

민감도 정보를 이용한 설계 방법 및 소프트웨어의 개발

김용일* · 이정욱* · 윤준용** · 박경진†

(2003년 6월 2일 접수, 2003년 10월 16일 심사완료)

A Design Methodology and Software Development with Sensitivity Information

Yong Il Kim, Jeong Wook Yi, Joon Yong Yoon and Gyung Jin Park

Key Words : Design Sensitivity(설계 민감도), Finite Difference Method(유한 차분법), Design of Experiments(실험 계획법), Orthogonal Arrays(직교배열표)

Abstract

Sensitivity information has been used for linearization of nonlinear functions in optimization. Basically, sensitivity is a derivative of a function with respect to a design variable. Design sensitivity is repeatedly calculated in optimization. Since sensitivity calculation is extremely expensive, there are studies to directly use the sensitivity in the design process. When a small design change is required, an engineer makes design changes by considering the sensitivity information. Generally, the current process is performed one-by-one for design variables. Methods to exploit the sensitivity information are developed. When a designer wants to change multiple variables with some relationship, the directional derivative can be utilized. In this case, the first derivative can be calculated. Only small design changes can be made from the first derivatives. Orthogonal arrays can be used for moderate changes of multiple variables. Analysis of Variance is carried out to find out the regional influence of variables. A flow is developed for efficient use of the methods. A software system with the flow has been developed. The system can be easily interfaced with existing commercial systems through a file wrapping technique. The sensitivity information is calculated by finite difference method. Various examples are solved to evaluate the proposed algorithm and the software system.

1. 서론

오늘날 설계에서 설계 민감도 정보는 매우 유용하게 이용되고 있다. 민감도 해석을 통해 설계자는 시스템의 특성에 어떤 파라미터가 가장 효과적인지 알 수 있고, 어떤 방향과 비율로 설계변경을 행하는 것이 좋은가를 예측할 수 있다. 또한, 민감도 해석에 최적화 기법을 연결시켜 최적설계를 가능하게 하기도 한다.⁽¹⁾

유한 차분법은 민감도 해석에 가장 일반적으로

쓰이는 방법중의 하나이다.⁽²⁻⁴⁾ 유한 차분법에 의한 민감도 해석은 함수에 대한 1 계 편미분 값을 근사적으로 계산하여 민감도 정보로서 활용한다. 그러나, 1 계 편미분만의 계산은 변수 각각에 대한 민감도 정보만을 주는 단점이 있다. 2 계 이상의 계산을 하게 되면, 해석비용이 비약적으로 증가하게 되어 비효율적이다. 그러나, 실제 설계문제에서는 하나의 변수만을 변경하여 설계를 완성하는 예는 많지 않다. 하나의 변수는 다른 많은 변수들과 직·간접적으로 연성관계를 갖고 있기 때문에, 개별적인 민감도 정보만을 기초로 설계를 변경하면 예상과 다른 결과를 나타낼 수 있다. 이에 다변수 동시 변화시의 민감도 해석을 위해 방향 도함수를 이용한 근사법을 제안한다. 방향 도함수는 응답 함수의 경사도 벡터에 임의의 방향 벡터를 내적한 것으로서, 여러 변수들의 동시 변화에 대한 응답

† 한양대학교 기계경영정보학부
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr
TEL : (031) 400-5246 FAX : (031) 407-0755

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계경영정보학부

함수의 기울기를 구할 수 있다. 방향 도함수의 고찰을 통해서 방향지수(directional index)로 구분된 개념을 설명하고, 그들의 비교를 통해 설계에서 방향도함수의 적용에 대한 타당성을 검토한다.

최근에는 직교 배열표를 이용한 실험 계획법이 설계에 활용되는 예가 많아지고 있다.⁽⁵⁾ 실험 계획법은 통계적 방법에 기초한 것으로서, 최소한의 실험으로 최대한의 정보를 얻어내는 계획을 의미한다.⁽⁶⁾

유한 차분법과 실험 계획법은 설계에서 그 특성에 따라 다르게 이용될 수 있다. 유한 차분법은 한 점에서 변수의 미소 변동에 대한 함수의 변화율을 계산하기 때문에 점에서의 경사도를 구할 수 있고, 실험 계획법은 분산분석을 통해 나타난 제곱합으로부터 각 변수간 영향력을 알 수 있다. 제곱합이 큰 변수는 영향력이 크다고 볼 수 있으며, 이는 민감도 정보로 활용할 수가 있다. 특히 공학적 관점에서 실험 계획법은 설계영역 전반의 정보를 제공함으로써 국부적인 민감도보다는 넓은 범위의 민감도에 대한 정보를 제공할 수 있다.⁽⁵⁾ 따라서, 점 민감도로 구분되는 유한 차분법과, 구간 민감도로 구분되는 실험 계획법의 특성을 설계에 효과적으로 활용하는 방안을 제시한다.

유한 차분법과 실험 계획법, 방향 도함수를 이용하여 민감도 정보를 제공하는 민감도 해석 소프트웨어를 개발하였다. 소프트웨어는 설계자에게 직관적 판단의 정보를 제공한다. 소프트웨어의 개발에는 공리적 설계와 객체지향 프로그래밍 기법을 도입하여 소프트웨어의 모듈간 독립성을 증가시키고, 효율성과 재사용성을 높이며 개발시 코딩 작업이 수월하게 하였다.

