

강인한 최적 PID 제어기 설계를 위한 새로운 루프 형성 기법

정회원 윤성오*, 서병설**

A New Loop Shaping Method for Design of Robust Optimal PID Controller

Seong-O Yun*, Byung-Suhl Suh** *Regular Members*

요 약

본 논문에서는 요구된 성능을 만족시키는 강인한 최적 PID 제어기 설계를 위한 새로운 루프 형성 기법을 제안하고자 한다. 설계하고자 하는 PID 제어기의 영점들을 플랜트의 최대 극점에 근접하도록 가중치 요소 Q와 R을 선택하면 루프 형상이 고주파수 영역의 센서잡음 장벽으로부터 최대한 멀어지게 된다. 2차 시스템에 대하여 강인한 최적 PID 제어기 설계가 가능한 새로운 루프 형성 기법은 LQR 방법에서 발전 되었다.

Key Words : PID controller; LQ; Loop Shaping; Robust Control; Optimal Control.

ABSTRACT

This paper presents a new loop shaping technique for design of robust optimal PID controllers in order to satisfy the performance requirements. PID controller can be designed by selecting the suitable weighting factors Q and R . This technique is developed by pushing all two zeros formed by PID controller closely to a larger pole of the second order plant. As a result, a good loop shaping is achieved in the high frequencies region on the Bode plot. For the robust optimal tuning of PID controller for second order system, a new loop shaping procedure is developed via LQR approach.

I. 서 론

제어 공학자들의 주요 관심사는 설계 사양을 만족시키면서 안정도 강인성과 우수한 성능을 갖도록 하는 제어기를 설계하는 것이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 정교한 수학적 최적제어 이론에 근거를 둔 LQG-LTR^[1], H_{∞} ^[2,3]와 같은 방법들이 연구되어 왔다. 그러나 아직도 산업계에서는 간단하고 보다 친숙한 PID 제어기가 널리 사용되고 있으며,^[4] 최근에는 PID 제어 방법에 H_{∞} 와 같은 최적제어 기

법을 도입하는 연구도 이루어지고 있다. Grimbale^[5]은 PID 구조를 갖는 H_{∞} 제어기들의 특정 부류에 대하여 제한적인 시도를 하였으며, Maffezzoni와 Rocco^[6]는 PID 제어기의 강인한 동조(robust tuning)을 위한 단순한 규칙을 유도하고자 하였다. Panagopoulos^[7]는 주어진 사양을 최대 감도 함수와 최대 상보 감도 함수로 표현하고, 이 것이 가중치가 반영된 H_{∞} 노름(norm)으로 표현될 수 있음을 보였으며, Grassi 등^{[8][9]}은 H_{∞} 노름이 볼록형 최적화(convex optimization) 기법을 사용하는 루프 형성

* 삼성 에스원 기술연구소 근무 (nicom_yun@samsung.com), ** 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수
논문번호 : 030281-0703, 접수일자 : 2003년 7월8일

기법에 기반을 둔 PID 동조 방법을 보였다.

한편, 김과 서^{[10][11]}는 2차 시스템의 안정도 강인성과 성능 강인성을 동시에 만족시키기 위해 루프 형성 기법을 사용하여 가중치 요소 Q 와 R 을 선정하는 LQ-PID 제어기 동조 방법을 제안하였다. 그러나 가중치 요소 Q 의 분해 요소인 N 을 선정함에 있어 일부 모호함이 존재한다. 특히 $N=[n_1 \ n_2 \ n_3]$ 의 구성 요소 중 n_2 를 선정함에 있어서 플랜트가 안정하다는 조건하에 비교적 큰 값을 선택해야 하며 선택 범위가 광범위하다는 문제점과, 계산상 발산하는 문제점을 갖고 있다.

본 논문에서는 상기의 문제점 해결하는 새로운 PID 제어기 설계 방법을 제안 하고자 한다. 제안하고자 하는 새로운 루프 형성 기법은 PID 제어기의 두개의 영점(zero)들을 플랜트의 최대 극점(pole)에 근접하도록 가중 요소 Q 와 R 을 선택하여 Bode 선도(plots)상의 루프 형상을 고주파수 영역의 센서 잡음 장벽(sensor noise barrier)으로부터 최대한 멀리 떨어뜨림으로써 서의 앞선 방법^{[9][10]} 보다 개선된 센서 잡음 제거 성능을 갖도록 설계하는 기법이다. 이때 주어진 사양을 만족 시키도록 하는 설계 파라미터의 존재영역을 구함으로써 앞선 설계 방법^{[9][10]}과는 달리 명확한 설계가 가능해진다.

