대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.3, 385-399. Sep 2003

양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의

강 홍 규* · 고 정 화**

현재 우리 나라 수학 초등학교 교육과정에서 자연수는 측정과 무관한 일대일 대응 조작이나 수세기를 통하여 지도되고 있으며 분수는 측정이 부분적으로 개재된 방식으로 지도되고 있다. 이러한 지도 방식의 가장 큰 문제점은 자연수와 분수가 분리된다는 점이다. 이러한 문제점을 극복하고자 양의 측정을 통하여 자연수와 분수를 가르칠 것을 주장한 대표적인 인물이 Dewey와 Davydov이다. 이 논문에서는 Dewey와 Davydov의 주장에 근거하여 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도 방법을 개략적으로 제시하였고, 그것과 현재 우리나라 교육과정에서 자연수와 분수를 지도하는 방법과의 차이점을 고찰하였다. 이를 토대로 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도 방법의 교수학적 의의를 다음과 같이 파악하였다.

첫째, 양의 측정활동으로부터 자연수와 분수 개념이 분화된다

둘째, 자연수에서 분수로의 전이과정이 필연성을 띤다

셋째, 자연수와 분수 그리고 그것들의 하위 분야가 긴밀하게 연결된다

Ⅰ. 서론

어떤 수학 개념을 대하는데 있어서 수학자들은 그 개념을 이미 완전하게 획득한 위치에 있기 때문에 그 개념을 어떻게 사용할 것인가에 주된 관심을 가질 뿐이며, 그 개념의 기원, 즉 그 개념이 어떤 필요성에 의해서 어떤 과정을 거쳐서 형성되었는가를 따지는 것은 불필요하고 비효율적인 일로 여기는 경향이 있다. "완성된 수학적 이론을 이미 알고 있는 수학자들은 그 기원에 대하여 부끄러워하는 경향이 있다. 이미 완성된 기본 개념과 가정에서부터 시작하여 명료하게 전개되는 이론과는 달리 그 기원을 자세히 살피는 것은 결코 내키지 않으며 불쾌하기까지 한 것처럼 보인다"라는 Kolmogorov의 말은 이를 잘 드러내고 있다(Davydov, 1975, p.119 재인용). 그러나, 교육에서는 개념의 기원을 따지는 일이 매우 중요하다. 왜냐하면 교육자가 주로 관심을 갖는 영역은 개념을 획득한 이후 시기가 아니라 개념을 획득하기 이전 시기, 즉 어떻게 하면 학생으로 하여금 현재의 수학자와 같은 상태에 도달하도록 만들 수 있는가에 있기 때문이다.

수 개념의 기원은 무엇인가? 이 질문에 관해서는 수학자와 심리학자 등에 의해서 다양한 견해들이 제시되어 왔다. 이 견해들은 인식론적인 측면에서 본다면 수 개념의 기원이 양의

* 한성과학고
** 서울대대학원

측정으로부터 독립되어 있다고 보는 선험론적인 입장과 수 개념의 기원이 양의 측정 안에 있다고 보는 경험론적인 입장의 양진영으로 대별될 수 있다. 수 개념의 기원에 관한 경험론적인 철학을 바탕으로 수 개념 교육론을 구체화시킨 대표적인 인물이 Dewey(1859-1592)와 Davydov(1930-1998)이다.

이 논문에서는 수에 관한 경험론적 철학을 대표하는 Dewey와 Davydov의 입장을 바탕으로 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도 방법을 개략적으로 살펴보고 그것을 현행 교육과정과 비교한 다음, 양의 측정을 통한 수 개념 지도 방법이 교수학적으로 어떤 의의를 갖는지 고찰하고자 한다.

II. 본론

1. 수 개념의 기원과 발달: 양의 측정

Dewey(1895)는 수 개념의 본질이 변별과 동일시라는 두 가지 지적 조작의 산물이라고 말한다(p.32). 변별이란 어떤 하나의 전체를 서로 다른 부분들로 분할하는 것이고 동일시는 다시 이 부분들을 서로 관련지어서 하나의 전체로 만드는 것이다. 예를 들어 세 개의 사물들의 모임으로부터 '셋'이라는 개념을 마음 속에 품기 위해서는 세 개의 사물들을 서로 분리된 개별자(unit)들의 모임으로 인식할 수 있어야 함과 동시에 그 세 개의 사물들을 서로 관계지어서 하나의 전체(unity)로 인식할 수 있어야 한다. 이처럼 서로 대립되는 두 지적 조작—변별과 동일시, 분석과 종합—이 상보적으로 수행될 때 수 개념은 마음속에 존재할 수 있게 된다.

Dewey는 변별과 동일시 조작을 양의 측정 활동에 종속되는 것으로 본다[1]. 양의 측정 과정을 도식적으로 표현한다면 '모호한 전체' → '부분들로 분할' → '명확히 규정된 전체'의 순서로 말할 수 있는데, 이 속에 변별과 동일시라는 지적 조작이 수반되어 있다. 변별과 동일시 조작은 양의 측정 활동에 의해서 비로소 심리적으로 가능하게 되는 조작이며, 양의 측정 활동의 한 요소로 존재하다가 점차로 분화되어 독립적인 존재성을 획득한다. 측정은 변별과 관계짓기라는 지적 조작을 수반하며, 이 조작들에 의하여 수 개념이 생겨난다는 것이 Dewey가 말하는 수 개념의 기원으로서의 측정의 의미이다.