2. 민감도 정보를 이용한 설계

2.1 민감도 정보의 정의

민감도 정보란 설계변수의 변화에 대한 응답함수의 변화율을 의미한다.⁽⁷⁾ 민감도 해석을 통해 얻는 민감도 정보는 설계자에게 주요 설계변수의 설정과 개선방향을 제공하기 때문에, 민감도 해석은 설계 방법론의 한 분야로 사용되고 있다. 또한 다양한 설계 민감도 해석 기법과 정확한 민감도 해석 정보는 효율적인 최적설계를 가능하게 함으로써 설계과정의 비용과 시간을 줄일 수 있다.

2.2 유한 차분법

민감도 정보는 수학적 전개를 통하여 직접

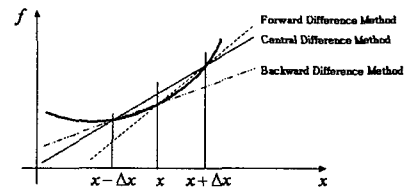


Fig. 1 Finite Difference Method

편미분을 하는 것이 가장 정확하다. 그러나, 일반적인 공학 문제들은 수학적 정식화가 거의 불가능하기 때문에 근사법으로 유한 차분법이 자주 사용된다. 유한 차분법은 Fig. 1과 같이 전진, 중앙, 후진으로 크게 세가지 방법이 있다.⁽⁸⁾

중앙 차분법은 전진, 후진 차분법에 비해 두배의 계산량을 필요로 하지만, 가장 정확한 결과를 제공해 준다. 유한 차분법은 변수의 미소 변화 Δx 에 대한 함수 f 의 변화를 통해 기울기를 구하므로, 미소 변동량의 정밀도는 정확성에 큰 영향을 미친다. 변동량에 대한 연구는 Gill 과 Murray 등에 의해 현 재도 활발히 연구되고 있다.⁽⁹⁾

2.3 직교 배열표를 이용한 실험 계획법

실험 계획법이란 실험에 대한 계획 방법을 의미하는 것으로, 해결하고자 하는 문제에 대해서 실험을 어떻게 행하고, 데이터를 어떻게 취하며, 어떠한 통계적 방법으로 데이터를 분석하면 최소의 실험 횟수에서 최대의 정보를 얻을 수 있는가를 계획하는 것이라고 정의할 수 있다.⁽¹⁰⁾

직교 배열표는 실험 계획법의 일부 실시법으로서 행렬실험을 할 경우 요인간에 직교성을 갖도록 실험을 계획하고 데이터를 구하여 같은 실험횟수라도 검출력이 더 좋은 검증을 할 수 있게 하고, 정도가 더 좋은 추정을 할 수 있게 해준다.

직교 배열표를 통하여 실험을 한 뒤 데이터를 분석할 때 실험 계획법에서 가장 많이 사용되는 분석방법은 분산분석이다. 분산분석(ANOVA : analysis of variance)은 특성치의 산포를 제곱합(sum of square)으로 나타내는데, 제곱합을 실험과 관련된 요인마다의 제곱합으로 분해하여 오차에 비해 특히 큰 영향을 주는 요인이 무엇인가를 찾아내는 분석방법이다. 분산분석은 제곱합으로 표현되는 각 인자들의 영향력을 보여준다. 민감도 개념에서 이 영향력은 유효한 의미를 갖는다. 인자의 영향력이 크다는 것은 그 인자가 민감하다는 의미가 될 수 있다. 하지만, 유한 차분법을 통해서 얻게되는 민감도와 정확히 일치하지는 않는다. 유한 차분법을 통한 민감도는 한 점에서 변수가 함수에

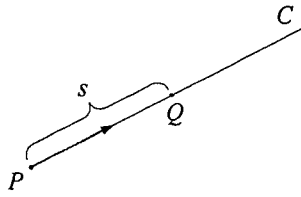


Fig. 2 Directional derivative

대하여 갖는 1 계 도함수를 의미하며, 변동량이 매우 작은 범위에서 활용된다. 그러나, 분산분석을 통한 산포의 제곱합은 주어진 구간에서 선택된 변수들에 대한 함수 값의 변동량을 의미하므로 넓은 범위에서 활용할 수 있다. 또한 제곱합은 음의 값을 갖지 않기 때문에 유한 차분법과는 달리 방향을 제시해 주지는 못한다. 최근 이광원은 구조 최적화 문제를 분해하는 과정에서 설계행렬을 구성하기 위하여 제곱합을 도입하였다.⁽¹¹⁾ 제곱합이 큰 설계변수를 설계 목적에 대한 설계 변수의 민감도의 크기로 판단하였다.

3. 설계에서의 방향 도함수 활용

기존의 민감도 정보는 설계변수에 대한 개별적인 정보만을 제공해 주었다. 따라서, 민감도 정보로 설계를 할 때에는 설계변수 각각의 증감량과 방향을 갖고 설계에 활용해 왔다. 그러나, 실제 공학문제에서는 두 개 이상의 설계변수를 동시에 변화하여 설계변경을 하는 예가 대부분이다. 이것은 각 설계변수 간 연성관계로 인해 개별적인 정보로 설계변경을 하였을 경우 예상치 못한 결과를 얻을 수 있고, 제작상의 이유에 의해 다수의 설계변수가 물리적으로 연결되어 있을 수도 있기 때문이다. 또한, 목적인 값에 접근해 가기 위해 두개 이상의 설계변수를 동시에 변화시키는 것이 더욱 효과적이다.