II. LQR 문제로 변환되는 PID 동조

다음 상태방정식의 2차 시스템을 고려하여 보자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1)$$

여기서 $y(t)$ 는 출력 변수, $u(t)$ 는 제어 입력, ω_n 은 고유 진동수(natural frequency), 그리고 ζ 는 감쇠비(damping ratio)이며, 초기 조건 $y(0)$ 와 $dy(0)/dt$ 는 지정되었다고 가정한다.

우리는 출력 변수의 최종 안정한 상태를 $y(\infty)=0$ 이 되도록 제어 하고자 한다.

상태 변수 $x_p(t)$ 를 출력 변수와 출력 변수의 미분값이 포함된 형태로 다음과 같이 정의하자.

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

상태방정식 (1)로부터 상태 변수 $x_p(t)$ 가 반영된

새로운 상태방정식이 유도된다.

$$\frac{d x_p(t)}{dt} = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = C_p x_p(t) \quad (4)$$

여기서

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix}, \\ C_p = [1 \ 0] \quad (5)$$

이며, $x_p(0)$ 는 지정되어 있다고 가정한다.

PID 구조를 만들기 위하여 피드 포워드 루프(feed forward loop)에 출력 변수의 적분값인 $x_0(t)$ 를 상태 변수로 추가하여 다음과 같은 덧붙임 상태공간 식(augmented state-space description)을 만들 수 있다.

$$x(t) = [x_0(t) : x_p(t)]^T \\ = \left[\int_0^t y(\tau) d\tau : y(t) \frac{dy(t)}{dt} \right]^T \quad (6)$$

$$\frac{d x(t)}{dt} = A x(t) + B u(t) \quad (7)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (8)$$

여기서 상태공간 행렬 A , B , C 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix}, \\ C = [0 \ C_p] = [0 \ 1 \ 0] \quad (9)$$

LQR 문제로 변환하기 위하여 다음과 같은 가격 함수(cost function)를 고려하여 보자.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (10)$$

여기서, 가중행렬 Q 는 양의 반한정 대칭 행렬이며, 가중행렬 R 는 양의 한정 대칭 행렬이다. 이때 최적 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = -G x(t) \quad (11)$$

여기서 $G = -R^{-1} B^T K$ 이며, $K = K^T$ 는 다음의 Riccati 방정식의 해이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1} B^T K = 0 \quad (12)$$

설계 파라미터 Q 와 R 은 $Q = N^T N$ 와 $R = \rho I$ 로 표현할 수 있고, 제어이득 행렬 G 는

$$G = [g_0 \ g_1 \ g_2] \quad (13)$$

와 같이 분해될 수 있다. 따라서 제어입력 $u(t)$ 는 식(6)의 상태 변수식을 활용하여

$$u(t) = - \left(g_0 \int_0^t y(\tau) d\tau + g_1 y(t) + g_2 \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (14)$$

와 같이 PID 제어 형태로 표현될 수 있다. 또한, 전통적인 PID 제어 형태는

$$u(t) = -K_p \left(y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t y(\tau) d\tau + T_d \frac{dy(t)}{dt} \right) \quad (15)$$

이므로 식(14)에서의 제어 이득 행렬의 각 부분의 이득 요소 g_i 를 식(15)에서의 비례이득 K_p , 적분 요소 시간 T_i 및 미분요소 시간 T_d 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$K_p = g_1, \quad T_i = \frac{g_0}{g_1}, \quad T_d = \frac{g_2}{g_1} \quad (16)$$

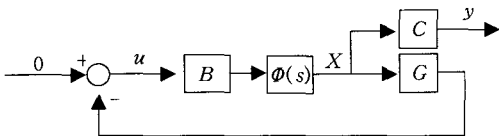


그림 1. LQR의 블록 선도

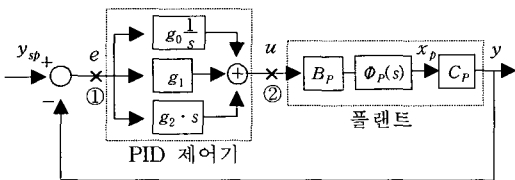


그림 2. PID 구조의 블록 선도

덧붙임 상태의 2차 시스템인 경우에는 그림 1의 LQR 구조와 그림 2의 PID 구조는 동가(equivalence)가 된다. 따라서 PID 제어기의 파라미터 K_p , T_i 및 T_d 는 LQR 설계 문제를 푸는 것으로 구할 수 있게 된다.

