韓國經營科學會誌
第28卷 第4號
2003年 12月

일반배낭문제의 완전다항시간근사해법군의 존재조건*

홍성필** · 박범환***

About fully Polynomial Approximability of the Generalized Knapsack Problem*

Sung-Pil Hong** · Bum Hwan Park***

■ Abstract ■

The *generalized knapsack problem* or *gknap* is the combinatorial optimization problem of optimizing a nonnegative linear function over the integral hull of the intersection of a polynomially separable 0-1 polytope and a knapsack constraint. The knapsack, the restricted shortest path, and the constrained spanning tree problem are a partial list of gknap. More interestingly, all the problem that are known to have a fully polynomial approximation scheme, or FPTAS are gknap. We establish some necessary and sufficient conditions for a gknap to admit an FPTAS. To do so, we recapture the standard scaling and approximate binary search techniques in the framework of gknap. This also enables us to find a weaker sufficient condition than the strong *NP*-hardness that a gknap does not have an FPTAS. Finally, we apply the conditions to explore the fully polynomial approximability of the constrained spanning problem whose fully polynomial approximability is still open.

Keyword : Generalized Knapsack Problem, Fully Polynomial Approximation Scheme, Scaling, Approximate Binary Search, Constrained Spanning Tree Problem

논문접수일 : 2003년 11월 1일 논문게재확정일 : 2003년 11월 1일
* 이 논문은 2000년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.
** 중앙대학교 사회과학대학 상경학부
*** 서울대학교 대학원 산업공학과 박사과정

1. 서 론

Q를 선형최적화가 용이한, 즉 다항시간에 분리 가능한(polynomially separable) 0-1 정수 다면체(polytope)라 하자. 또한, $c, d \in Z^n_+$, $B \in Z_+$라고 하자(단, Z_+는 비음 정수 집합). 이때, 일반배낭문제(generalized knapsack problem : 이하 *gknap*)는 다음과 같이 정의한다.

문제 1.1 *gknap*

$$\begin{aligned} \min \text{ 또는 } \max \quad & c^T x \\ \text{s.t} \quad & x \in Q \\ & d^T x \le, \text{ 또는 } \ge B \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

따라서, 동일한 Q에 대해, 부등호의 방향과 min/max에 따라 네 가지 경우가 생길 것이다. 예를 들어, 목적함수가 min이고 부등호의 방향이 $\le$이면, *gknap*은 필요한 경우 *gknap*(min, $\le$)로 표기하기로 하자.

예 1.2 *gknap*(min, $\ge$) 그리고 *gknap*(max, $\le$)로서의 배낭문제(knapsack problem) : 잘 알려진 것처럼, 배낭문제는 $Q = \text{conv}\{0,1\}^n$인 *gknap*이다. 먼저, p_j와 w_j를 각각 j번째 품목의 이익(profit)과 무게(weight)이라고 했을 때, 배낭문제는 다음 두 가지 경우로 쓸 수 있다. 첫째, 무게의 제한을 만족하면서 최대의 이익을 내는 품목의 집합을 고르는 문제로 모형화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ \text{s.t} \quad & x \in \{0,1\}^n \\ & w^T x \le W. \end{aligned}$$

둘째, 제거했을 때 나머지가 무게의 제한을 만족하도록 하는 최소 이익 품목집합을 고르는 문제로 표현할 수도 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & p^T x \\ \text{s.t} \quad & x \in \{0,1\}^n \\ & w^T x \ge \sum w_j - W. \end{aligned}$$

위 두 모형은 최적해의 관점에서는 동등하다. 그러나, 한 문제의 근사가능성이 다른 문제의 근사가능성을 보장하는지는 알 수 없다. 이러한 대표적인 예로 노드커버(node cover)와 안정집합(stable set) 문제를 들 수 있다.

예 1.3 추가제약이 있는 최단 경로 문제 (Restricted Shortest Path problem, *RSP*) : 네트워크 $G = (V, A)$의 각 호(arc), $ij \in A$에 두 가지 파라미터, 비용(cost), c_{ij}와 지연시간(delay), d_{ij}를 주자. RSP는 임의의 노드 s와 t에 대해, 지연시간의 합이 B 이하인 최소 비용을 갖는 $s-t$경로는 찾는 문제이다 :

$$\begin{aligned} \min \quad & c(P) \\ \text{s.t} \quad & P \in \quad , \quad \text{는 } s-t\text{경로의 집합} \\ & d(P) \le B \end{aligned}$$

RSP에서 $Q(\subseteq R^A)$는 $s-t$경로를 표현하는 특성 벡터의 볼록덮개(convex hull)가 된다. 잘 알려진 것과 같이 Q는 다항 시간 안에 분리 가능한 0-1 정수다면체이다. 따라서, RSP 문제는 *gknap*(min, $\le$)이 된다.