방향 도함수를 이용하여 다변수가 동시에 변할 때의 민감도 정보를 근사적으로 구할 수 있는 방법을 제안한다.

3.1 방향 도함수와 방향지수

점 p 에서 임의의 벡터 \mathbf{b} 방향으로 함수 f 의 변화율은 $D_{\mathbf{b}}f$ 또는 $\frac{df}{ds}$ 로 표시하고, 임의의 길이의 벡터 \mathbf{a} 에 대한 방향 도함수는 식 (1)과 같다.⁽¹²⁾

$$D_{\mathbf{a}}f = \frac{df}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \cdot \text{grad } f \quad (1)$$

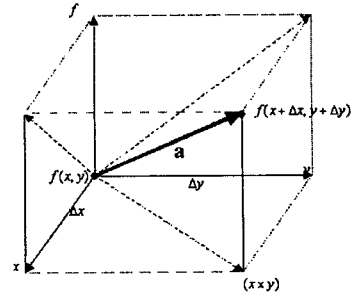


Fig. 3 Graphical representation of directional index

식 (1)로 설명한 방향 도함수 개념과는 달리, Fig. 3 을 통해서 방향 도함수를 새로운 관점으로 설명할 수 있다.

변수 x, y 를 갖는 함수 $f(x, y)$ 가 있을 때, 함수가 $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 로 $\Delta x, \Delta y$ 만큼 이동한다고 생각하자. 이 때 함수 f 값의 변화에 대해서 벡터 \mathbf{a} 를 $x-y$ 평면으로 투영한 길이 s 로 나눈 것이 다변수 동시 변화시의 민감도 개념이 될 수 있다.

길이 s 는 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 로 계산 될 수 있으며, 식 (2)를 얻을 수 있다.

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (2)$$

식 (2)는 식 (1)의 수학적 방향 도함수와 구분하여 방향지수(directional index)라고 하였다. 또한, Fig. 3 에서 벡터 \mathbf{a} 를 $f-x, f-y$ 평면에 투영하여 각각의 f 함수 값을 각 변수 축상의 길이(변동량)으로 나눈 것이 바로 개별적인 변수에 대한 기울기, 즉, 1 계 민감도가 된다.

이 개념은 x, y 두개의 변수뿐만 아니라 변수의 수가 많을 때에도 같은 방법으로 확장할 수가 있다. 각 변수는 수학적으로 모두 독립적이고, 직교성을 갖으며 각각 하나의 축을 이루게 되며, 식 (3)과 같이 일반화 할 수 있다.

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}} \quad (3)$$

수학적 방향 도함수는 1 계항까지만 고려되었다고 볼 수가 있다. 왜냐하면, 식 (1)의 수학적 방향 도함수 계산에 필요한 $\text{grad } f$ 의 계산 자체가 각

변수에 대한 함수의 1 계 편미분 값을 이용하고 있기 때문이다. 반면에, 방향지수는 식 (2)에서 보는 바와 같이 근사적 전개가 아닌 그 점 자체의 함수값을 직접 구하고, 유한 차분법을 적용하여 다변수가 동시에 변할 때의 민감도 개념으로 사용하므로 방향지수가 수학적 방향 도함수보다 더 정확하다고 볼 수 있다.

두 값은 함수 자체의 비선형성에 기인하여 차이가 생기게 된다. 변 동량의 크기가 작아질수록 두 값의 차이는 점차 줄어들게 되며, 비선형성으로 인한 오차는 점차 사라지게 된다.

3.2 분산분석을 통한 영향도

비선형성이 큰 문제에 대해서는 방향 도함수보다는 직교배열표를 이용하여 각 변수 조합별 영향도를 검사 할 수 있다. 이를 위하여 분산분석을 수행하게 된다.

분산의 의미를 살펴보자. 설계 변수가 한 개인 경우에서 α 를 현재의 설계점, Δx_1 을 설계변수의 변화라고 할 때, 설계변수의 수준을 α 를 중심으로 $\alpha - \Delta x_1$, α 및 $\alpha + \Delta x_1$ 으로 설정하고 분산은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\bar{y} = \frac{1}{3} \cdot \{f(\alpha - \Delta x_1) + f(\alpha) + f(\alpha + \Delta x_1)\} \quad (4)$$

$$s_f^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 (f_i(x) - \bar{y})^2 \quad (5)$$

여기서, \bar{y} 는 평균, s_f^2 은 분산이다. 식 (5)에 식 (4)을 대입하고 정리하면 분산은 다음과 같이 표시된다.

$$s_f^2 = \frac{(\Delta x_1)^2}{6} \cdot \{ [f'_-(\alpha)]^2 + [f'_+(\alpha)]^2 + [f'_-(\alpha) + f'_+(\alpha)]^2 \} \quad (6)$$

$$\text{여기서, } f'_-(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha - \Delta x_1)}{\Delta x_1} \quad (7)$$

$$f'_+(\alpha) = \frac{f(\alpha + \Delta x_1) - f(\alpha)}{\Delta x_1} \quad (8)$$