LQR은 안정도 강인성은 보장 할 수 있으나 출력 캐환이 구성되어 있지 않기 때문에 성능에 대한 문제를 해결하기 어렵다. 이러한 이유로 본 논문에서는 개선된 상태 변수 표현 방법을 이용하여 출력 캐환이 덧붙여진 특별한 형태의 LQR 구조가 고려되었다. 다음 절에서는 새로운 루프 형성 기법을 통하여 선택되는 설계 파라미터 Q 와 R 이 성능 관련 문제점을 개선시킴을 보여주고자 한다.

III. 새로운 루프 형성 기법

설계 파라미터 Q 와 R 의 선택 절차는 성능 강인성을 개선시킬 목적으로 플랜트의 출력측에서 절단하여 얻어지는 루프 전달 함수의 특이값 동조(singular value matching) 기법에 근간을 두었다. 루프 형성 기법에 의하여 성능에 관한 문제를 다루기 위해서는 그림 2의 플랜트 출력측 절단점 ①로부터 얻어지는 루프 전달 함수 $h(s)$ 를 이용하여야 한다. 루프 전달 함수 $h(s)$ 와 그림 2의 플랜트 입력측 절단점 ②로부터 얻어지는 루프 전달 함수 $g_L(s)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(s) &= C_p (sI - A_p)^{-1} B_p (g_2 s + g_1 + \frac{g_0}{s}) \\ &= \frac{g_2 s^2 + g_1 s + g_0}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_L(s) &= (g_2 s + g_1 + \frac{g_0}{s}) C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \\ &= \frac{g_2 s^2 + g_1 s + g_0}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (18)$$

단일입출력 시스템에서는 $h(s)$ 와 $g_L(s)$ 는 동일하다. 또한 다음 식으로부터 $g_L(s)$ 는 LQR의 루프 전달 함수 $g_{LQ}(s)$ 와 동일함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} g_{LQ}(s) &= G(sI - A)^{-1} B \\ &= G \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & sI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix} \right\}^{-1} B \\ &= [g_0 \ g_1 \ g_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} C_p (sI - A_p)^{-1} \\ 0 & (sI - A_p)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s} g_0 C_p (sI - A_p)^{-1} B_p \\ &\quad + [g_1 \ g_2] (sI - A_p)^{-1} B_p \end{aligned}$$

$$= \frac{g_2 s^2 + g_1 s + g_0}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (19)$$

다음에서 기술하는 LQ 문제의 주파수역 등가 (frequency domain equality)를 사용하여 설계 파라미터 Q 와 R 을 결정할 수 있다.

$$[I + g_{LQ}(-j\omega)]^T R [I + g_{LQ}(j\omega)] = R + g_{OL}(-j\omega)g_{OL}(j\omega) \quad (20)$$

여기서 $g_{OL}(j\omega)$ 은 개루프 전달 함수이다. 단일 입출력 시스템에서는 $h(s)$ 는 $g_{LQ}(s)$ 과 동일하기 때문에 주파수역 등가식(20)은

$$[I + h(-j\omega)]^T R [I + h(j\omega)] = R + g_{OL}(-j\omega)g_{OL}(j\omega) \quad (21)$$

이며, LQR의 주파수역 특성은 식(20)으로부터

$$|I + h(j\omega)| = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} |N(j\omega I - A)^{-1} B|^2} \quad (22)$$

와 같이 표현될 수 있다. 여기서 설계 파라미터는 $N = [n_0 \ n_1 \ n_2]$ 이다. Bode선도에서 $|h(j\omega)|$ 의 고차주파수 ω_c 로부터 먼 영역인 저주파 영역과 고주파 영역에서 식(22)는

$$|h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} |N(j\omega I - A)^{-1} B| \quad (23)$$

으로 근사될 수 있다. 또한, 식(23)을 2차 시스템인 플랜트에 적용하면

$$|h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \omega_n^2 s^2 + n_1 \omega_n^2 s + n_0 \omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right| \quad (24)$$

와 같이 된다. 따라서, 저주파 영역과 고주파 영역에서의 $h(j\omega)$ 의 극한 거동(limiting behavior)은 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |h(j\omega)| \approx \frac{|n_0|}{\omega\sqrt{\rho}} \quad (25)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |h(j\omega)| \approx \frac{|n_2 \omega_n^2|}{\omega\sqrt{\rho}} \quad (26)$$

식(25)와 식(26)으로부터 $|h(j\omega)|$ 의 저주파 영역의 점근선은 $l_L(\omega) = |n_0|/\omega\sqrt{\rho}$ 이고 고주파 영역의 점근선은 $l_H(\omega) = |n_2 \omega_n^2|/\omega\sqrt{\rho}$ 임을 알 수 있다.