배낭문제와 RSP 문제는 모두 FPTAS를 갖는다 [7, 11, 5]. 두 문제 모두 동적계획법(dynamic programming)을 이용하여, 두 개 중 한개의 파라미터에만 의존하는 유사다항시간 해법(pseudo-polynomial algorithm)을 얻을 수 있다. 여기서 한 가지 지적할 점은, 기존의 모든 FPTAS는 이러한 유사다항시간 동적 계획에 기반을 두고 있다는 것이다. 예를 들어, RSP 문제에 대한 유사다항식 동적계획법 알고리듬을 살펴보자[5]. 먼저, $d_j(\gamma)$를 경로 비용이 γ 이하인 $s-t$ 경로의 지연시간의 최소값이라고 하자. 모든 $\gamma \ge 0$에 대해 $d_s(\gamma) = 0$이라 두고, 모든 $j \in V$에 대해서 $d_j(0) = \infty$라고 초기화하자. 그러면 모든 $j \in V$,와 $\gamma = 1, 2, \cdots,$에 대해 다음의 동적 계획식이 성립한다.

$$\begin{aligned} d_j(\gamma) = \ & \min\{d_j(\gamma-1), \\ & \min_{k \mid c_{kj} \le \gamma}\{d_k(\gamma - c_{kj}) + d_{kj}\}\} \end{aligned} \tag{1}$$

$d_t(\gamma)$는 γ에 대해 단조감소이므로, $d_t(\gamma) \le B$를 만족하는 최초의 $\gamma = \gamma^*$를 구하면, 이는 RSP의 최적목적함수값, *OPT*가 된다. 전체 계산시간은 $O(m \cdot OPT)$가 되는 것을 쉽게 알 수 있다.

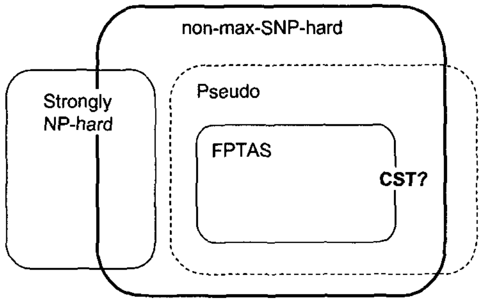
그러나, 모든 *gknap* 문제가 위와 같은 하나의 파라미터에 의존하는 유사다항시간해법이 존재하는 것은 아니다. 예를 들어 다음과 같은 *gknap* 문제는 이러한 유사 다항 시간 해법이 알려져 있지 않다.

예 1.4 추가제약이 있는 신장 나무 문제(Constrained Spanning Tree problem, CST) : 무향그래프 $G=(V,E)$가 주어져 있고, 각 호 $ij \in E$에 두 개의 비음 정수 비용(cost), c_{ij}와 길이(length), d_{ij}가 주어져 있다. 이 때, CST 문제는 신장 나무의 전체 길이가 B 이하인 신장 나무 중에서 최소 비용을 갖는 것을 구하는 문제이다.

$$\begin{aligned} \min\ & c(T) \\ \text{s.t}\ & T \in \ ,\ \text{는 } G\text{상의 신장나무의 집합} \\ & d(T) \le B \end{aligned}$$

Aggarwal[1]등은 CST가 *NP*-hard임을 증명하였고, 이후 Ravi and Goemans[11]는 라그랑지안 완화문제의 최적해의 인접성(adjacency)를 이용하여 PTAS를 고안하였다. 실제로 CST에 대한 기존의 해법들은 거의 모두 이와 같은 라그랑지안 완화법에 기반하고 있다[1, 11, 10]. 하지만, CST 문제에 대한 FPTAS의 존재유무는 아직 알려져 있지 않다.

앞에서도 언급했듯이, 지금까지 알려진 모든 FPTAS는 유사다항시간해법에 기반하고 있다. 그래서 CST 문제에 대한 FPTAS를 구성하려면 먼저 유사다항시간해법을 살펴보는 것이 일반적이다. Hong[6]등은 행렬-나무 정리(Tree-Matrix Theorem)을 확장하여, CST 문제에 대한 유사다항시간해법을 제시하였다. 그러나, 그들의 해법은, 앞의 RSP 문제의 유사다항시간해법과는 달리, 두 개의 파라미터 모두에 의존하는 계산시간을 갖기 때문에, 그로부터 CST 문제의 FPTAS를 얻을 수 있는지는 아직 알려져 있지 않다. 한편, PTAS와 유사다항시간해법을 가지는 문제 중에서 FPTAS가 불가능하다고 증명된 예는 아직 없다. 이러한 관점에서, 다음 [그림 1]에서 보듯이, CST 문제는 계산복잡성 이론에서 다음과 같은 불확실한 위치에 놓여 있어 그 근사가능성은 이론적으로 중요한 문제가 된다.



[그림 1] CST문제의 계산 복잡도

2장에서는 FPTAS를 구성할 때 가장 일반적으로 사용되는 비례축소와 근사이진탐색 방법을 체계적으로 정리하고 이를 이용한 FPTAS의 구성 방법에 대해 알아본다. 이것을 통해 일반적으로 *gknap* 문제가 FPTAS를 갖기 위한 필요충분조건을 제시한다. 3장에서는 2장의 논의를 이용하여, CST 문제에 대한 FPTAS의 가능성 또는 불가능성을 모색하여 본다.