식 (6)의 분산은 설계변수의 일정한 변화량 Δx_1 에 의한 전향차분, 후향차분, 중심차분의 합이 모두 포함되어 있다. 설계변수가 둘 이상인 경우에도 분산에는 위의 3 가지 차분 항이 모두 포함된다. 그러므로 변동의 크기가 작을 경우, 수학적 민감도와 유사하고, 문제의 특성에 따라 변동이 커지는 경우, 모든 차분법의 평균적인 의미가

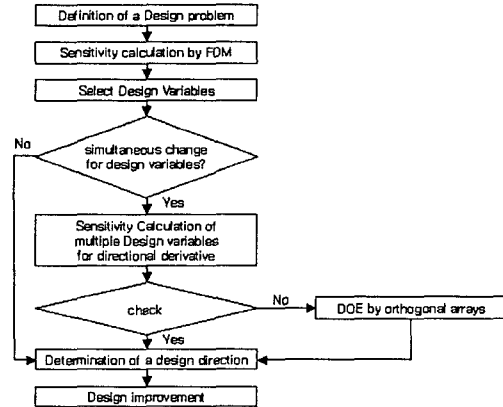


Fig. 4 Design flow using sensitivity information

함축되어 있다.⁽¹³⁾ 이를 통하여 설계자는 민감도라는 다른 정보를 얻을 수 있다.

3.3 민감도 정보를 이용한 설계

유한 차분법과 직교 배열표, 방향 도함수의 이론들은 민감도 정보를 얻어내는 방법으로 이용될 수 있으며, 민감도 정보가 실제 설계 문제에 어떻게 활용될 수 있는가를 Fig. 4의 흐름도를 통해서 제시한다.

설계변경이 필요한 문제에 대해서 설계자는 자신의 경험과 제작상의 조건으로 최초 설계변수를 선정하게 된다. 유한 차분법을 이용하여 각 설계변수의 1 계 민감도 정보를 얻을 수 있으며, 설계변수가 시스템에 어떠한 영향을 주는지 알 수 있다. 설계자는 설계변경을 위한 주요 설계변수를 추출해 내어 설계변경을 시도할 수 있다. 하지만, 이것은 각각의 설계변수에 대한 민감도 정보만으로 시도되는 것으로서, 여러 개의 설계변수를 동시에 변화시켜야 할 경우, 설계자의 경험에 의존해 적당한 설계변경을 하고 많은 시행착오를 겪어야 한다. 이런 과정을 통해 설계자는 현 설계보다 더 나은 결과를 얻게 되겠지만, 만약 여러 개의 설계변경안들이 동시에 제안되었을 경우, 이 모든 경우를 일일이 다 해석하여 그 결과를 따져본다는 것은 매우 비효율적이다. 이런 경우 방향 도함수를 설계에 활용 하면 모든 조합들에 대한 방향 도함수 계산을 통하여 추가적인 해석 혹은 제작 없이 근사적으로 각 조합들로 인한 결과를 빠르게 예측할 수 있게 되고, 설계자는 최적의 조합을 선택할 수 있다. 그러나, 비선형성이 큰 문제에 대해서는 방향 도함수의 결과의 신뢰성에 문제가 있을 수 있다. 먼저 문제 자체의 비선형성에 대한 검사가 필요하게 되며, 그것은 수학적 방향 도함수와 방향 지수간의 차이를 통해 알 수가 있다. 그러나, 방향지수를 구하기 위해서는 일부 조합의 수만큼 추가적인 해석이 필요하다는 단점이 있다.

이러한 단점에도 불구하고 비선형성이 작은 문

제나, 혹은 그 변동량을 매우 정밀하게 취하였을 때 수학적 방향 도함수는 유의하게 된다. 또한, 방향지수의 계산을 위해서 그룹화된 모든 조합에 대해 추가적인 해석을 할 필요도 없다. 만약, 10 가지 조합이 있다면 그 중 비선형성이 의심되는 두 세 가지 조합의 추가 해석 만으로도 검토가 충분하리라고 생각한다.

설계문제의 비선형성이 방향 도함수 결과를 신뢰할 수 없게 평가되었다면, 직교 배열표를 이용한 실험 계획법을 사용하도록 한다. 이 방법은 유한 차분법을 통한 민감도 계산과는 다른 정보를 준다. 설계변수의 수준을 정하여 적절한 직교 배열표를 선택하고 해석을 실행하여, 분산분석을 통해 특성치에 영향력이 큰 변수를 찾아낸다.

앞에서 설명한 Fig. 4 의 단계를 거쳐 설계자는 최적의 설계변경 방향을 찾게 되며, 설계 개선의 효과를 얻을 수 있다.