대표적인 수적 활동중의 하나인 '세기(counting)'에 대해서도 Dewey는 양의 측정에 입각하여 해석하고 있다. Dewey에 의하면 세기는 본질적으로 변별과 동일시 조작의 결합과

1) 선험론적 입장에서는 수 개념의 본질로서의 변별과 동일시 조작이 양의 측정과 관련될 수 있다는 것을 인정할 수는 있지만 그 조작들이 양의 측정에 종속된 것이라는 주장에는 동의하지 않을 것이다. 그들은 변별과 동일시 조작의 기원이 측정에 있지 않으며 오히려 측정보다 더 근본적이며 선재하는 것이라고 주장한다.

2) 선험론적 입장에서는 세기가 변별과 동일시 조작의 결합과 동일하다는 견해에 동의하지 않으며 특히 세기가 양의 측정에 종속된다는 견해에 동의하지 않는다. 이는 Dewey와 당시 Princeton대학의 수학자였던 H. B. Fine과의 논쟁에 잘 나타나 있다. Fine(1896)은 말하기를 아동은 측정을 알기 훨씬 이전에 이미 세기를 하며 세기는 측정보다 훨씬 단순한 지적인 기능으로서 근원적으로 측정과 구별되는 기능이라고 한다. 이에 대하여 Dewey는 성인에게 있어서는 세기가 양의 측정과 무관하게 형식적으로 수행되는 것이 가능하지만 아동에게 있어서는 불가능하다고 말한다. Dewey는 '수의 이름을 기계적으로 떠드는 것'과 '수를 세는 것'을 구별하면서, 아동에게 있어서 수의 이름을 기계적으로 떠드는 것 즉 가짜 세기는 측정과 분리될 수 있을지 모르나 수를 세는 것 즉 '진정한 세기'는 측정과 분리될 수 없다고 주장한다. 수 개념은 기계적으로 수의 이름을 외우는 가짜 세기를 통해서는 형성될 수 없으며 오직 진정한 수세기를 통해서만 가능하다는 것이 Dewey(1896)의 주장이다(p.427-428).

다르지 않다. 만약 어떤 사물들이 서로 동일시 되어 하나의 전체만을 형성한다면 그 사물들은 세어질 수 없으며, 만약 사물들이 서로 변별되는데 그치고 서로 관련되지 못한다면 또한 그 사물들의 모임은 세어질 수 없을 것이다. Dewey(1898)에게 있어서 세기는 변별과 동일시 조작과 동일하고 따라서 세기는 양의 측정에 종속되는 것이다(p.178).[2]

분수뿐만 아니라 자연수의 기원까지도 양의 측정에 두는 Dewey의 견해는 양에 대한 그리스적인 이원론을 극복한 바탕 위에서 건설된 것이다. 양에 대한 이원론은 Euclid의 원론에 잘 나타나 있는데, Euclid는 Aristotle의 입장을 바탕으로 양을 이산량과 연속량의 두 종류로 구분하였다. 그에 따르면 이산량은 서로 구별되는 개체로서의 사물이 보유한 단수성(singularity)에 근거한 것으로서 유한번의 분할만이 가능한 양을 말하며 이러한 이산량들의 모임이 자연수이고 이를 연구하는 것이 산술이다. 이에 비하여 연속량은 선분이나 넓이와 같이 무한 분할이 가능한 양이며 이러한 연속량을 연구하는 것이 기하학이다. 따라서 수와 양은 엄격히 구별되었으며 이는 Euclid의 원론에 잘 나타나 있듯이 산술과 기하학의 엄격한 분리로 이어졌다(Moreno, p.184).

이산량과 연속량의 이원론에 근거한 수와 양 사이의 분리는 16세기에 소수(decimal fraction)를 발명한 Stevin에 의해서 극복되고 단일한 양 개념으로 통합되게 된다(Moreno, pp.186-188). Stevin에게 있어서 이산량과 연속량은 더 이상 그리스적인 존재론적인 범주가 아니라 "양화되는 사물의 부수적인 특성"이라는 지위로 변화되었다. 그리스적인 양 개념이 그 양의 측정 활동에 선행해서 실재하는 것이었다면 Stevin의 양의 개념은 측정활동과 함께 드러나는 것이며 측정활동과 무관하게 혹은 선행해서 파악될 수 없는 것이었다. 이러한 통합된 양의 개념에 기초하여 Stevin은 수를 '양의 측정 활동'으로 정의한다(Moreno, p.186). Stevin에서부터 수와 양의 분리는 극복되었고 이는 현대적인 실수 개념의 기원이 되었다(Toeplitz, p.18; Moreno, p.186).

양의 측정 과정을 도식화한다면 첫째, 어떤 모호한 전체가 존재하고, 둘째, 전체를 서로 구별되는 부분들로 분할하고, 셋째, 부분들을 재결합하여 전체량을 명확히 규정하는 것이다. 이때 전체량은 어떤 수값으로 표현되게 되는데 이 수는 단위의 반복횟수 즉 전체량에 대한 단위의 비이다. 즉 양의 측정에 기원한 수 개념은 비 개념이 된다.[3]

수의 본질로서의 비 개념은 처음부터 완전하게 나타나는 것은 아니다. 비 개념은 처음에는 단순한 세기활동에 내포되어 있다가 측정이 보다 정확해짐에 따라 점점 명시적으로 드러나면서 분수에 이르러 완전하게 진화한다. 측정의 발달단계는 세 가지로 나눌 수 있는데, 첫째는