2. 일반배낭문제에 대한 완전다항시간근사해법군의 존재조건

2장에서는, FPTAS의 구성에 있어서 핵심적으로 사용되는 방법인 비례축소(scaling)와 근사이진탐색(approximate binary search)[7, 12]을 이용하여 *gknap* 문제의 완전다항시간 근사가능성에 대한 필요충분존재조건을 알아본다. 이를 위해 우선 다음을 정의하자.

정의 2.1 동일한 Q을 가진, *gknap*$(\min, \ge)$과 *gknap*$(\max, \le)$을 서로 *결레* 관계(conjugates)에 있다고 하자. 한편, *gknap*$(\max, \ge)$ 또는 *gknap*

$(\min, \leq)$는 *자체-켤레*(self-conjugate)*문제*라고 부르자.

정의 2.2 어떤 $\varepsilon > 0$에 대해, $|c^T(\hat{x}) - OPT| \leq \varepsilon OPT$를 만족하는 해 $\hat{x}$를 *ε-근사해*라 하고 그러한 해를 구하는 해법을 *ε-근사해법*이라 한다.

표기를 편리하게 하기 위해 $\langle \cdot \rangle$를 $\cdot$의 입력크기(encoding length)로, poly는 어떤 다항식함수라고 하자. 그러면, *gknap* 문제에 대한 FPTAS는 다음을 만족하는 근사해법을 말한다.

정의 2.3 *gknap* 문제에 대한 ε-근사해를 poly(n, 시$\langle c_{\max}\rangle, \langle d_{\max}\rangle, \langle B\rangle, 1/\varepsilon$)간 안에 계산 가능하면, 그 해법을 *완전다항시간근사해법군*(Fully polynomial time approximation scheme)이라고 하고 이때 *gknap* 문제를 *완전다항근사가능*하다고 하자.

이제, *gknap* 문제의 관점에서 비례축소와 근사이진탐색을 정리하여 보자. 비례축소란 문제의 파라미터의 값을, 주어진 오차 범위 내에서는 동일하게 취급하여, 문제를 풀기 용이하게 만드는 것을 의미한다. 이때, 다음과 같은 절삭(flooring) 또는 절상(ceiling)을 사용할 수 있다. 어떤 $\varepsilon > 0$, $C > 0$에 대해, c의 절삭과 절상은 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{c}_j = \lfloor c_j/(\varepsilon C/n) \rfloor, \check{c}_j = \lceil c_j/(\varepsilon C/n) \rceil \quad j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

다음 사실은 간단하지만 유용하며 쉽게 증명할 수 있다.

기본정리 2.5 모든 $x \in \{0, 1\}^n$에 대해,

$$\hat{c}^T x > \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow c^T x > C,$$
$$\check{c}^T x \leq \lceil n/\varepsilon \rceil \rightarrow c^T x < (1+\varepsilon)C \tag{3}$$
$$\check{c}^T x < \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow c^T x < C,$$
$$\check{c}^T x \geq \lceil n/\varepsilon \rceil \rightarrow c^T x > (1+\varepsilon)C \tag{4}$$

주어진 *gknap* 문제의 c를 절삭 또는 절상하여 만든 문제를 $\widehat{gknap}$ 문제라고 표기하자.

문제 2.6 $\widehat{gknap}$ 문제

$$\begin{aligned} \widehat{OPT} = \min \quad & \hat{c}^T x \text{ or } \max \ \check{c}^T x \\ \text{s.t} \quad & x \in Q \\ & d^T x \leq, \text{ or } \geq B \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

다음의 성질은 기본정리 2.5를 사용하여 쉽게 증명할 수 있다. [5, 12]에서 RSP를 위한 FPTAS를 고안할 때, 사용하였으며, 일반적으로 *gknap* 문제에서도 같은 원리로 증명할 수 있기 때문에 증명은 생략하기로 하자.

기본정리 2.7 어떤 양의 정수 $C > 0$에 대해, $\hat{x}$를 $\widehat{gknap}(\min, \cdot)$의 최적해라고 하면 다음이 성립한다.

$$c^T \hat{x} < OPT + \varepsilon C, \tag{5}$$
$$\hat{c}^T \hat{x} > \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow OPT > C,$$
$$\hat{c}^T \hat{x} \leq \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow OPT < (1+\varepsilon)C \tag{6}$$

이와 유사하게, $\check{x}$를 $\widehat{gknap}(\max, \cdot)$의 최적해라 하면, 다음이 성립한다.

$$c^T \check{x} < OPT - \varepsilon C, \tag{7}$$
$$\check{c}^T \check{x} < \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow OPT < C,$$
$$\check{c}^T \check{x} \geq \lfloor n/\varepsilon \rfloor \rightarrow OPT > (1-\varepsilon)C \tag{8}$$

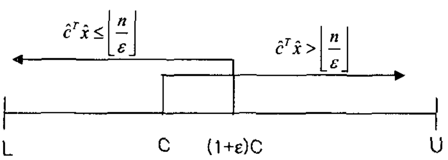
식 (6)과 식 (8)은 $\varepsilon > 0$와 $C > 0$를 사용하여 비례축소한 문제를 풀면, 원래의 최적해와 C의 상대적 위치를 근사적으로 알 수 있음을 보여준다. 이러한 근사이진탐색은 RSP 문제 FPTAS을 개발하는데 핵심적인 방법이다 [5,12]. *gknap* 문제에도 같은 원리로 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 2.8 *gknap* 문제가 c에만 의존하는 유사 다항시간 해법, 즉 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max}\rangle, \langle B\rangle)$의 계산 시간 안에 풀리면, *gknap* 문제는 완전다항시간 근사가능하다.