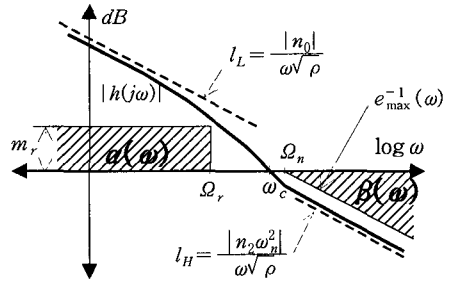


그림 3. 성능 요구사항의 두가지 장벽을 고려한 $|h(j\omega)|$ 의 전형적인 루프 형성

$|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 그림 3의 “ $\alpha(\omega)$ ” 영역인 명령 추종 및 외란 제거를 위한 장벽과 “ $\beta(\omega)$ ” 영역인 센서 잡음 및 고차 모델링 오차 감소를 위한 장벽을 동시에 침범하지 않아야 좋은 성능 강인성을 확보할 수 있다는 사실은 이미 잘 알려져 있다. 이는 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 저주파 영역에서 장벽 $\alpha(\omega)$ 보다 위에 있어야 하며, 고주파 영역에서는 장벽 $\beta(\omega)$ 보다 아래에 있어야 한다는 것을 의미한다. 즉, $|h(j\omega)|$ 의 점근선인 $l_L(\omega)$ 과 $l_H(\omega)$ 이 두장벽 $\alpha(\omega)$ 와 $\beta(\omega)$ 의 위쪽과 아래쪽에 있어야 한다는 것이다. 따라서 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 두 장벽을 침범하지 않도록 만들어 주는 설계 파라미터 N 을 구하는 방법을 제안하고자 한다.

그림 3의 Ω_r 를 장벽의 경계 주파수라 하고, m_r 을 장벽 $\alpha(\omega)$ 의 높이라고 하면, 장벽 $\alpha(\omega)$ 는

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} m_r & , \omega \leq \Omega_r \\ 0 & , \omega > \Omega_r \end{cases} \quad (27)$$

와 같이 정의될 수 있다. 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능이 좋게 하기 위해서는 저주파 영역의 점근선 $l_L(\omega)$ 가 장벽 $\alpha(\omega)$ 의 위쪽에 있어야 하므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$l_L(\omega) : \frac{|n_0|}{\omega\sqrt{\rho}} > \alpha(\omega) \quad , \quad \omega \leq \Omega_r \quad (28)$$

식(28)을 설계 파라미터 n_0 에 대하여 풀어보면

$$|n_0| > \Omega_r \sqrt{\rho} \cdot m_r \quad (29)$$

와 같이 된다. 또한, Ω_n 를 장벽 $\beta(\omega)$ 의 경계 주파수라 하고 $e_{\max}(\omega)$ 를 모델링 오차의 최대값이라 하면, 장벽 $\beta(\omega)$ 는

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega < \Omega_n \\ e_{\max}^{-1}(\omega) & , \omega \geq \Omega_n \end{cases} \quad (30)$$

와 같이 표현 된다. 센서 잡음 및 고차 모델링 오차 감소 성능을 좋게하기 위해서는 고주파 영역에 대한 점근선 $l_H(\omega)$ 가 장벽 $\beta(\omega)$ 의 아래쪽에 있어야 하므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$l_H(\omega) : \frac{|n_2 \omega_n^2|}{\omega \sqrt{\rho}} < \beta(\omega) \quad , \quad \omega \geq \Omega_n \quad (31)$$

식(31)을 설계 파라미터 n_2 에 대하여 풀어보면

$$|n_2| < \frac{\Omega_n \sqrt{\rho} \cdot e_{\max}^{-1}(\omega)}{\omega_n^2} \quad (32)$$

와 같다.