4. Sensitivity Information Software 의 개발

4.1 공리적 설계를 이용한 소프트웨어의 개발

공리적 설계란 창조적 과정인 설계를 정형화된 논리로서 규명하고 체계화 하는 것으로서 사용자의 요구(customer need, CNs)를 기능적 요구(functional requirements, FRs)로 정의하고, 그것을 만족시키기 위한 설계파라미터(design parameters, DPs)들을 사상(mapping)시킴으로서, 설계행렬(design matrix, DMs)을 구성하여, FRs 와 DPs 의 관계를 명확하게 드러내는 것이다.⁽¹⁴⁾

공리적 설계는 소프트웨어의 설계에도 그대로 이용될 수 있으며, 소프트웨어의 개발에 있어서 FRs 는 소프트웨어가 수행해야 할 과제, 혹은 그 기능을 의미하고, DPs 는 데이터와 소프트웨어 코드 등이 될 수 있다.

공리적 설계는 소프트웨어의 개발을 위한 방법론에 도입되기도 하였다.⁽¹⁵⁾ 최근에는 공리적 설계 과정에 객체지향적 프로그래밍(object-oriented programming) 기법을 연결시킨 V-모델을 제안하여, 실제 소프트웨어 개발에 적용하였다.^(16,17) 객체지향적인 프로그래밍 기법과 공리적 설계에 의한 소프트웨어 개발의 연계를 통하여 소프트웨어 모듈간의 독립성을 보장하고, 소프트웨어 개발 및 유지 관리의 효율성을 높일 수가 있다.

4.2 민감도 해석 소프트웨어의 개발

소프트웨어의 개발 목적은 유한 차분법, 직교 배열표, 방향 도함수 등의 방법을 통해

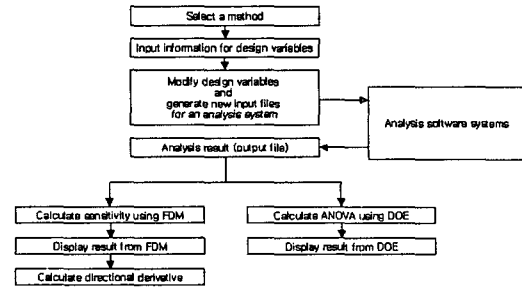


Fig. 5 Flow of SI Software

설계자에게 민감도 정보를 제공함으로써 설계자의 직관적 판단에 도움을 줄 수 있도록 하는 것에 중점을 두었다. 복잡하고 덩치가 큰 최적설계를 위한 목적이 아니고, 설계의 최종 답을 주려는 것이 아니며, 다만, 그 전체적인 경향과 방향을 빠르고 쉽게 제시해 주는 것이다.

개발된 소프트웨어는 Fig. 4 에서 설명한 흐름도를 구현하기 위하여 Fig. 5 과 같이 구성되었다.

일반적인 민감도 정보를 얻기 위하여 유한 차분법과 직교 배열표에 의한 방법을 선택 할 수 있으며, 정확성을 위하여 변동량과 수준값의 선택을 할 수 있도록 하였다. 외부 해석기를 구동하기 위한 입력파일로부터 설계변수의 정보를 설계자가 설정한다.

소프트웨어는 이로부터 변수 수정 및 입력 파일들을 자동적으로 재생성한다. 입력파일의 생성시 파일 래핑(File Wrapping) 기술이 이용되었으며 다양한 외부해석기와 호환이 가능하도록 하였다. 외부해석기가 구동된 후, 설계자는 관심 결과 변수 정보를 설정하게 되며, 다중 목적 함수에 대한 민감도 계산이 가능하다. 입출력값과 민감도 정보는 표와 차트로서 설계자에게 제공된다.

이때의 정보들로부터 설계자는 민감한 설계변수들을 선정하게 되고, 동시 변화를 위한 설계변수들의 조합을 구성하며, 각 조합에 대한 방향도함수를 계산하게 된다.

소프트웨어에는 입력된 수준까지의 저장 및 읽기 기능이 있어 작업의 연속성을 높였다. 그리고 그래픽 유저 인터페이스(Graphic User Interface)를 이용하여 설계자가 쉽고 편리하게 사용할 수 있도록 하였다.

5. 예 제

5.1 5 부재 빔 트러스

방향 도함수를 이용한 다변수 동시 변화시의 민감도 정보를 5 부재 빔 트러스와 수학 예제에

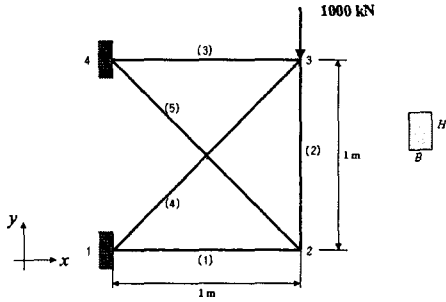


Fig. 6 5-bar beam truss

Find $B_i, H_i, (i=1\sim5)$
 To minimize Displacement
 Frequency

Table 1 Sensitivity of design variables

| Design Variable | Displacement | Frequency |
|-----------------|--------------|-----------|
| B1 | 0.000418 | 247.8000 |
| H1 | 0.000627 | 541.6500 |
| B2 | 0.010730 | -144.7000 |
| H2 | 0.005812 | 336.7000 |
| B3 | 0.000699 | 247.9000 |
| H3 | 0.001049 | 541.6500 |
| B4 | 0.051658 | -175.6000 |
| H4 | 0.025895 | 204.2500 |
| B5 | 0.027877 | -175.6000 |
| H5 | 0.013979 | 204.2500 |

적용하였다. 트러스 예제는 SI 단위계를 사용하였고, 탄성계수 (E) 68.9GPa, 프와송비 (ν) 0.35, 밀도 (ρ) $2710\text{kg}/\text{m}^3$ 를 사용하였다.