증명(스케치) : 우선 초기 하한과 상한을 L_0, U_0라

했을 때, $L \le OPT \le U$이고, $U/L = O(1)$을 만족하는, 하한과 상한 L, U를 구하는 방법부터 알아보자.

현재 하한과 상한을 L 그리고 U라고 하자. 먼저 $c_j > U$인 x_j는 삭제하고 나머지 변수의 c_j에 대해, 목적함수가 min일 경우 $\hat{c}_j = \lfloor c_j/(\varepsilon L/n) \rfloor$, max일 경우 $\check{c}_j = \lceil c_j/(\varepsilon L/n) \rceil$로 비례축소한다. (여기서는 전자의 경우만 고려하자. 후자의 경우는 같은 원리로 증명할 수 있다.) 그러면, $\widehat{gknap}$ 문제는 가정에 의하여 poly $(n, U/(\varepsilon C/n), \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$, 또는 poly $(n, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle, 1/\varepsilon)$만에 계산 가능하다. 이 $\widehat{gknap}$ 문제의 최적값에 따라 새로운 하한 혹은 상한을 결정할 수 있다([그림 2]를 참조). 만약, $\varepsilon = O(1)$이면, 기본정리 2.7의 식 (6)과 식 (8)의 이진탐색(binary search)를 이용하면, $U/L = O(1)$을 만족하는 L과 U를 구하기 위해 많아야 $O(\log(U_0/L_0))$만큼의 연산횟수(iteration)면 충분하다.



[그림 7] 근사 이진 탐색

따라서 이러한 U, L을 구하기 위한 계산시간은 $O(\log(U_0/L_0)) \times$ploy $(n, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$가 되고, $U_0 = nc_{\max}$로 놓을 수 있기 때문에, poly $(n, \langle c_{\max} \rangle, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$가 된다.

일단 $U/L \le O(1)$이 만족되면, 이 때 구한 L과 U를 이용하여, $c_j > U$인 x_j는 모두 삭제하고 $\hat{c}_j = \lfloor c_j/(\varepsilon C/n) \rfloor$로 비례축소하여, $\widehat{gknap}$ 문제를 푼다. 가정에 의해, 이 문제는 poly $(n, U/(\varepsilon L/n), \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$만에 계산 가능한데, $U/L \le O(1)$이므로, 전체 계산 시간은 poly $(n, \langle c_{\max} \rangle, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$이 된다. 한편, $\widehat{gknap}$ 문제의 최적해를 $\hat{x}$이라고 하면, 기본정리 2.7에 의해 $c^T\hat{x} \le OPT + \varepsilon L \le (1+\varepsilon)OPT$가 성립하여, 완전다항시간근사가능해법군이 된다.

역은 $\varepsilon = 1/(2\varepsilon c_{\max})$로 놓으면 ε-근사해는 최적해가 된다는 것에서 증명된다. 왜냐하면, 가정에 의해, 이때 계산 시간은 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$이 되기 때문이다. ■

따름정리 2.9 Q가 주어져 있을 때, $gknap$ 문제의 완전다항시간근사해법군이 존재할 필요충분조건은 그 결레문제가 배낭제약식에 포함된 파라미터에만 의존하는 유사다항시간에 계산가능한 것이다. 즉, 결레문제의 최적해를 poly $(n, \langle c_{\max} \rangle, d_{\max}, B)$에 계산 가능한 것이다.

증명. 예를 들어 다음과 같은 $gknap(\max, \le)$를 고려하자.

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t} \quad & x \in Q \\ & d^T x \le B \end{aligned} \tag{9}$$

이진 탐색을 이용하면 식 (9)는 다음을 만족하는 최대의 γ를 찾는 문제와 동일하다.

$$B \ge \min\{d^T x : x \in Q, c^T x \ge \gamma\} \tag{10}$$

그런데, 결레문제에 대한 가정에 의해, 각 γ에 대해 식 (10)은 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max} \rangle, \gamma)$ 시간 안에 계산 가능하다. 그런데 $\gamma \le nc_{\max}$이므로 이진탐색의 횟수는 $O(\log(nc_{\max}))$이 되며, 이로부터 문제 식 (9)는 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max} \rangle)$만에 계산 가능하다. 따라서, 정리 2.8에 의해, $gknap(\max, \le)$은 완전다항시간근사가능하다.

역을 증명하기 위해, 문제 식 (9)가 완전다항시간근사가능하다고 가정하자. 근사오차를 $\varepsilon = 1/(2nc_{\max})$라고 놓으면 근사해는 원래문제의 최적해가 되는데, 이때 완전다항시간 근사해법군의 계산시간은 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max} \rangle, \langle B \rangle)$가 된다.

