포(non-informative prior distribution)의 가정 아래 위치·척도모수 모형의 경우에 측량(pivotal quantity)의 개념을 이용하여 모수의 사후분포를 구하는 방법을 제시하였다. 여기서, 측량이란 표본과 모수의 함수로서 그 표본분포가 모수의 값에 의존하지 않는 통계적 양을 의미한다. 또한 Hwang, So and Kim(2003)은 점근적 측량(asymptotically pivotal quantity)의 개념을 이용하여 Hwang(2002)의 결과를 대표본의 경우로 확장하였다.

이 연구에서는 Hwang(2002)과 Hwang, So and Kim(2003)의 아이디어를 따라 측량, 혹은 점근적 측량의 개념을 이용함으로써 유한모집단에서 모평균의 사후분포를 규명하였다. 다음의 2절에서는 소표본의 경우에 있어서 정규초모집단과 무정보적 사전분포의 가정 아래, 모수의 사후분포를 구하기 위한 측량을 제시하고 그 사후분포를 규명함으로써 모수의 사후분포를 구하였다. 사실 2절의 결과는 새로운 것은 아니며 Ericson(1969)의 연구에 따라 이미 그 결과가 잘 알려져 있는 내용이지만, 여기에서는 그 결과를 측량의 개념을 이용하여 새로운 방법으로 유도해 본 것이다. 3절에서는 Hwang, So and Kim(2003)의 결과를 이용하여 대표본의 경우에 점근적 측량의 개념을 통하여 모평균의 근사적 사후분포에 대하여 연구하였다. 마지막으로 4절에서는 이 연구의 결론으로서

몇 가지 점들을 토론하였다.

## 2. 소표본의 경우

이 절에서는 확률모형의 설정에 있어서 앞절에서 설명한 내용 외에도 소표본에서의 분석이 용이하게 하기 위하여 초모집단에 대한 정규성과 독립성의 가정을 추가하도록 한다. 즉, 우리가 설정하는 확률모형은 다음의 식(2.1)과 같이 요약될 수 있다. 단, 초모집단 모수인  $(\mu, \sigma^2)$ 에 대하여는 무정보적 사전분포를 가정하였다.

$$\begin{cases} y_1, y_2, \dots, y_N | \mu, \sigma^2 \sim i.i.d. N(\mu, \sigma^2) \\ p(\mu, \sigma^2) \propto 1/\sigma^2 \\ y_1, y_2, \dots, y_n : \text{모집단으로부터 비복원 임의추출된 표본}(n < N) \end{cases} \quad (2.1)$$

편의상 식(2.1)에서 주어진 확률모형에 대하여 다음과 같은 표기들을 사용하기로 하자.

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i : \text{모평균} \\ \bar{y}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i : \text{관측된 값들의 표본평균} \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{N-n} \sum_{i=n+1}^N y_i : \text{관측되지 않은 값들의 표본평균} \\ s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_1)^2 : \text{관측된 값들의 표본분산} \\ T = \frac{\bar{y} - \bar{y}_1}{\sqrt{(1-f) \frac{s_1^2}{n}}} \end{cases} \quad (2.2)$$

여기서,  $f = \frac{n}{N}$ 로서 추출률(sampling fraction)을 의미한다. 이때,  $T$ 의 표본분포로서 증명없이 다음의 [보조정리 2.1]을 기술한다.

[보조정리 2.1] 식(2.1)로 주어진 확률모형에서,  $T | \mu, \sigma^2 \sim t(n-1)$  이 성립한다.

이 보조정리는  $T$ 의 표본분포가  $(\mu, \sigma^2)$ 에 무관하므로  $T$ 가 하나의 측량이라는 사실을 내포하고 있으며, 이 점은 다음의 [보조정리 2.2]와 함께 [정리 2.3]에서 측량  $T$ 의 사후분포를 구하여 모평균  $\bar{y}$ 의 사후분포를 구하는데 이용될 것이다.