3) 비 개념은 수 개념의 본질이 아니며 일대일 대응에 의한 기수 개념이 양의 측정에 의한 비 개념보다 더 근본적이라는 주장이 있다. Fine(1896)은 '서로 구별되는 사물들로 이루어진 집합의 수는 … 사물의 특성이나 순서, 배열, 모양과는 전혀 무관하며 오직 개별성에만 의존하는 단 하나의 특성이다 … 이 점이 수의 본질이다. 그러므로 수의 본질은 비가 아니다'라고 말한다. 이에 대하여 Dewey는 '수의 본질은 일대일 대응에 의한 기수 개념도 비 개념도 아니며, 'Fine 교수가 말했듯이 사물들이 서로 구별되는 것'이라고 말한다. 즉 수의 본질은 변별과 동일시이다. 비 개념과 마찬가지로 일대일 대응에 의한 기수 개념도 사물의 변별과 동일시를 전제로 한다(Dewey, 1896, pp.427-428). 다시 말하면 비 개념과 일대일 대응 개념은 변별과 동일시라는 수 개념의 본질을 바탕으로 하여 성립되는 이차적인 개념으로서 어느 것이 더 본질적인 것인가를 말하기는 어렵다. 이렇게 본다면 측정활동을 통하여 비 개념과 함께 기수 개념을 지도하는 것이 원천적으로 불가능하지는 않을 것으로 생각된다. 왜냐하면 기수 개념은 변별과 동일시 조작을 바탕으로 하고 있으며 측정활동은 이 두 조작을 생성하기 때문이다.

정의되지 않은 단위를 사용하는 단계, 둘째는 단위가 측정하고자 하는 양과 같은 종류의 양으로 정의된 단계, 셋째는 단위가 측정하고자 하는 양과 다른 종류의 양으로 정의된 단계이다. 세기활동은 첫 단계이고 분수가 나타나는 단계는 셋째 단계이다. 측정은 수 개념의 기원일 뿐만 아니라 수 개념이 자연수에서 분수로 연속적으로 발달할 수 있도록 해주는 토대가 된다.

2. 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도방법

자연수의 대상은 이산량이며 분수의 대상은 연속량이라는 전통적인 견해에 입각한 수 지도 방법의 가장 큰 문제점은 자연수와 분수가 전혀 다른 종류의 수로서 인식되고 그 결과 단일한 수 개념을 저해한다는 점이었다. 이 절에서는 이산량과 연속량을 통합하여 단일한 양 개념을 설정하고 이를 바탕으로 분수는 물론 자연수도 그 기원과 본질이 양의 측정이라고 보는 입장에서, 자연수와 분수의 지도 방법은 구체적으로 어떻게 될 것인가에 대해서 개괄적으로 고찰하고자 한다.

가. 자연수 학습 이전 시기

Davydov는 수학교육에서 양의 개념과 양적 관계를 포함한 물리적 활동으로 이루어지는 '전산술적 단계'가 자연수 개념을 가르치기 이전에 독립적으로 존재할 수 있고 또 반드시 존재해야만 한다고 주장하였다(1975, p.55; 1982, p.224). 그에 따르면, 수 개념을 학습하면 양적 관계에 대한 이해가 자연스럽게 일어난다는 가정은 그릇된 것이며, 양적 관계는 수 개념보다 근본적인 것으로서 독립적으로 다루어질 때 이해될 수 있는 것이다. 나아가 수학교육에서 전산술적 단계는 수 개념의 기초로서 작용할 뿐만 아니라 문자 산술을 통하여 추상수학의 기초로서 작용하기도 하며 수학 전체를 하나의 통합된 교과목으로 구조화할 수 있는 토대를 제공한다는 점에서 그 중요성을 찾을 수 있다.

양은 어떤 대상들의 집합을 길이, 온도, 밀도 등 대상에 속한 다양한 성질을 기준으로 비교하는 활동이 행해질 때 발생한다(Davydov, 1975, p.124). Davydov(1975)는 양의 개념을 인식하고 양적 관계를 파악하도록 하는 교육과정을 다음의 여섯 가지 활동으로 제시하고 있다.

첫째, 길이, 무게, 부피 등 대상의 여러 성질을 기준으로 대상들을 모으고 비교하기
둘째, 대상을 비교하고 등식이나 부등식으로 그 결과를 나타내기
셋째, 등식과 부등식의 성질
넷째, 덧셈과 뺄셈 연산
다섯째, 부등식을 덧셈과 뺄셈을 통해 등식으로 바꾸기
여섯째, 등식과 부등식의 덧셈과 뺄셈.

첫째, 사물을 비교하고 모으는 활동이다. 예를 들면, 주어진 여러 대상들 가운데서 모델로 주어진 대상과 하나의 속성만이 같은 대상을 선택하는 활동이다(Davydov, 1975, p.145). 흔히 아동들은 특수한 속성에 초점을 맞추어 추상해내지 못하고 모든 속성이 동일한 대상만을 고르기 쉽다.

둘째, 사물 사이의 관계를 '보다 큰', '보다 작은'과 같은 말로 표현하는 활동이다. 이 활동이 숙달되면 그 관계를 =, ≠, <, > 등과 같은 기호로 표현하는 활동이 수행된다(직선의 길이를 통해서 표현하는 것이 중간 단계로 사용될 수도 있다). 이어서 그 관계를 A, B와 같은 문자를 사용하여 표현하는 활동이 수행된다(그 사물의 형상이나 사각형과 같은 도형기호를 사용하여 표현하는 것이 중간 단계로 사용될 수

도 있다).