이제, 식 (9)의 결레 관계 문제를 고려하자.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x & (11) \\ \text{s.t} \quad & x \in Q \\ & d^T x \geq B \end{aligned}$$

이진 탐색을 이용하면 문제 (11)은 다음을 만족하는 최소의 γ를 찾는 문제와 동일하다.

$$B \leq \max\{d^T x : x \in Q, c^T x \leq \gamma\} \qquad (12)$$

앞의 논의에서 문제 식 (9)가 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max}\rangle, \langle B\rangle)$에 계산가능하므로, 문제 식 (12)는 poly $(n, d_{\max}, \langle c_{\max}\rangle, \langle \gamma\rangle)$만에 계산 가능하고, 따라서 이진탐색을 사용하면 $\gamma \leq nc_{\max}$이므로, 문제 식 (11)은 poly $(n, d_{\max}, \langle c_{\max}\rangle)$ 만에 계산 가능하다. ■

이 따름정리에 의해, 자체-결레문제인 *gknap* 문제에 대해서는 다음이 성립한다.

따름정리 2.10 *gknap* 문제가 자체-결레문제인 경우, 그것이 완전다항시간근사가능한 필요충분조건은 최적해를 poly $(n, \langle c_{\max}\rangle, d_{\max}, B)$ 시간에 계산 가능한 것이다.

따름정리 2.11 자체-결레인 *gknap* 문제가 완전다항시간 근사가능하면 최적해가 poly $(n, c_{\max}, \langle d_{\max}\rangle, \langle B\rangle)$와 poly $(n, \langle c_{\max}\rangle, d_{\max}, B)$만에 계산 가능하며, 그 역도 성립한다.

따름정리 2.11로부터 다음의 사실을 즉시 알 수 있다.

정리 2.12 *gknap* 문제가 자체-결레문제인 경우, $d_{\max}, B = O($poly $(n, \langle c\rangle)$ 혹은 $c_{\max} = O($poly $(n, \langle d\rangle, \langle B\rangle))$를 만족하면서 *NP*-hard인 문제 예(instance)가 존재하면 그 *gknap* 문제는 완전다항시간근사해법군을 개발하는 것이 불가능하다.

지금까지 근사해법연구에서 유일하게 사용해온 완전다항시간근사해법군 불가능성에 대한 충분조건은 강성 *NP*-hard(strongly *NP*-hard)이다. 강성 *NP*-hard 문제란, 주어진 문제의 파라미터의 최대 값이 문제 입력크기의 다항식보다 작더라도 *NP*-hard가 되는 예가 존재하는 문제를 말한다. 파라미터의 최대 값이 입력크기의 어떤 다항식에도 제한되지 않는 문제를 *수-문제(number problem)*라 하는데, 결국 강성 NP-hard란 수-문제가 아닌 경우에도 *NP*-hard인 예를 갖는 문제를 말한다. 다음 장에서 살펴볼 CST문제의 경우, 이미 유사 다항시간 해법이 존재하므로, 강성 *NP*-hard의 개념은 CST문제의 FPTAS 불가능성(impossibility)에 대한 어떤 시사점도 줄 수 없다.

그런데, 정리 2.12에서 제시된 것은 c혹은 d 중 하나의 파라미터만 입력크기의 다항식에 제한되므로 모든 입력값이 입력크기의 다항식에 제한되는 수-문제 보다 일반화된 조건이라 할 수 있다(이 문제를 편의상 *반-수-문제(semi-number problem)*라고 부르자.). 정리 2.12는 예를 들어, 유사 다항시간 해법이 존재하더라도 주어진 *gknap* 문제의 반-수-문제 예가 *NP*-hard임을 보일 수 있다면, FPTAS의 불가능성을 증명할 수 있다는 점에서 훨씬 유용하다고 하겠다.

3. CST 문제의 완전다항시간 근사가능성에 대해

3.1 CST 문제에 대한 유사 다항 시간 해법

Hong[6]등은 2개의 변수를 이용한 행렬-나무 정리[4]의 확장을 통해서 최초로 유사 다항 시간 해법을 제시하였다. 행렬-나무 정리는 특정 비용을 갖는 신장 나무를 찾는 문제(exact spanning tree problem)에 대한 해법에서도 단일 변수를 사용하여 적용되었다[3].

먼저, $L = (l_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$을 다음과 같이 정의하자.

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{k:(i,k)\in E} x^{c_{ik}} y^{d_{ik}} & \text{만약 } i = j, \\ -x^{c_{ij}} y^{d_{ij}}, & \text{만약 } i \neq j, (i,j) \in E \\ 0, & \text{나머지경우.} \end{cases} \qquad (13)$$

정리 3.1[6] L에서 n번째 행과 열을 삭제한 행렬을 $\overline{L}$이라 했을 때, 다음이 성립한다.

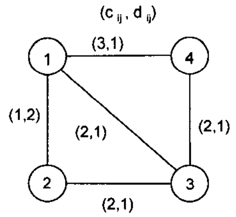
$$\det \overline{L} = \sum_{p,q} a_{pq} x^p y^q \tag{14}$$

여기서 a_{pq}는 비용이 p이고 길이가 q인 신장나무의 개수이다.