Fig. 6 과 같은 구조를 갖는 5부재 빔 트러스 예제가 있다. 하중 조건은 3 번 노드에 y 축 음의 방향으로 1000 kN 이 가해졌다. 경계 조건은 1 번과 4 번 노드가 모두 고정되어 있다.

설계의 목적은 3 번 노드의 y 축 방향 변위의 최소화과 1 차 진동수의 최소화이다. 설계변수는 각 부재 단면의 밀 변과 높이로 설정하였다 초기치는 모든 B 가 0.05m , H 가 0.1m 이다. 유한차분법을 이용한 민감도 계산을 위해서 각 변수의 1% 비율로 변동량을 설정하였다.

Table 1 은 민감도 해석을 수행한 결과이다.

Fig. 7 의 그래프는 SISOftware 가 제공해주는 결과로서, 설계자는 표와 그래프로부터 변위에 대해 4, 5 번 부재의 단면적이 크게 민감하다는 것을 알 수가 있다. 변위에 대한 각 설계변수별 민감도는 $B_4 > B_5 > H_4 > H_5 > B_2 > H_2 > H_3 > B_3 > H_1 > B_1$ 순이며, 만약 설계자가 하나의 변수 변경 만으로 설계를 하려 한다면, B_4 를 증가시켜 변위를 최소화 할

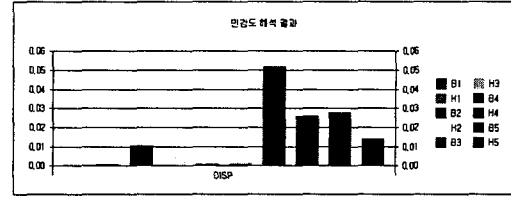


Fig. 7 Result chart for displacement

Table 2 Directional derivative for displacement

| Object | Design variable | Stepsize | Directional derivative | Directional index |
|--------------|-----------------|----------|------------------------|-------------------|
| Displacement | B4 | +0.005 | 0.046263 | 0.046021 |
| | H4 | +0.01 | | |
| | B5 | +0.005 | 0.024970 | 0.024861 |
| | H5 | +0.01 | | |
| | B4 | +0.005 | 0.056241 | 0.055779 |
| | B5 | +0.005 | | |

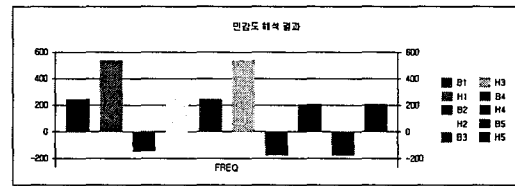


Fig. 8 Result chart for frequency

것이다.

그러나, 설계조건상의 이유로 두개 이상의 설계 변수를 동시에 변경해야만 하거나 혹은 두개 이상의 설계변수를 동시에 바꾸어 훨씬 더 나은 설계 개선의 효과를 얻을 것이 예상 된다면, 설계자는 여러 조합의 경우를 고려하여 어떤 경우 가장 효과적인 설계변경이 되는지 알아야 한다. 이 때 방향 도함수는 유용하게 이용될 수 있다. 먼저 변위에 대한 세 개의 방향 도함수 그룹을 설정하여 Table 2 와 같은 결과를 얻었다.

방향 도함수 그룹들의 결과를 보면 먼저 수학적 방향 도함수와 방향지수의 결과값이 근사하고 있다. 따라서, 수리적인 방향 도함수가 신뢰할 수 있다는 것을 알 수 있다.

세 개의 그룹 중 세 번째 그룹이 상대적으로 가장 민감한 것을 알 수가 있다. 이것은 변위를 증가시키기 위해서 B_4, B_5 를 동시에 증가시키는 것이 가장 효율적인 설계변경이라는 정보를 설계자에게 제공해 준다.

진동수에 대해서도 살펴보면, Fig. 8 은 진동수에 대한 각 변수의 민감도 그래프이다.

두개의 방향 도함수 그룹을 설정하였고, Table 3 과 같은 결과를 얻었다.

Table 3 Directional derivative for frequency

| Object | Design variable | Stepsize | Directional derivative | Directional index |
|-----------|-----------------|----------|------------------------|-------------------|
| Frequency | B2 | +0.005 | -286.308 | -284.172 |
| | B4 | +0.005 | | |
| | B5 | +0.005 | | |
| | H1 | -0.01 | -595.331 | -595.241 |
| | H3 | -0.01 | | |

Table 4 Directional derivative for frequency

| Object | Design variable | Stepsize | Directional derivative | Directional index |
|-----------|-----------------|----------|------------------------|-------------------|
| Frequency | B1 | +0.005 | -0.08942 | +0.04046 |
| | B2 | +0.005 | | |
| | B3 | +0.005 | | |
| | B4 | +0.005 | | |
| | B5 | +0.005 | | |

결과를 보면 방향 도함수의 두 번째 그룹이 진동수의 최소화에 가장 효율적인 것을 알 수가 있다. 따라서 설계자는 B2, B4, B5 세 개의 변수를 증가시키는 것보다 H1, H3 두개의 변수를 감소시키는 것이 좋은 설계방향이 됨을 알 수가 있다.