문자를 사용한 표현은 임의의 대상의 속성에 관한 진술, 즉 일반화된 표현이다. Davydov (1995)는 관계를 문자 기호를 사용하여 표현하는 것이 중요하다고 말하는데, 그 이유는 그것이 아동으로 하여금 수학적 관계 자체를 연구하도록 하며, 그 결과 더 일반화된 수학으로 나아가는 디딤돌이 되기 때문이다(p.237).

셋째, 반사성(A=A), 대칭성(A<B와 A>B는 같은 뜻이다), 추이성(A<B이고 B<C이면 A<C이다)과 같은 등식과 부등식의 성질을 이해하는 활동이다. 막대와 그 그림자를 비교하는 활동을 통해 반사성을, 비교되는 두 대상의 위치를 바꾸어 크다, 작다 사이의 관계를 파악함으로써 대칭성을, 대상물의 크기가 점점 증가 또는 감소하는 순서대로 배열하고 그 크기를 비교하는 활동을 통해 추이성을 이해한다. 이 활동에 익숙해지면 등식과 부등식 자체의 성질을 연구하는 활동이 주어지고 대상과 분리된 언어적, 논리적 사고로 옮겨가게 된다(Davydov, 1975, p.140).

넷째, 대상의 속성의 '변화'에 주목하는 활동이다. 예컨대, 물의 부피를 변화시킴으로써 변화에는 증가와 감소라고 하는 두 가지 방향이 있으며 이를 +와 -와 같은 부호로 나타낸다. 대상의 처음 상태를 식 A=B로 나타내고, 한쪽에 물을 더 넣음으로써 일어난 변화를 A+K로, 물을 덜어냄으로써 일어난 변화를 A-K로 쓴다. 물의 부피와 같이 시각적으로 제시된 증가와 감소는 A+K>B, A-K<B와 같이 나타낼 수 있다.

다섯째, 부등식을 등식으로 변형하는 활동이다. 예를 들어 물이 든 두 개의 플라스크에서 얼마를 더하거나 빼야 부피나 무게가 같아지는가, 즉 증가와 감소의 양을 결정하는 문제를 부여한다. 아동들은 이를 A+x=B와 같이 표현한다. x값을 구하는 과정은 시각적인 보조물을 통해 도움을 받는다. x는 두 대상의 차이, 즉 x=B-A로 표현된다. Davydov(1975)에 따르면, 이 과정은 뺄셈에 새로운 의미를 부여하는 것으로서 전체 과정에서 가장 어려운 부분이다(p.189). 부등식을 등식으로 변형하는 과정을 도식적으로 요약하면 ① 초기 조건으로서의 A<B ② 변형으로서의 A+x=B ③ 차이를 구하는 과정으로서의 x=B-A ④ 새로운 등식을 이루는 A+(B-A)=B가 된다.

여섯째, 이전 활동의 결과를 종합하는 활동이다. 이 과정의 핵심은 식을 다루는 규칙을 형식적으로 부과하는 것이 아니라 양적 관계에 기초한 추론과 의미를 통해서 식을 이해하도록 한다는 점이다(Davydov, 1975, p.197). 이전의 활동들을 종합하여 등식과 부등식의 덧셈, 'A=B이고 M=D이면 A+M=B+D이다', 'A>V이고 K>E이면 A+K>V+E이다'와 같은 관계를 다룬다. 이는 문자 기호로 표현된 식으로부터 어떤 결과를 추론하는 활동이다. 예컨대 'A=B이고 K>M이면 A-K와 B-M의 관계는 어떻게 되는가'와 같은 문제를 다룬다. 이를 통하여 하나의 양이 몇 개의 다른 양의 합으로 나타낼 수 있다는 것과 식을 확장하거나 줄이는 것이 가능하다는 것을 이해하게 된다.

자연수 도입에 앞서 이루어지는 이러한 활동은 다음과 같은 것을 목적으로 한다는 것을 알 수 있다. 첫째, '비교'하는 활동을 중심으로 양의 개념을 인식하게 하는 것이다. 양의 개념은 구체적인 대상들의 비교준거를 통해 인식된다. 둘째, 구체적인 대상물이나 반구체물들을 사용하기는 하지만, 궁극적으로 양적인 관계를 일반적인 차원에서 이해하는 것이다. 이러한 과정을 통해 파악된 양적인 관계는 구체적인 양의 측정을 통해 수의 개념으로 나타나게 된다.

나. 양의 측정을 통한 자연수 지도 방법

전통적인 자연수 지도 방법은 자연수를 이산량의 집합으로 보는 관점을 바탕으로 전개된다. 이러한 관점에 따르면, 개개의 사물이 보유한 개별성에 기초한 '하나'가 자연수의 고정 단위를 이루며 이 고정단위의 누적을 통해 자연수가 만들어진다. 여기서의 '하나'는 어떤 전체량과의 관련 없이 즉 측정과 무관하게 그 자체에 내재한 성질로서 규정된다. 이와는 달리 양의 측정에 기초한 관점에서는 대상과 단위와 수라는 세 요소 사이의 상호 관계가 중심에 놓인다. 그러므로 측정되는 대상과 단위 사이의 관계를 결정하는 것 그리고 그 결과를 나타내기 위해 숫자들을 사용하는 것이 자연수 학습의 주요 과정을 이룬다. Minskaya(1975)는 양의 측정을 통해 자연수를 지도하는 교육과정을 다음의 네 가지 활동을 통해 예시하고 있다.