따라서, 설계 파라미터 n_0 와 n_2 를 식(29)와 식(32)를 만족하도록 선택한다면 만족스런 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상을 얻을 수 있을 것이다. 그러나, n_0 와 n_2 의 선택 가능 영역이 너무 넓고, 설계파라미터 n_1 이 고려되어 있지 않기 때문에 어느 값을 선택 하여야 최적인가에 대한 문제가 남아 있게 된다. 이와 같은 문제를 해결하기 위한 방법으로 PID 제어기의 두 영점을 플랜트의 최대 극점에 접근 시키는 기법을 제안하고자 한다.

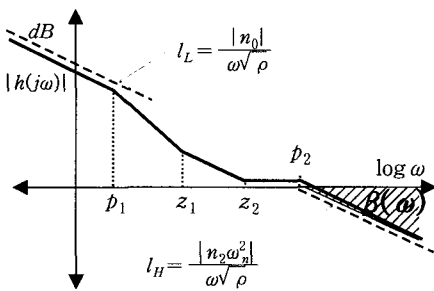


그림 4. 극점과 영점의 위치에 따른 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상

그림 4에서 p_1 과 p_2 를 루프 전달함수 $|h(j\omega)|$ 의 극점이라 하고 p_2 를 최대 극점이라 가정하자. 또한 z_1 과 z_2 를 $|h(j\omega)|$ 의 영점이라 하면 식(24)를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \omega_n^2 (s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_1)(s + p_2)} \right| \quad (33)$$

$|h(j\omega)|$ 의 극점인 p_1 과 p_2 가 플랜트 모델에 의하

여 주어지기 때문에, 보드선도상의 극점의 위치는 주어진 플랜트에 대하여 고정되어 있다. 그러나 $|h(j\omega)|$ 의 영점들은 설계 파라미터 n_0 , n_1 및 n_2 의 값에 따라 어떠한 위치로도 움직일 수 있다. 또한, $|h(j\omega)|$ 의 영점들을 이동 시켜 $|h(j\omega)|$ 의 적합한 루프 형상을 얻을 수 있다.

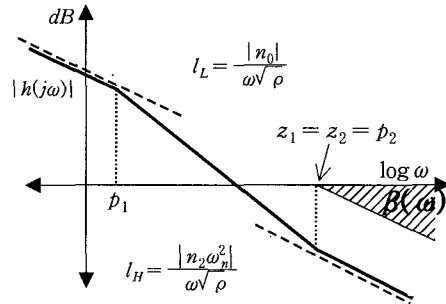


그림 5. $\lim_{z_1, z_2 \rightarrow p_2} |h(j\omega)|$ 일때의 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상

만약 p_1 과 p_2 는 고정되어 있고 z_1 과 z_2 가 최대 극점인 p_2 에 가까이 접근한다고 가정해보자. 그러면, 그림 5에서 보여지는 바와 같이 고주파 영역의 점근선인 $l_H(\omega)$ 이 센서 잡음 장벽 $\beta(\omega)$ 로부터 점점 멀어지게 될 것이다. 이러한 현상은 전달 함수의 극점과 영점에 대한 보드 선도를 고려하여 불매 쉽게 알 수 있는 부분이다.

식(33)을 극한 거동으로 표현하면 다음과 같다.

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow p_2} |h(j\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left| \frac{n_2 \omega_n^2 (s^2 + 2p_2 s + p_2^2)}{s(s + p_1)(s + p_2)} \right| \quad (34)$$

식(24)와 식(34)간의 계수 비교를 통하여 설계 파라미터 n_0 , n_1 , n_2 간의 상호 관계를 표현하면,

$$N = [n_0 \ n_1 \ n_2] = [n_2 p_2^2 \ 2n_2 p_2 \ n_2] \quad (35)$$

여기서 p_2 는 주어진 플랜트에 따라 정해지는 최대 극점이므로 설계 파라미터 N 은 단지 하나의 설계 요소 n_2 에 의하여 구해질 수 있게 된다.

앞서 설명한 바와 같이, 명령 추종 및 외란 제거에 대한 성능이 좋게 하기 위해서는 식(29)를 만족해야 하고 센서 잡음 및 고차 모델링 오차 감소 성능을 좋게 하기 위해서는 식(32)를 만족해야 한다. 따라서, 식(35)에서 보여지는 n_0 와 n_2 의 관계를 이용하여 식(29)와 식(32)를 동시에 만족하도록 하는 n_2 의 영역을 구하여 보면,

$$\frac{\Omega_r \sqrt{\rho} \cdot m_r}{p_2^2} < |n_2| < \frac{\Omega_n \sqrt{\rho} \cdot e_{\max}^{-1}(\omega)}{\omega_n^2} \quad (36)$$