예를 들어, [그림 3]에 정리 3.1을 적용하면,

$$\overline{L} = \begin{pmatrix} x^3y + xy^2 + x^2y & -xy^2 & -x^2y \\ -xy^2 & xy^2 + x^2y & -x^2y \\ -x^2y & -x^2y & 3x^2y \end{pmatrix}$$

이 되고, $\det \overline{L} = 3x^6y^4 + 2x^5y^4 + 2x^7y^3 + x^6y^3$가 된다. 이는, 비용이 6이고 길이가 4인 신장나무의 개수는 3개, 비용이 5이고 길이가 4인 신장나무의 수는 2개 등을 의미한다. 따라서, $B=4$이면 $OPT=5$가 된다.



[그림 8] CST 문제의 예

이때 행렬식을 계산하는데 발생하는 문제는 행렬의 원소가 수가 아닌 다항식 반환(semi-ring)이기 때문에 가우스 소거법과 같은 방법으로는 행렬식을 계싼할 수 없다는 것이다. 그러나, Mahajan and Vinay[9]는 나누기 연산을 사용하지 않는 조합적인 행렬식 계산해법을 개발하였으며, 이를 우리의 행렬에 적용하면 $O(n^4\tau(C,D))$의 계산 시간에 행렬 다항식을 계산할 수 있다. 이 때, $\tau(C,D)$는 x, y의 최고 차수가 C, D 이하인 두 개의 다항식을 곱할 때 필요한 계산시간이다. Aho 등[2]은 $O(CD\log(CD))$의 계산 시간을 갖는 방법을 소개하였다. 따라서 CST는 유사다항시간에 계산가능하다.

3.2 다항시간안에 계산 가능한 특수한 CST 문제

정리 2.8에 의해 CST 문제의 길이 d_{ij}가 0 또는 1인 경우 FPTAS가 존재하게 된다. 그러나, 이 문제를 매트로이드 이론을 사용하면, d_{ij}가 0-1인 경우 실제로 다항시간안에 최적해를 구하는 것이 가능한 문제임을 알 수 있다.

먼저, $M_1=(E, T_1)$을 E상의 무환부분그래프(acyclic subgraph)의 호의 집합이라 하자. 즉, M_1은 일반적인 그래프 매트로이드(graphic matroid)이다. 그리고, $M_2=(E, T_2)$은 다음과 같이 정의하자.

집합 E'를 $E'=\{ij \mid d_{ij}=1\}$로 정의하고, T_2는 다음을 만족하는 호의 집합 $F(\subseteq E)$를 원소로 한다 : $|F \cap E'| \le B$. 그러면, M_2 또한 매트로이드가 되고, 이 때 M_2의 계수함수(rank function)는 $r(F)=|F\cap E'|$가 된다.

따라서, M을 충분히 큰 양수라고 하면, 위와 같은 CST 문제는 다음과 같은 최대 매트로이드겹침문제(maximum weighted matroid intersection problem)가 된다.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{ij\in E}(M-c_{ij})x_{ij} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{ij\in E(S)} x_{ij} \le |S|-1, \quad \forall \varnothing \ne S \subseteq V \\ & \sum_{ij\in F} x_{ij} \le r(F), \quad \forall F \subseteq E \\ & x_{ij} \ge 0, \quad \forall ij \in E \end{aligned}$$

잘 알려진 것과 같이 최대 매트로이드겹침문제는 다항시간에 풀 수 있는 문제이며, 따라서 d가 0-1 벡터이면 CST는 다항시간에 풀 수 있는 문제가 된다.

3.3 완전다항시간 근사가능한 특수한 CST 문제

CST 문제는 $gknap(\min, \le)$이므로, 자체-결레관계 문제이다. 따라서, 따름정리 2.11과 3.1절에서

언급한 유사다항 알고리듬을 사용하면, 다음과 FPTAS가 가능한 CST의 부분문제를 알 수 있다.

정리 3.2 CST 문제에서 $d_{\max}, B = O(\text{poly}(n, \langle c \rangle)$혹은 $c_{\max} = O(\text{poly}(n, \langle d \rangle, \langle B \rangle))$를 만족하면, CST 문제는 FPTAS를 갖는다. 즉, CST 문제의 반-수-문제는 FPTAS를 갖는다.

4. 결 론

본 연구에서는 *gknap* 문제가 FPTAS를 갖기 위한 필요충분조건들을 알아보았다. 먼저, 어떤 *gknap* 문제가 FPTAS를 갖기 위해서는 그 문제의 켤레 문제가 배낭 제약식의 파라미터에만 의존하는 유사다항시간 해법을 가져야 한다. 우리는 이로부터 자체-켤레문제인 *gknap* 문제에 대해서, FPTAS가 가능한 필요충분조건과 불가능한 충분조건을 제시하였다. 특히, 주어진 *gknap* 문제의 반-수-문제가 *NP*-hard이면, FPTAS가 불가능함을 보였다. 자체-켤레문제가 아닌 *gknap* 문제에 대해서도 위와 같은 논의가 가능할 것으로 추측하지만, 아직 증명은 되지 않았다.