첫째, 단위를 도입하기
둘째, 숫자를 도입하기
셋째, 측정을 수직선 위로 확장하기
넷째, 측정을 문자식으로 표현하기

첫째, 대상과 단위 그리고 그들 사이의 관계를 구체적인 수준에서 이해하는 활동이다. Minskaya(1975)는 다음과 같은 구체적인 활동을 제시한다(p.214). 일정한 크기의 나무 조각을 제시하고 그것과 동일한 크기의 나무 조각을 옆방에 가서 가져오게 하는 것이다. 이때 모델이 되는 나무 조각을 가져가지 못하게 한다. 또는 하나의 그릇에 담겨있는 물의 양과 같은 양의 물을 다른 용기에도 채우게 한다. 이때 두 그릇의 형태가 서로 달라서 그 용량을 쉽게 비교할 수 없도록 만든다. 이러한 활동의 핵심은 모델과 같은 크기의 대상을 선택하거나 같은 부피의 물의 양을 정할 때 모델을 직접 사용할 수 없다는 점이다. 이러한 상황에서 교사는 목적을 달성하기 위해 주어진 것보다 작은 나무 조각이나 작은 용기를 이용하는 간접적인 방식, 즉 단위를 통해 대상들을 비교하고 평가하는 것이 가능하다는 것을 깨닫도록 돕는다.

둘째, 수의 이름인 숫자를 도입하는 활동이다. 여기에서 중요한 것은 숫자 도입의 필요성이 주어져야 한다는 것이다. 숫자가 도입되지 않은 상태에서 아동이 대상과 단위 사이의 관계를 나타내려면 대상 자체를 지시하면서 '이만큼' 있다고 표현할 수밖에 없기 때문에 대상 자체를 단위로 사용하는 데에는 많은 불편이 따른다. 대상이 뒤죽박죽 될 수도 있고 큰 수를 지칭하는 데에는 너무나 많은 단위가 필요할 수도 있다. 대상을 가지고 측정 결과를 나타내는 것이 불편하고 어렵다는 인식은 측정 결과를 효율적으로 표현할 수 있는 수단으로서의 숫자를 필요로 하게 된다.

숫자는 '하나(일, 1)'의 개념을 기초로 도입된다. 양의 측정의 관점에서 '하나'라는 개념은 대상을 측정하는 '단위 그 자체'로 이해된다. '둘(이, 2)'은 단위를 두 번 반복한 것이다. 단위의 관점에서 수를 이해하게 되면 동일한 대상이라도 단위가 달라짐에 따라 다른 수를 나타내게 된다. 예컨대, 2cm 막대를 단위로 하였을 때 2cm 막대는 '하나'이지만 4cm 막대는 '둘'이 된다. 그러나 4cm를 단위로 하였을 때에는 4cm 막대 자체가 '하나'가 된다.

셋째, 측정을 수직선 위로 확장하는 활동이다(Minskaya, 1975, pp.224-231). 이 활동은 단위를 수직선 위에 '눈금'으로 표시하고 이를 기초로 수를 계속적으로 확장하는 것이다. 또 단위에 따라 '1'의 대상이 임의로 선택되는 것과 마찬가지로, '1'을 나타내는 눈금은 임의로 선택될 수 있다. 그러나 일단 1의 위치가 선택되면 수 '2'는 1이 나타내는 눈금의 선택에 종속되므로 임의로 선택할 수 없다. 수직선에서도 첫

눈금을 어떻게 선택하느냐에 따라 동일한 수도 직선 위의 서로 다른 위치에 놓이게 된다. 이후 수직선에 숫자를 표시하는 작업은 문자로 표현하는 활동으로 이어진다.

처음 눈금의 선택에 따라 수직선 위의 동일한 지점이 다양한 다른 수를 나타낼 수 있기 때문에, 단위의 크기를 조절하여 수직선 위의 특정한 지점이 임의의 수 N을 나타낼 수 있다는 것을 이해할 수 있다. 자연수 개념을 학습하는 과정에서 수직선을 도입하는 것은 측정에 기반을 둔 수 개념의 이해를 강화한다는 점에서 큰 의의를 가진다. 측정에서 단위의 임의성은 수직선에서 눈금의 임의성으로 나타나며 단위의 변화에 따라 동일한 대상이 다른 수로 표현될 수 있다는 점은 수직선 위의 동일한 점이 다른 수에 대응될 수 있다는 것을 의미한다. 게다가 수직선이 시각적인 요소를 동반한다는 점에서 수직선 위에서의 조작은 측정에 기초한 수 개념의 이해를 강화하는 효과적인 수단이라고 할 수 있을 것이다.

넷째, 측정을 문자식으로 표현하는 활동이다. 대상, 단위, 수 사이의 상호 관계를 파악하여 이를 문자식으로 표현하고 반대로 문자로 표현된 식을 보고 세 가지 요소들의 관계를 파악하는 것이다. Minskaya는 다음과 같은 질문을 제시하고 있다. '대상이 동일한데 수가 달라졌다면, 단위에 대해서는 무엇을 말할 수 있는가?', '단위가 동일한데 수가 변했다면, 대상의 양에 대해서는 무엇을 말할 수 있는가?', '수가 동일한데 대상이 변했다면, 단위에 대해서는 무엇을 말할 수 있는가?' 이러한 관계를 문자를 통해서 제시한다면 어려움이 있으므로 대상을 보조적으로 사용하여 이해를 도와주어야 한다. 다음의 문제들은 그 몇 가지 예이다(Minskaya, 1975, pp.240-241).