또는

$$\frac{\Omega_r \cdot m_r}{p_2^2} < \frac{|n_2|}{\sqrt{\rho}} < \frac{\Omega_n \cdot e_{\max}^{-1}(\omega)}{\omega_n^2} \quad (37)$$

임을 알 수 있다. 식(36)과 식(37)에서 Ω_r , Ω_n , m_r , p_2 , $e_{\max}(\omega)$ 및 ω_n 는 주어진 플랜트와 설계 사양으로부터 알 수 있는 값이므로 $|h(j\omega)|$ 가 성능 사양의 두 장벽을 동시에 침범하지 않도록 만들어 주는 설계파라미터 n_2 의 범위를 구할 수 있다.

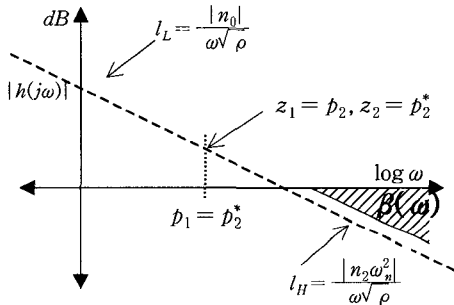


그림 6. $\lim_{\substack{z_1 \rightarrow p_2 \\ z_2 \rightarrow p_2^*}} |h(j\omega)|$ 일때의 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상

p_1 과 p_2 가 $p_1 = p_2^*$ 와 같이 공액복소수(complex conjugate)인 경우는 최대극점을 정의할 수 없으므로 z_1 과 z_2 가 극점 p_2 와 공액복소수 p_2^* 로 접근하도록 한다. 그러면, 그림 6에서 보여 지는 바와 같이 저주파 영역의 점근선인 $l_L(\omega)$ 과 고주파 영역의 점근선인 $l_H(\omega)$ 이 일치하게 되며, $|h(j\omega)|$ 의 루프형상은 $1/s$ 형상으로 근사된다. 이 경우 루프 형상이 직선 형태이므로 $|h(j\omega)|$ 가 성능 사양의 두 장벽을 동시에 침범하지 않도록 만드는 데에 있어서 n_2 파라미터의 설계 여유가 적어지게 된다. 다시 말해서 그림 5와 같이 누운 S자의 형태로 루프 형상이 되어 있는 경우가 보다 높은 장벽에 대하여 침범하지 않도록 설계하는 것이 가능하다는 것이다.

한편, ρ 를 변화시키면 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 전체적으로 위아래로 수평 이동 한다. 따라서 ρ 는 $\alpha(\omega)$ 와 $\beta(\omega)$ 의 두 장벽을 동시에 침범하지 않도록 $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상을 상하로 이동시키는데 사용된다. 이러한 ρ 의 역할은 Athans의 강의 노트^[12]

에 잘 설명되어 있다. 특히, 이러한 사실은 식(25)와 식(26)에서 보여주는 바와 같이 저주파 영역에서 $|h(j\omega)|$ 의 극한거동으로부터 잘 설명될 수 있다.

본 논문에서 제안하는 설계 방법을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 주어진 플랜트와 설계사양으로부터 식(37)을 만족시키는 n_2 를 선택한다.
- 2) 식(35)으로부터 선택된 n_2 에 대한 설계파라미터 N 을 구한다.
- 3) 상기에 언급된 바와 같이, $|h(j\omega)|$ 의 루프 형상이 $\alpha(\omega)$ 와 $\beta(\omega)$ 의 두 장벽을 동시에 침범하지 않도록 선택된 ρ 와 설계파라미터 N 을 이용하여 설계 가중 요소 $Q = N^T N$ 와 $R = \rho I$ 을 구하고, 이를 이용하여 식(12)의 Riccati 방정식을 풀어 최적 제어 이득 G 를 구한다.
- 4) 마지막으로 식(16)으로부터 PID제어기의 조정계수인 K_p , T_i 및 T_d 를 구한다.