[보조정리 2.2] 다음을 가정하자.

$$\begin{cases} p(x_1, x_2, y | \theta, \eta) = \frac{1}{\eta^3} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_2 - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right), & -\infty < x_i < +\infty, y > 0 \\ \pi(\theta, \eta) \propto \frac{1}{\eta}, & -\infty < \theta < +\infty, \eta > 0, \\ w = \frac{x_1 - x_2}{y} \end{cases} \quad (2.3)$$

이 때, 다음이 성립한다.

$$p(w | x_1, y) = p(w | \theta, \eta) \quad (2.4)$$

[증명] 식(2.3)의 첫 번째 식에서  $x_1 = x_1$ ,  $w = \frac{x_1 - x_2}{y}$ ,  $y = y$ 의 변수변환에 의하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$p(x_1, w, y | \theta, \eta) = \frac{y}{\eta^3} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_1 - wy - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right) \quad (2.5)$$

따라서, 식(2.5)를  $x_1$ 과  $y$ 에 대하여 적분함으로써 다음의 식(2.6)을 얻는다. 식(2.6)에서 마지막 등식은  $\frac{x_1 - \theta}{\eta} = t_1$ ,  $\frac{y}{\eta} = t_2$ 의 치환적분을 적용한 결과이다.

$$\begin{aligned} p(w | \theta, \eta) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p(x_1, w, y | \theta, \eta) dx_1 dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{\eta^3} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_1 - wy - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right) dx_1 dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t_2 f_1(t_1) f_2(t_1 - wt_2) f_3(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

이번에는, 식(2.3)의 가정들로부터 다음이 성립한다.

$$p(x_1, x_2, y, \theta, \eta) \propto \frac{1}{\eta^4} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_2 - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right) \quad (2.7)$$

식(2.7)에서  $x_1 = x_1$ ,  $w = \frac{x_1 - x_2}{y}$ ,  $y = y$ ,  $\theta = \theta$ ,  $\eta = \eta$ 의 변수변환을 이용하여 다음을 얻는다.

$$p(x_1, w, y, \theta, \eta) \propto \frac{y}{\eta^4} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_1 - wy - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right) \quad (2.8)$$

따라서, 식(2.8)을  $\theta$ 와  $\eta$ 에 대하여 적분함으로써 다음의 식(2.9)를 얻는다. 식(2.9)에서 마지막 등식은  $\frac{x_1 - \theta}{\eta} = t_1, \frac{y}{\eta} = t_2$ 의 치환적분을 적용한 결과이다.

$$\begin{aligned} p(x_1, w, y) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty p(x_1, w, y, \theta, \eta) d\theta d\eta \\ &\propto \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{\eta^4} f_1\left(\frac{x_1 - \theta}{\eta}\right) f_2\left(\frac{x_1 - w y - \theta}{\eta}\right) f_3\left(\frac{y}{\eta}\right) d\theta d\eta \\ &= \frac{1}{y} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t_2 f_1(t_1) f_2(t_1 - w t_2) f_3(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

그러므로,

$$\begin{aligned} p(w | x_1, y) &\propto p(x_1, w, y) \\ &\propto \frac{1}{y} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t_2 f_1(t_1) f_2(t_1 - w t_2) f_3(t_2) dt_1 dt_2 \\ &\propto \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t_2 f_1(t_1) f_2(t_1 - w t_2) f_3(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

식(2.6)과 식(2.10)을 비교함으로써 정리가 성립함을 알 수 있다.

위의 [보조정리 2.2]의 결과는 다음의 [정리 2.3]에 직접적으로 이용된다.

[정리 2.3] 식(2.1)과 (2.3)으로 주어진 모형과 표기에서  $T | \overline{y}_1, s_1^2 \sim t(n-1)$ 가 성립한다. 즉,  $\overline{y}_1$ 와  $s_1^2$ 이 주어졌을 때 모평균  $\overline{y}$ 의 사후분포는 위치모수  $\overline{y}_1$ , 척도모수  $\sqrt{(1-f)\frac{s_1^2}{n}}$ , 자유도  $n-1$ 인  $t$ -분포를 따른다.

[증명] 앞의 [보조정리 2.2]에서  $x_1 \leftarrow \overline{y}_1, x_2 \leftarrow \overline{y}_2, y \leftarrow s_1, \theta \leftarrow \mu, \eta \leftarrow \sigma$ 로 대입하여 생각해 보면 [보조정리 2.2]의 가정들이 모두 만족됨을 알 수 있다. 따라서,  $\overline{y}_1$ 와  $s_1^2$ 이 주어졌을 때  $w = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2}{s_1}$ 의 사후분포는  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 이 주어졌을 때  $w$ 의 표본분포와 일치한다. 그런데,

$$T = \frac{\overline{y} - \overline{y}_1}{\sqrt{(1-f)\frac{s_1^2}{n}}} = \frac{(1-f)(\overline{y}_2 - \overline{y}_1)}{\sqrt{(1-f)\frac{s_1^2}{n}}} = -\sqrt{(1-f)n} \cdot w \quad (2.11)$$

이므로  $T$ 는  $w$ 의 함수가 된다. 따라서  $\overline{y}_1$ 와  $s_1^2$ 이 주어졌을 때  $T$ 의 사후분포 또한  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 이 주어졌을 때  $T$ 의 표본분포와 일치한다. 그런데 [보조정리 2.1]에서  $T$ 의 표본분포가  $t(n-1)$

이므로  $T$ 의 사후분포 역시  $t(n-1)$ 임을 알 수 있다.