또한 방향 도함수를 이용하여 서로 상충된 민감도 값을 갖는 변수들이 동시에 변했을 경우, 종합적인 영향력을 쉽게 판단할 수 있다. 이 예제에서 B1, B3 는 양의 민감도 값을 갖고, B2, B4, B5 는 음의 민감도 값을 갖을 경우, 5 개의 변수를 동시에 변화시키면 서로 영향력이 상쇄되어 0 에 가까운 민감도를 갖는 것을 알 수 있다.

이것은 밀변에 해당하는 설계변수들을 동시에 모두 1%씩 증가시킨다면 각 부재의 구조적 연관성에 의해 진동수에는 거의 영향을 주지 않는다는 것을 말한다.

이와 같이 방향 도함수를 설계에 이용하면 다변수가 동시에 변할 때의 민감도를 알 수가 있으며, 그 조합들간의 비교를 통해 설계자는 자신의 직관적 판단을 확인해 볼 수 있고, 그 효과를 근사적으로 빠르게 알아볼 수가 있다.

5.2 수학 예제

비선형성이 매우 큰 수학 예제를 통해 수학적 방향 도함수의 한계를 고찰해보고 대안으로 제시된 직교 배열표를 이용한 실험 계획법을 적용하였다.

$$f(x, y) = 100xy + 99xy(x - 2) + 99xy(y - 2) + 98.95xy(x - 2)(y - 2) \quad (9)$$

Fig. 9 는 함수의 등고선을 보여주고 있으며, 그 안의 점과 수치들은 좌표축상의 x, y 값들에 대한 함수 f 의 값을 보여주고 있다. 식 (10)는 식 (9) 을 직접 편미분한 결과이다.

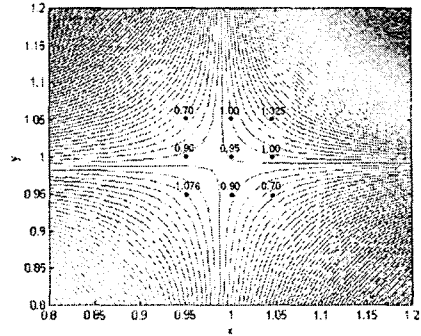


Fig. 9 Contour of equation 5.1

Table 5 Directional derivative

| Ratio | Design variable | Stepsize | directional derivative | Directional index |
|---------------|-----------------|----------|------------------------|-------------------|
| 0.1% Negative | X | -0.001 | -1.414214 | -1.343503 |
| | Y | -0.001 | | |
| 1% Negative | X | -0.01 | -1.414214 | -0.720330 |
| | Y | -0.01 | | |
| 5% Negative | X | -0.05 | -1.414214 | 1.783592 |
| | Y | -0.05 | | |
| 10% Negative | X | -0.1 | -1.414214 | 4.333822 |
| | Y | -0.1 | | |

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1 \quad (10)$$

이것은 우리가 일반적으로 말하는 1 계 도함수, 즉 민감도 값을 의미한다. 만약, 이것이 함수값을 최소화 하기 위한 설계문제라면 설계자는 각 설계 변수 x, y 를 감소시키므로써 원하는 목적을 이루려 할 것이다. 그런데, 이 예제의 경우는 각각의 방향으로 0.05 씩 감소시킨 결과 오히려 더 증가하고 있음을 Fig. 9 를 통해 알 수가 있다. 이것은 함수의 비선형성에 기인한 것으로 만약 그 변동량이 줄어들면 그러한 비선형성은 점차 사라지게 된다.

Table 5 는 0.1% 변동량에서부터 10% 변동량까지 조금씩 늘려가며 수학적 방향 도함수와 방향지수를 비교해 본 것이다. 0.1% 변동시에는 두 값이 비교적 근사함을 알 수가 있지만, 변동량의 비가 커질수록 두 값의 차이가 커짐을 알 수가 있다. 이것은 3 장의 방향 도함수에 대한 설명에서 언급했던 비선형성이 큰 문제에서의 수학적 방향 도함수가 가지는 한계라고 볼 수 있다. 하지만, 이것은 유한 차분법 자체의 한계이기도 하다.⁽⁹⁾

수학적 방향도함수와 방향지수의 값의 차이가 크면 수학적 방향 도함수는 신뢰할 수 없게 된다. 이런 경우 Fig. 4 에서 보인 바와 같이 직교 배열표를 이용한 실험 계획법을 사용한다.

Table 6 Result of iteration in $L_9(3^4)$

| No. | X | Y | Function value |
|-----|------|------|----------------|
| 1 | 0.95 | 0.95 | 1.076119 |
| 2 | 0.95 | 1.0 | 0.900125 |
| 3 | 0.95 | 1.05 | 0.700869 |
| 4 | 1.0 | 0.95 | 0.900125 |
| 5 | 1.0 | 1.0 | 0.950000 |
| 6 | 1.0 | 1.05 | 1.000125 |
| 7 | 1.05 | 0.95 | 0.700869 |
| 8 | 1.05 | 1.0 | 1.000125 |
| 9 | 1.05 | 1.05 | 1.325618 |

이 예제를 $L_9(3^4)$ 형 직교 배열표를 이용하여 실험 계획법을 수행해보면 Table 6 과 같은 결과를 얻게 된다.