또한 아직 완전다항시간 근사해법군의 가능성이 알려지지 않은 CST 같은 문제의 불가능성을 증명하기 위해서는, 반-수-문제가 *NP*-hard인 *gknap* 문제의 예를 찾는 것이 유용한 연구 방향이 될 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Aggarwal, V. and Y.P. Aneja and K.P.K. Nair, "Minimal Spanning Tree Subject to a Side Constraints," *Comput. Ops. Res.*, Vol. 9, No.4(1982), pp.287-296.

[2] Aho, A. and V., J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison Wesley, 1976.

[3] Barahona, F. and W.R. Pulleyblank, "Exact Arborescences, Matchings and Cycles," *Discrete Applied Mathematics*, Vol.16 (1987), pp.91-99.

[4] Chaiken, S. and D.J. Kleitman, "Matrix Tree theorem," *J. Combin. Theory A*, Vol. 24(1978), pp.377-381.

[5] Hassin, R., "Approximation Schemes for The Restricted Shortest Path Problem," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 17, No.1(1992), pp.36-42.

[6] Hong, S.-P. and B.H. Park and S.-J Chung, "A Fully Polynomial Bicriteria Approximation Scheme for Constrained Spanning tree Problem," To appear in *Operations Research Letters*.

[7] Horowitz, E. and S. Sahni, *Fundamentals of Computer Algorithms*, Computer Science Press, Maryland, 1989.

[8] Ibarra, O. and C. Kim, "Fast Approximation Algorithms for the Knapsack and Sum of Subsets Problems," *Journal of ACM*, Vol. 24(1975), pp.463-468.

[9] Mahajan, M. and V. Vinay, "Determinant : Old Algorithms, New Insights," *SIAM J. Discrete Mathematics*, Vol.12, No.4(1999), pp.474-490.

[10] Marathe, M.V. and R. Ravi and R. Sundaram and S.S. Ravi and D.J. Rosenkrantz and H.B. Hunt III, "Bicriteria Network Design Problems," *Journal of Algorithms*, Vol. 28(1998), pp.142-171.

[11] Ravi, R. and M.X. Goemans, "The Constrained Minimum Spanning Tree Problem," *Proceedings of the Scandinavian Workshop on Algorithmic Theory, LNCS*, Vol.1097(1996), pp.66-75.

[12] Warburton, A., "Approximation of Pareto Optima in Multiple-Objective, Shortest-Path Problems," *Operations Research*, Vol. 35 No.1(1987), pp.70-79.

저 자 소 개

강성열 서울대학교 산업공학과에서 학사(1981)와 석사(1983), Georgia Tech 산업시스템공학부에서 박사(1992) 학위를 취득하였다. ETRI에서 책임연구원으로, KAIST 테크노경영대학원에 초빙교수로 근무하였으며, 현재 홍익대학교 상경대학 경영정보학과 교수로 재직 중이다. 주요 관심분야는 정보통신, 인터넷, e-비즈니스, stochastic modeling 등이다.

김상훈 현재 광운대학교 경영정보학과 교수로 재직 중이다. 서울대학교 경제학과를 졸업하고 한국과학기술원(KAIST) 경영과학과에서 석사 및 박사학위를 취득하였다. Information & Management, Information Processing & Management, Computer Personnel(ACM SIGCPR), Information Resources Management Journal 등의 국제학술지 및 경영학연구, 한국경영과학회지 등의 국내학술지에 논문을 게재한 바 있다. 주요 관심연구분야는 정보화전략 수립 및 추진, 정보시스템실행을 위한 변화관리, 경영혁신과 정보기술활용, 정보시스템평가, ERP (Enterprise Resource Planning)시스템 구현, S/W개발 프로젝트관리 등이다.

김세헌 현재 한국과학기술원 산업공학과 교수로 재직 중이다. 서울대학교 물리학과에서 학사(1972), Stanford University에서 Operations Research 석사(1978), 박사(1981) 학위를 취득하였다. 정보통신경영 및 통신시스템의 설계/분석을 위한 최적화 기법의 적용에 많은 관심을 가지고 있다.

김수현 현재 배재대학교 경영학과 교수로 재직 중이다. 고려대학교 통계학과에서 학사(1991), 한국과학기술원 경영과학과에서 석사(1993), 박사(1997) 학위를 취득하였다. 주요 관심사는 정보통신경영, 정보통신시스템최적화이다.

명영수 현재 단국대학교(천안) 경상학부 교수로 재직 중이다. 서울대학교 경영학과에서 경영학사(1979), 한국과학기술원에서 산업공학석사(1981) 및 경영과학박사(1989)를 취득하였다. 삼성물산에서 근무하였고(1981~1984), 미국 MIT대

OR 센터에서 1990년(연암 Fellow)과 1998년(Fulbright Fellow)년에 각각 1년 동안 Visiting Scientist로 연구하였다. 주요 관심분야는 조합최적화(Combinatorial Optimization)의 이론 및 응용이다.

민재형 현재 서강대학교 경영대학 교수로 재직 중이다. 미국 Indiana University에서 경영학 박사학위(1989)를 취득하였고, 영국 University of Cambridge 객원교수를 역임하였다. 주요 관심분야는 다기준 의사결정, 기업성과측정, 지식경영, 확률모형이론 등이며, 현재 PMA(Performance Measurement Association)의 Steering Board로 활동하고 있다.