### 3. 대표본의 경우

이 절에서는 유한모집단에서 대표본의 경우에 점근적 측량의 개념을 이용하여 모평균의 사후분포에 대하여 연구하도록 한다. 여기서 점근적 측량이란 Hwang, So and Kim(2003)에 의하여 소개된 개념으로, 표본과 모수의 함수로서 표본의 크기가 커짐에 따라 그 표본분포가 모수의 값에 의존하지 않는 극한분포를 갖게 되는 통계적 양을 의미한다. 이 절에서는 Hwang, So and Kim(2003)의 결과가 중요하게 이용되므로, 우선 그들의 정리내용을 간략하게 요약하여 소개하기로 한다.

통계량  $\widehat{\theta}_n$ 이 모수  $\theta$ 의 일치추정량이며,  $W_n$ 은 하나의 점근적 측량이라고 하자. 또한  $\theta$ 의 사전분포가 점근적 등연속성(asymptotically equicontinuity)이라는 일종의 정칙조건을 만족하도록 한다고 가정하자. 점근적 등연속성이란,  $f_n(w|u)$ 를  $\widehat{\theta}_n$ 이 주어졌을때의  $W_n$ 의 사후밀도함수라고 하고 유계이며 연속인 함수  $h$ 에 대하여  $E_n^u(h) = \int h(w)f_n(w|u)dw$ 라고 했을 때, 다음과 같이 정의된다.

[점근적 등연속성] 임의의 유계이며 연속인 함수  $h$ 와 양수  $\varepsilon$ , 실수  $u$ 에 대하여  $\delta(u, \varepsilon)$ 과  $n(u, \varepsilon)$ 이 존재하여,  $|v-u| \leq \delta(u, \varepsilon)$ 이면 모든  $n > n(u, \varepsilon)$ 에 대하여  $|E_n^v(h) - E_n^u(h)| < \varepsilon$ 이 성립한다.

점근적 등연속성의 개념은 결합적 약수렴성이 성립할 때 조건부적 약수렴성이 성립하기 위한 조건으로 Sweeting(1989)에 의하여 제시되었다. Hwang, So and Kim(2003)은 Sweeting(1989)이 발견한 정리를 점근적 측량에 적용함으로써, 점근적 등연속성의 가정아래 표본의 크기가 커짐에 따라  $\widehat{\theta}_n$ 이 주어졌을 때의  $W_n$ 의 극한사후분포가  $\theta$ 가 주어졌을 때의  $W_n$ 의 극한분포와 거의 확실하게(almost surely) 일치하게 됨을 증명하였다. 이제 Hwang, So and Kim(2003)의 정리를 대표본인 경우 유한모집단의 평균에 대한 극한사후분포를 구하는데 이용하여 보자.

유한모집단  $y_1, y_2, \dots, y_N$ 에 대하여 서로 독립적으로 평균  $\mu$ , 분산  $\sigma^2$ 인 임의의 초모집단을 가정하자. 2절에서와 마찬가지로 관측된 표본은  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 이고,  $\bar{y}$ 는 모평균을,  $\bar{y}_1$ 와  $s_1^2$ 은 각각 표본평균과 표본분산을 나타낸다고 하자. 그러면  $n$ 과  $N-n$ 이 동시에 커짐에 따라  $(\bar{y}_1, s_1^2)$ 이  $(\mu, \sigma^2)$ 의 일치추정량임은 자명하다. 이제  $W_n = (\bar{y} - \bar{y}_1) / \sqrt{(1-f) \frac{s_1^2}{n}}$ 으로 정의하면 다음의 [보조정리 3.1]은  $W_n$ 이 하나의 점근적 측량임을 나타내는 것이다.

[보조정리 3.1]  $n$ 과  $N-n$ 이 동시에 커짐에 따라 임의의  $(\mu, \sigma^2)$ 의 값에 대하여  $W_n$ 의 표본분포는 표준정규분포  $N(0, 1)$ 을 극한분포로 갖는다.