<문제> $C_k=5$는 측정 대상 C를 단위 k로 측정했을 때 수값이 5라는 뜻이다. 다음의 □안에 적당한 등호나 부등호를 써넣으시오.

(1) $C_k=5$ 이고 $C_g = 15$ 이면 $k \,\square\, g$이다.

(2) $A_e=7$ 이고 $B_e = 7$ 이면 $A \,\square\, B$이다.

(3) $D_k=6$ 이고 $E_g = 6$ 이고 $D<E$ 이면 $k \,\square\, g$이다.

(4) $B_e=10$ 이고 $B_k = 10$ 이면 $e \,\square\, k$이다.

(5) $A_g=M$ 이고 $A_k = E$ 이고 $M>E$ 이면 $g \square k$이다.

여기에는 임의로 주어지는 단위에 대한 대상의 관계, 단위의 변화에 따른 관계의 변화, 대상과 단위와 수 사이의 상호관계 등의 이해가 포함되어 있다. 이러한 자연수 개념의 학습은 확실히 개별적인 대상을 하나의 단위로 하여 자연수를 학습하는 것보다 더 큰 지적 능력을 요구한다. 그러나 그 내용이 아동에게 학습 가능하다면 처음부터 변인들 사이의 상호 관계를 이해하는 능력을 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라, 복잡한 추상을 형성하고 수학적 사고 발달을 촉진시킬 수 있는 이점을 갖는다.

다. 양의 측정을 통한 분수 지도 방법

현재 초등학교 수학교육과정에서 분수 개념은 연속량의 등분할을 통하여 도입된다. 예를 들면 원판을 여섯 개의 부분들로 등분할한 후, 그들 중의 두 조각을 '똑같이 여섯 부분으로 나눈 것 중의 둘'이라고 말하고 이를 $\frac{2}{6}$와 같이 분수로 나타내는 것이다(교육부, 2001). 이러한 분수 도입 방식에 대하여 유현주(1995)는 그것이 분수 개념의 본질인 비 개념을 명확히 드러내지 못한다는 점에서 한계가 있다고 비판한

다(p.140). 이러한 점 이외에도 등분할을 통한 분수 도입의 문제점으로는 심리적인 동기가 없는 상태에서 등분할이 인위적으로 이루어진다는 점과 그 도입 맥락이 자연수의 개념으로부터 유리되어있다는 점등을 지적할 수 있다.

양의 측정을 통한 분수 도입 방법에서는 이러한 세 가지 문제점들의 개선이 가능하다. 우선 양의 측정에서의 자연수와 분수 개념은 '전체량과 단위량 사이의 비'로서 동일하다. 다만 차이점이라면 분수는 자연수보다 정확한 측정 과정을 나타낸다는 것뿐이다. 사회의 발달은 인간에게 측정이 보다 정교해질 것을 요구하고, 이러한 필요성에 의해서 단위는 등분할되며 이러한 정교한 단위를 통한 측정을 나타내는 것이 분수이다.

이러한 장점을 인정하면서 Davydov와 Tsvetkovich(1991)는 양의 측정을 통하여 분수를 도입하고 지도할 것을 주장하고 있다. 그들의 방법은 자연수 도입에서와 마찬가지로 '대상—단위—수'라는 측정의 세 요소 사이의 상호관계를 중심으로 하며, 특히 측정이 보다 정교해지는 과정 속에서 일어나는 단위의 변화가 주목의 대상이다. 그들은 분수 도입 활동으로 다음의 다섯 가지 활동을 제시하고 있다.

첫째, 동일한 대상을 서로 다른 단위로 측정하고 세 요소 사이의 관계를 파악하기.
둘째, 측정 결과가 자연수로 표현되지 못한 경우 그 나머지를 표현하기
셋째, 하나의 대상을 측정하는데 사용된 여러 단위 사이의 관계를 찾기
넷째, 분수의 크기 비교하기
다섯째, 분수의 기본적인 성질 찾기

첫째, 동일한 대상을 서로 다른 단위로 측정하면서 대상—단위—수 사이의 관계를 표현하는 활동이다. 예를 들면, 주어진 일정한 부피의 물을 컵 b로 측정하여 $\frac{A}{b}=4$와 같은 식으로 쓰고, b보다 두 배 작은 다른 컵으로 측정하여 $\frac{A}{k}=8$이라고 쓰는 활동이 이에 해당한다 (Davydov & Tsvetkovich, 1991, p.108). 단위를 변화시키면 수가 어떻게 변하는가 하는 것을 문자를 통해 표현한다.

둘째, 어떤 대상을 측정한 결과가 자연수로 표현되지 못하는 상황에서 그 나머지를 정확히 표현하는 활동이다. 예를 들면, 대상 A를 단위 b로 측정했을 때 b를 두 번 반복하면 나머지가 생기고 세 번 반복하면 부족할 경우 그 측정 결과를 '$\frac{A}{b}\approx 2$ $\frac{A}{b}\approx 3$' 으로 표현한다. 즉, A에 대한 b의 측정값이 2와 3 사이에 있다는 뜻이다. 이어서 "A는 2보다 얼마나 더 많은가?"와 같은 질문을 제기한다. 이는 아동으로 하여금 보다 정교한 단위를 고안해야만 한다는 필요성을 느끼도록 하기 위한 것이다. 나머지의 존재를 인식하고 그것을 정확히 표현해야할 필요성을 느끼는 것은 분수 학습의 동기 부여라는 면에서 매우 중요하다고 할 수 있다. 처음에는 나머지 자체를 하나의 단위 k로 생각하여 A=2b+1k와 같이 표현한 다음, 이어서 k보다 작은 새로운 단위 c로 측정하여 A=2b+2c로 표현한다. 측정을 통하여 자연수를 배우면서 아동들은 단위의 변화에 따라 하나의 대상을 표현하는 수값이 다르게 결정될 수 있다는 것을 파악했기 때문에, 나머지를 보다 정확히 측정하기 위하여 새로운 단위를 설정하는 것을 자연스럽게 받아들일 수 있다.