IV. 예제 및 고찰

【예제 1】

본 예제로 기존 방법과 본 논문에서 제안하는 방법을 쉽게 비교하고자 한다. 2차 시스템을 갖는 플랜트 $g_p(s)$ 와 설계 사양이 다음과 같다고 가정하자.

$$g_p(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 1}$$

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} 30 \text{ dB} & , \omega \leq 1 \\ 0 & , \omega > 1 \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \leq 10 \\ 10/\omega & , \omega > 10 \end{cases}$$

설계 절차에 따라, $\rho = 1$ 일때 설계 파라미터 N 과 제어 이득 행렬 G 는

$$N = [342.9643 \quad 69.2929 \quad 3.5000],$$

$$G = [342.9643 \quad 123.0409 \quad 8.9297]$$

으로 구하여 지며, 최적 동조를 위한 PID 제어기의 파라미터는 $K_p = 123.0409$, $T_i = 0.3588$ 및 $T_d = 0.0726$ 로 구해진다.

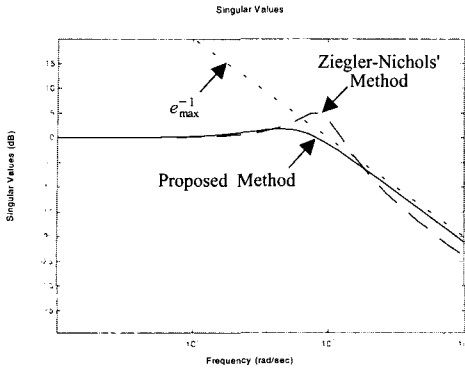


그림 7. 예제 1에 대한 페루프 전달함수의 형상 (본 논문의 방법: 실선, Ziegler-Nichols의 방법: 점선)

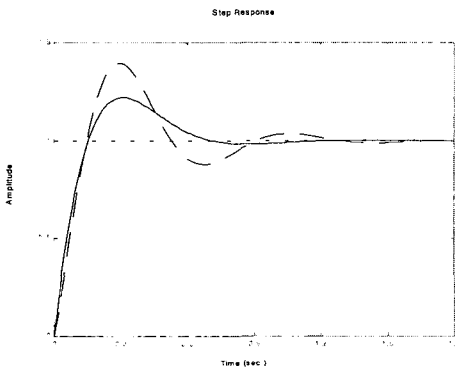


그림 8. 예제 1에 대한 PID 제어 시스템의 페루프 스텝응답 (본 논문의 방법: 실선, Ziegler-Nichols의 방법: 점선)

그림 7에서 보여 지는 바와 같이 본 논문에서 제안하는 방법으로 구한 페루프 전달함수 $C(j\omega)$ 는 Ziegler-Nichols의 방법으로 구한 페루프 전달함수와는 달리, 모델링 오차의 장벽인 $e_{\max}^{-1}(j\omega)$ 를 침범하지 않는다. 그리고 본 논문에서 제안하는 방법과 Ziegler-Nichols의 방법의 스텝 응답에서는 그림 8.에서 보여 지는 바와 같이 본 논문의 방법이 더 우수함을 알 수 있다.

【예제 2】

불안정한 플랜트인 $g_p(s)$ 와 설계 사양은

$$g_p(s) = \frac{10}{s^2 - 9s - 10}$$

$$\alpha(\omega) = \begin{cases} 50 \text{ dB} & , \omega \leq 1 \\ 0 & , \omega > 1 \end{cases}$$

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0 & , \omega \leq 10^3 \\ 10^3/\omega & , \omega > 10^3 \end{cases}$$

이다. 설계 절차에 따라 $\rho=1$ 일때 N 와 G 는

$$N = [5630.0 \quad 1126.0 \quad 56.3],$$

$$G = [5630.0 \quad 1136.9 \quad 59.2]$$

와 같이 구하여지며, PID 제어기의 PID 제어기의 파라미터는 $K_p=1136.9$, $T_i=0.2019$ 및 $T_d=0.0521$ 로 구해진다.

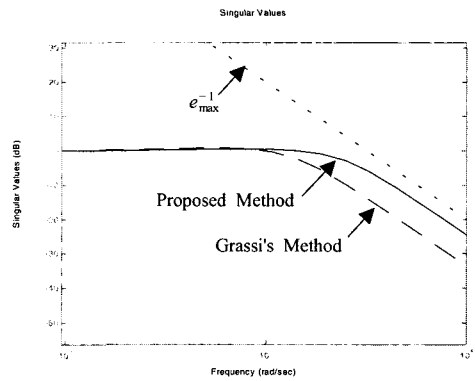


그림 9. 예제 2에 대한 페루프 전달함수의 형상 (본 논문의 방법: 실선, Grassi의 방법: 점선)

페루프 전달함수의 형상에 대해서 Grassi^{[8][9]}의 방법과 본 논문에서 제안하는 방법을 비교하면, 그림 9에서 보여지는 바와 같이 본 논문의 방법과 Grassi의 방법 모두 모델링 오차의 장벽 $e_{\max}^{-1}(j\omega)$ 를 침범하지 않음을 알 수 있다.