[증명]  $\bar{y}_2 = \frac{1}{N-n} \sum_{i=n+1}^N y_i$ 로서 관측되지 않은 값들의 평균이라고 할 때,

$$\begin{aligned} \bar{y} - \bar{y}_1 &= (1-f)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) \\ (1-f) \frac{\sigma^2}{n} &= (1-f)^2 \left( \frac{\sigma^2}{N-n} + \frac{\sigma^2}{N} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

가 성립하므로

$$W_n = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N-n} + \frac{\sigma^2}{N}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{s_1^2}} \quad (3.2)$$

으로 표현할 수 있다. 따라서  $s_1^2$ 이  $\sigma^2$ 의 일치추정량이라는 사실과 중심극한정리를 적용함으로써 간단하게 정리의 결과를 얻을 수 있다.

이제 사전분포, 즉, 초모집단의 분포가 점근적 등연속성의 조건을 만족하도록 한다고 가정하자. [보조정리 3.1]에 의하여  $W_n$ 이 하나의 점근적 측정량이고, 또한  $(\bar{y}_1, s_1^2)$ 이  $(\mu, \sigma^2)$ 의 일치추정량이므로, Hwang, So and Kim(2003)의 정리에 의하여  $n$ 과  $N-n$ 이 동시에 커짐에 따라  $(\bar{y}_1, s_1^2)$ 이 주어졌을 때의  $W_n$ 의 극한사후분포가  $(\mu, \sigma^2)$ 이 주어졌을 때의  $W_n$ 의 극한분포와 거의 확실하게 일치하게 된다는 사실을 얻을 수 있다. 그런데 [보조정리 3.1]에 따라  $(\mu, \sigma^2)$ 이 주어졌을 때의  $W_n$ 의 극한분포는  $N(0, 1)$ 이므로, 결론적으로 다음의 [정리 3.2]를 얻을 수 있다.

[정리 3.2] 위의 모든 가정 아래,  $n$ 과  $N-n$ 이 동시에 커짐에 따라  $W_n$ 의 극한사후분포는 거의 확실하게  $N(0, 1)$ 과 일치한다. 즉,  $n$ 과  $N-n$ 이 모두 충분히 클 때, 모평균  $\bar{y}$ 의 사후분포는 근사적으로 정규분포  $N(\bar{y}_1, (1-f) \frac{s_1^2}{n})$ 을 따른다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 유한모집단에서의 모평균에 대한 베イズ 추론에 있어서 측정량의 개념을 이용하여 모평균의 사후분포를 규명하였다. 이제 다음과 같은 몇 가지 점들을 지적하면서 이 연구의 결론을 맺고자 한다.

첫째, 유한모집단에 대하여 초모집단의 개념을 이용한 베イズ 확률모형은 많은 베イズ 통계학자들에 의하여 여러 가지 형태로 연구되어왔던 모형이다. 이 연구에서는 이러한 초모집단의 확률모형에서 비복원 임의추출이라고 하는 표본추출의 기본원리가 베イズ 확률모형에 어떤 형태로 반영될 수 있는가를 먼저 설명하였다.

둘째, 이 연구에서는 모수의 사후분포를 구하는데 있어서 상당히 복잡한 계산을 수반하는 직접적인 방법 대신에, Hwang(2002)의 방법과 마찬가지로 측량의 개념을 이용하여 상대적으로 간단한 간접적 방법으로 모수의 사후분포를 규명하였다.

마지막으로, 이 연구에서는 대표본의 경우에 베이저안 접근에 의하여 적당한 가정아래 모평균의 극한사후분포가 정규분포임을 규명하였다.

### 참고문헌

- [1] Ericson, W. (1969). Subjective Bayesian models in sampling finite population(with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society B*, 31, 195-233
- [2] Ghosh, M. and Meeden, G. (1986). Empirical Bayes estimation in finite population sampling, *Journal of the American Statistical Association*, 81, 1058-1062.
- [3] Hwang, H.T. (2002). A study on the role of pivots in Bayesian Statistics, *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 9, No. 1, 221-227
- [4] Hwang, H.T., So, B.S. and Kim, Y.D. (2003). On limiting posterior distributions, *Unpublished manuscript*.
- [5] Kim, D.H. (1998). Robust Bayes and empirical Bayes analysis in finite population sampling with auxiliary information, *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 27, No. 3, 331-348.
- [6] Lee, S.H., Park, N.H. and Choi, J.S. (1992). Bayesian ratio estimation in finite population, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol, 5, No. 1, 9-17
- [7] Sweeting, T.J. (1989). On conditional weak convergence, *Journal of Theoretical Probability*, 2, 461-474.

[ 2003년 3월 접수, 2003년 9월 채택 ]