셋째, 단위들 사이의 관계를 찾는 활동이다. 이 활동은 앞 단계에서 산출한 A=2b+2c와 같은 표현의 한계를 지적하는 데서부터 시작한다. A=2b+2c와 같은 표현은 상호 관련이 명확히 규정되지 않은 두 개의 단위 b와 c를 사용

한다는 점에서 불편하고 복잡하다는 점을 지적한 다음, '단위들을 서로 관련시킬 수 없는가?', '나머지를 측정하는 새로운 단위를 원래의 단위로 표현할 수 없는가?'와 같은 질문들을 제기한다(Davydov & Tsvetkovich, 1991, p.112). 이 단계는 측정을 통한 분수 지도에서 핵심적인 위치를 차지한다. 왜냐하면 분수 개념의 본질은 '보다 정교한 측정을 위한 새로운 단위의 도입' 그리고 '처음 단위와 새로운 단위와의 관계'이기 때문이다.

나머지를 보다 정확히 표현하기 위하여 고안된 새로운 단위와 처음 단위와의 관계는 다음 두 가지 조건을 통해서 규정될 수 있다(Davydov & Tsvetkovich, 1991, p.118). 하나는 새로운 단위(파생단위)가 처음 단위(원시단위)에 몇 번 들어가는가이고, 다른 하나는 새로운 단위가 나머지에 몇 번 들어가는가이다. 이 두 조건은 분수 표기에서 분모와 분자에 해당되는 것이다. 분모는 파생단위가 원시단위에 들어가는 횟수이며, 분자는 파생단위가 나머지에 들어가는 횟수이다. 이러한 일련의 과정은 측정을 통하여 분수를 얻고 그것을 표현한 다음 그 표현 형식을 강화시키면서 그것에 친숙해지는 과정이라고 할 수 있다.

한편, 나머지를 정교하게 표현하기 위하여 사용되는 파생단위는 여러 가지 방법으로 선택될 수 있다. 예컨대, 눈금자에서 원시단위는 12칸이고 나머지가 8칸일 경우 파생단위는 1칸, 2칸, 4칸이 가능하다. 각각의 파생 단위는 원시단위에 각각 12번, 6번, 3번 포함되므로 분수 $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$로 표현할 수 있고, 각각의 파생 단위는 나머지에 8번, 4번, 2번 포함되므로 $\frac{8}{12}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$로 표현할 수 있다. 이러한 사실은 단위가 달라짐에 따라 하나의 측정 결과를 나타내는 분수가 여러 개 있을 수 있다는 것을 보여준다.

넷째, 분수의 크기를 비교하는 활동이다. 분수의 크기 비교는 분모—파생단위가 원시단위에 포함되는 횟수—와 분자—파생단위가 나머지에 포함되는 횟수—의 의미를 통하여 이루어진다. 분모가 같은 경우, 즉 파생단위가 원시단위에 포함되는 횟수가 동일한 경우는 파생 단위가 나머지에 포함되는 횟수가 클수록 분수는 더 크게 된다. 즉 분자가 클수록 분수는 더 크다. 분모가 다른 경우는 분자가 1인 경우만을 다룬다. 분자가 1이라는 것은 파생단위가 나머지와 같다는 것이므로 파생 단위가 원시단위에 들어가는 횟수가 클수록 파생단위는 작다. 따라서 분모가 클수록 분수가 작아진다. 이것들 이외에 분수를 비교하는 규칙에 대해서는 분수의 기본적인 성질과 약수 배수 개념을 배우고 난 후, 최소공배수를 통하여 공통분모를 찾을 수 있을 때 다룬다.

다섯째, 분수의 기본적인 성질을 찾는 활동이다. 예를 들면 "파생 단위가 n 배 증가하면 분자와 분모도 n 배 감소해야 한다" 혹은 "분자와 분모가 n배 증가하거나 감소하더라도 분수가 나타내는 측정값은 변하지 않는다" 와 같은 분수의 성질을 이해하는 것이다. 이는 일반적으로 분모의 증감과 분자의 증감 사이의 관계를 파악하는 것으로서 분수 학습 과정 중에서 가장 어려운 단계 중의 하나이다. 단위의 변화에 따라서 하나의 측정값을 여러 분수로 표현할 수 있다는 사실은 이러한 성질을 이해하는데 큰 도움이 된다.

3. 현행 수학교육과정에서의 자연수와 분수 지도 방법

이 절에서는 현재 우리나라 수학교육과정에서의 자연수와 분수의 지도 방법에 대해서 살

펴보고, 이것과 앞 절에서 논했던 양의 측정을 통한 지도 방법과의 차이점을 고찰하고자 한다.

가. 자연수 학습 이전 시기

강완 외(2001)는 아동에게 수 개념을 효과적으로 형성시키고 이후 여러 수학적 기능을 발달시키기 위해서는 그러한 것들의 토대를 이루는 '수 이전 활동'이 필수적이라고 말한다(p.197). '수 이전 활동'이란 아동에게 의미 있는 수세기 기능과 수 감각을 길러주는 활동으로서 분류, 비교, 대응, 묶음 등이 이에 속한다. 분류 활동은 개별화된 대상을 인식하는 활동으로서 수 개념의 선결 조건이다. '보다 큰', '보다 작은'과 같은 말로 표현되는 비교 활동은 수세기와 일대일 대응으로 이어지기 이전의 필수적인 단계이다.