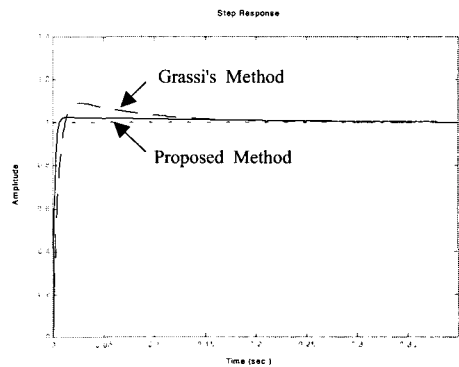


그림 10. 예제 2에 대한 PID 제어시스템의 페루프 스텝응답 (본 논문의 방법: 실선, Grassi의 방법: 점선)

또한, 스텝응답에 있어서는 그림 10.에서 보여 지는 바와 같이 본 논문의 방법이 다소 우수함을 알 수 있다.

V. 결 론

LQR 기법을 이용하여 2차 시스템에 적용할 수 있는 강인한 PID 최적 동조 방법을 제안 하였다. 이 방법은 PID 제어기의 두개의 영점을 플랜트의 최대 극점으로 가깝게 이동시켜 고주파 영역에 만족스런 루프형상을 얻을 수 있도록 하는 기법이다. 이 방법은 플랜트가 2차 시스템인 경우 만 적용할 수 있으므로 고차 시스템을 갖는 플랜트의 경우 모델 저차화(model reduction)를 사용하여 2차 시스템으로 근사 시킨 후 사용해야 한다.

참 고 문 헌

[1] G. Sein and J. Doyle, "Robustness with Observers", *IEEE Trans. on Auto. Control*, AC-24, pp. 607-611, 1979.

[2] J. Doyle, K. Glover and P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State space solutions to standard H^2 and H^∞ control problems", *IEEE Trans. Auto. Control*, AC-34, pp. 831-847, 1989.

[3] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity", *IEEE Trans. On Auto. Control*, AC-26, pp.301-320, 1981.

[4] K. J. Aström and K. J. Hagglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd ed. Research Triangle Park, NC:ISA, 1995.

[5] M. Grimble, " H^∞ controllers with a PID structure", *J. of Dynamic Syst. Meas. And contr.*, 112, pp. 325-336, 1990.

[6] C. Mattezoni and P. Rocco, "Robust tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification", *European J. of Contr.*, 3, pp.125-136, 1997.

[7] H. Panagopoulos and K. J. Aström, "PID Control Design and H^∞ Loop Shaping", *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference an Control Applications*, pp. 103-108, 1999.

[8] Elena Grassi and Kostas S. Tsakalis, "PID Controller Tuning by Frequency Loop-Shaping", *Proceedings of the*

35th IEEE Conference on Decision & Control, pp 4776-4781, 1996.

[9] Elena Grassi, Kostas S. Tsakalis, Sachi Dash, Sujit V. Gaikwad, Ward MacArthur, and Gunter Stein, "Integrated System Identification and PID Controller Tuning by Frequency Loop-Shaping", *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, vol.9, no.2, pp. 285-294, 2001.

[10] 김정근, 서병설, "루프 형성 기법을 이용한 최적 강인 PID 제어기 동조", *대한전자공학회 논문지* 제39권, p1~5, 2002.

[11] B. Suh, "Robust Optimal Tuning of PID Regulators for a Second Order System", *14th International Conf. on Sys. Science*, pp. 313-319, Wroctaw Poland, Sep., 2001.

[12] Athans M., *Lecture Note on Multivariable Control System*, M.I.T. Ref. No.860224/6234, 1986.

윤 성 오(Seong-O Yun)

정회원



1991년 2월 : 한양대학교
전자통신공학과 졸업
1994년 2월 : 한양대학교
대학원 전자통신공학과
석사
1994년 2월~현재 : 삼성에스원
기술연구소 선임연구원 및
한양대학교 전자통신공학과
박사과정

<주관심분야> 최적제어, 강인제어, LMI

서 병 설(Byung-Shul Suh)

정회원



한국통신학회논문지 제25권
제3호 참조
현재 : 한양대학교
전자전기컴퓨터공학부
교수