박범환 현재 서울대학교 산업공학과 박사과정에 재학 중이다. 서울대학교 산업공학과에서 학사(1995년), 석사(1997) 학위를 취득하였고 주요 관심분야는 조합최적화 알고리듬이며 특히 근사해법 개발이 주요 관심연구분야이다. 응용분야로는 정보통신망에서 망의 구성과 라우팅 알고리듬이다.

송영민 건국대학교 응용통계학과를 졸업(1997)하고, 서강대학교 대학원 경영학과에서 경영과학 전공으로 석사학위(2003)를 취득하였다. 현재 서강대학교 경영학과 박사과정에 재학 중이며, 서강대학교 경영학연구원 기업성과평가센터의 연구원으로 활동하고 있다. 주요 관심분야는 다기준 의사결정, 시스템 다이내믹스, 금융공학 등이다.

안성제 서울대학교 산업공학과에서 학사(1985), 석사(1987)를 하고 미국 University of Pennsylvania, The Wharton School에서 경영학 박사(1997)를 취득하였다. 1998년부터 서울시립대학교 경영학부 교수로 재직 중이며 주요 관심분야로는 공급사슬관리(SCM), 서비스관리, e-비즈니스, 의사결정론, 정수계획법 등이다.

유동근 세종대학교 경영대학 경영학과 교수로 재직 중이며, 서울대학교 경영학과에서 학·석사 학위를 취득하였고, 숭실대학교에서 마케팅 전공으로 박사학위를 취득하였다. 국방과학연구소, 삼성그룹 비서실, 현대마케팅연구원장으로 근무하였으며, 주요 관심분야는 소비자행동과 고객만족, 서비스 품질 등이다.

윤남수 상지대학교 겸임교수이며, 신용보증기금 기획부, 경제조사부, 경영지도부 등에서 근무하였다. 서강대학교에서 경영학 석사학위를 취득하였고, 세종대학교 대학원에서 마케팅 전공으로 박사학위를 취득하였다. 주요 관심분야는 인터넷마케팅, e-CRM, 인터넷 기업가치 평가, 웹사이트 평가 등이다.

윤상흠 현재 전주대학교 정보기술컴퓨터공학부 조교수로 재직 중이다. 성균관대학교 산업공학과에서 학사(1990), 한국과학기술원 산업공학과에서 석사(1992) 및 박사학위(1997)를 취득한 후 한국전자통신연구원(ETRI)에서 근무하였다. 주요 연구분야는 생산일정계획, 생산 및 정보시스템 분석, 정보보호 등이다.

이용기 충주대학교 경영학과 부교수로 재직 중이며, 세종대학교 대학원에서 마케팅전공으로 석·박사학위를 취득하였고, 서비스마케팅과 인터넷마케팅 분야의 연구를 하고 있다.

장근녕 현재 연세대학교 경법대학 경영학과 부교수로 재직 중이다. 서울대학교 국제경제학과에서 학사(1988), 한국과학기술원 경영과학과에서 석사(1990) 및 박사(1994) 학위를 취득하였다. 주요 관심분야는 최적화 기법, 정보통신 최적화, 정보통신경영 등이다.

정해용 현재 나사렛대학교 국제어문경영행정학부 경영정보학전공 전임강사로 재직 중이다. 광운대학교에서 경영정보학전공으로 학사, 석사 및 박사학위를 취득하였다. 정보통신부 정보통신공무원교육원에서 전임교수로 재직하였으며, 정보통신부의 경영정보시스템, 체신금융분산시스템 개발 프로젝트에 참여한 바 있다. 주요 관심연구분야는 정보시스템 성과측정 측면에서 정보기술 수용(개인차원), 정보시스템 평가(프로젝트 차원), 정보화 수준평가(조직차원)와 정보화전략 수립 및 추진, 경영혁신과 정보기술활용, 정보기술 원격교육 등이다.

최종민 성균관대학교 경영학과를 졸업하였으며, 한국과학기술원(KAIST) 경영과학과에서 회계정보시스템으로 경영공학 석사와 경영공학 박사학위를 취득하였다. 최근의 주요 연구분야는 회계정보시스템의 설계와 회계정보의 학습효과 등이다. 세화회계법인에서 공인회계사로 활동한 경력이 있으며, 현재, 경북대학교 경영학부에 교수로 재직 중이다.

홍성필 현재 중앙대학교 안성캠퍼스 사회과학대학 상경학부 경영전공 교수로 재직 중이다. 서울대학교 산업공학과에서 학사와 석사를, UC Berkeley에서 조합최적화로 박사학위를 받았다. 조합최적화 전반, 근사해법, Semidefinite Program, 그리고 수리모형의 여러 가지 응용에 관심을 갖고 있다. 여러 학술지에 관련 논문을 발표하였다. 최근 Waterloo 대학 Deartment of Combinatorics and Optimization에서 방문교수로 연구하였다. 국내 최적화분야 연구자들 간의 교류에 많은 관심을 갖고 있다.