결과를 보면 3 번과 7 번 실험에서 함수의 최소 값을 얻고 있다. 그때의 변수 x, y 의 조합이 이 예제의 최적 설계조합이 된다. 그러나, 실험 계획법은 이용시, 각 변수의 수준값의 선택에 따라 그 결과가 달라질 수 있음을 알아야 한다.

비선형성이 큰 문제의 경우 방향 도함수의 도입은 매우 신중하여야 하며, 또한 설계문제의 선형성과 비선형성을 설계자가 잘 알지 못하는 상황에서 그 비선형성의 검사를 위해서는 두세 번의 추가적인 방향지수 계산을 해 보아야 한다

6. 결론

다변수가 동시에 변할때의 민감도 정보를 구하기 위하여 방향 도함수를 도입하였으며, 근사적 방법을 제안하였고, 유한 차분법과 직교 배열표 이론을 포함한 민감도 해석 소프트웨어를 개발하였다. 그로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

기존의 민감도 정보는 설계변수 각각의 1 계도 함수 값을 제공해 주었으나, 실제 공학적 문제에서는 설계변수간 연성관계가 있는 것이 대부분이므로 다변수 동시 변화시의 민감도 정보를 구할 필요가 있게 되었다.

방향 도함수로부터 수학적 방향 도함수와 방향지수라는 두가지 개념을 구분하여 비교해 보았고, 비선형성이 적거나 변동량이 적을 경우 수학적 방향도함수가 추가적인 노력 없이 기존의 민감도 정보만으로도 다변수 동시 변화시의 민감도 정보를 근사적으로 제공할 수 있음을 알게 되었다.

유한 차분법과 직교 배열표, 방향 도함수를 통해 구한 민감도 정보를 설계에 활용하는 방법을 제안하여, 5 부재 빔 트러스, 수학 예제에 적용함으로써, 방향 도함수가 설계에 활용되면 설계자에게 훌륭한 직관적 판단 근거를 제시해 줄 수 있을 것이다.

소프트웨어의 개발시에는 공리적 설계와 객체

지향적 프로그래밍 기법을 도입하여 독립성과 효율성을 높이고 개발이 용이하게 할 수 있었다.

향후에는 비선형성이 큰 문제에서 방향 도함수의 적용에 대한 연구가 필요하다. 또한, 유한 차분법과 방향도함수의 적용시 적절한 변동량에 대한 연구가 있어야 한다. 부적절한 변동량의 적용은 설계자에게 잘못된 정보를 줄 수 있다. 직교 배열표의 적용시에는 평균분석을 도입하여 설계에 활용하는 방안을 연구할 필요가 있다.

후기

이 연구는 교육부 지원 BK21 사업 연구비 지원 및 한국과학재단지정 최적설계기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Song, C. G., Park, H., Oh, J. E. and Yum, S. H., 1990, "Performance Improvement of a Vehicle Suspension by Sensitivity Analysis," *Translations of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 14, No. 6, pp. 1464~1473
- (2) Haftka, R. T. and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- (3) Haftka, R. T., 1986, "Sensitivity Analysis for Discrete Structural Systems," *AIAA J.*, Vol. 24, pp.823~832.
- (4) Arora, J. S., 1979, "Method of Design Sensitivity Analysis in Structural Optimization," *AIAA J.*, Vol. 17, pp.970~974.
- (5) Lee, T. H., Lee, K. K. and Jeong, S. J., 2001, "Optimal Design for the Thermal Deformation of Disk Brake by Using Design of Experiments and Finite Element Analysis," *Translations of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25(A), No. 12, pp.1960~1965.
- (6) Park, S. H., 1991, *Modern Design of Experiments*, Minyoungsa, seoul. (in Korean)
- (7) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- (8) Vanderplaats, G. N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- (9) Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H., 1981, *Practical Optimization*, Academic Press, New York.
- (10) Park, S. H, 1990, *Advanced Design of Experiments*, Younggi Munhwasa, Seoul. (in Korean)
- (11) Lee, K. W. and Park, G. J., 2000, "A Structural Optimization Methodology Using the Independence Axiom," *Translations of the Korean Society of Mechanical Engineers*, Vol. 24(A), No. 10, pp.2438~2450.
- (12) Kreyszig, E., 1999, *Advanced Engineering*

- Mathematics*, 8thed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (13) Lee, K. H., 1996, "Robust Optimization in Continuous and Discrete Design Spaces for Structures," Ph.D. Thesis, Hanyang University, Seoul, Korea. (in Korean)
- (14) Suh, N. P., 1990, *The Principles of Design*, Oxford University Press, New York.
- (15) Do, S. H. and Park, G. J., 2001, "Application of Design Axioms for Glass Bulb Design and Software Development for Design Automation," *Journal of Mechanical Design* (ASME),
- (16) Suh, N. P., 2001, *Axiomatic Design (Advances and Applications)*, Oxford University Press, New York.
- (17) Do, S. H. and Suh, N. P., 1999, "Systematic OOProgramming with Axiomatic Design," *Computer*, Vol. 32, No. 10, pp.121~124.