그러나 현행 수학교육과정에서는 이러한 예비적인 활동이 생략되고 있다. 초등학교 1학년 수학 교과서는 '5까지의 수'라는 단원으로부터 시작되는데, 1차시 수업은 세어보는 활동이고 2차시부터는 곧바로 수 1, 2, 3, 4, 5에 대한 학습에 들어간다.

나. 자연수 지도 방법

현행 초등학교 1학년 수학 교과서에서는 1차시에 세어보는 활동을 수행한 후 2차시부터 자연수 1, 2, 3, 4, 5를 도입한다. 먼저 다섯 마리 이내의 동물들이 모여있는 그림을 보면서 그 동물의 개수를 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯이라고 세는 활동을 한다(수학 1-가, pp.2-7). 다음으로 하나의 사물로 이루어진 그림을 제시하고 그 옆에 나란히 영상적인 대응물 ●을 하나 제시한다. 그리고 그것 수 1로 정의하고 수사 '일'과 '하나'로 표현한다. 동일한 방법으로 사물이 각각 둘, 셋인 그림을 제시하고 그에 대응하는 수그림 ●●과 ●●●으로 각각 제시한 후 2와 3을 정의한다. 수 1, 2, 3, 4, 5를 이와 같이 정의하는 것은 어떤 수 개념을 바탕으로 하고 있는 것인가? 교사용 지도서 수학 1-가(2000)에서 말하고 있는 바 "자연수 개념은 개수가 같은 사물들의 공통 성질로서 이해하도록 해야 한다(p.49)"는 말에서도 알 수 있듯이 현행 교과서에서는 기수적인 의미에서 자연수를 파악하는 것이라고 볼 수 있다.

3차시부터는 수의 순서를 익히는 활동을 수행하게 된다. 점심을 받는 구체적인 급식 장면을 소재로 하여 순서가 정해진다는 것을 알게 한다. 맨 앞의 사람을 수 1로 나타내고 첫째라고 읽고, 그 다음 사람을 수 2로 나타내고 둘째라고 읽고, 그와 같은 방식으로 순서수 1, 2, 3, 4, 5를 학습한다. 순서수의 측면을 익히는 것은 수의 계열을 보다 확실하게 이해하도록 하기 위한 것이다(교사용 지도서 수학 1-가, 2000, p.60).

결국, 현행 수학교육과정에서 자연수 개념은 세기 활동을 기초로 하여 기수와 순서수의 측면에서 도입되고 있으며 따라서 그 도입 맥락은 양의 측정과는 거의 무관하며 단위의 상대성에 근거한 측정 대상과 단위와 수값 사이의 상호 관계도 전혀 다루어지지 않고 있다고 말할 수 있다. 결론적으로, 현재의 방법은 양의 측정을 통한 지도 방법과는 거리가 있을 뿐만 아니라, 오히려 Davydov와 Dewey가 비판했던 바 고정단위의 모임을 통한 이산량으로서의 자연수 개념에 기초한 방법과 유사하다고 판단된다.

다. 분수 지도 방법

현행 교육과정에서 분수는 3-가 단계에서 연속량의 등분할을 통하여 도입된다. 우선 사과를 등분할하는 활동으로 시작한다(수학 3-가, 2001, p.86). 사과를 반으로 똑같이 나누게 하고 또 반의 반으로 똑같이 나누게 한다. 이어서 사과와 같은 구체물 대신 정사각형 모양의 반구체물인 색종이, 원 모양의 종이를 똑같이 나누는 활동을 한다. 이와 같이 전체를 여러 부분으로 등분할한 후, 그들 중의 일부를 '똑같이 몇 부분으로 나눈 것 중의 몇'이라고 말하고 이를 분수로 나타내게 한다(수학 3-가, pp.90-93). 전체를 똑같이 두 부분으로 나눈 것 중에서 한 부분이 색칠되었을 때 그것을 $\frac{1}{2}$ 이라고 표현하고 '이분의 일'이라고 읽는다. 유사한 방법으로 전체를 똑같이 4로 나눈 것 중에서 색칠한 부분이 3일 때 $\frac{3}{4}$이라고 쓰고 '사분의 삼'이라고 읽는다. 그리고 그와 같은 수를 '분수'라고 정의한다.

이같은 방법의 특징은 연속량에 대해서 등분할이 시행된다는 점이다. 이전에 자연수는 사물을 세는 활동을 통하여 도입되었다. 이때 세는 활동은 이산량을 세는 것과 같은 것이며 사물의 선천적인 개별성에 근거한 고정 단위의 반복으로 볼 수 있다. 그러나 분수는 하나의 전체를 이루고 있는 연속량의 등분할에서부터 시작하기 때문에 단위가 고정되어 있지 않게 되며 따라서 아동은 분수의 심상을 자연수와는 다르게 형성하게 된다(유현주, 1995, p.115).

분수를 등분할로 접근하는 방식에는 측정의 의미가 어느 정도 함유되어 있다고 보여진다 (Davydov & Tsvetkovich, 1991, p.104). 하지만 사과의 등분할을 통한 분수 도입 과정에는 단위와 관련하여 다소 복잡한 문제가 개재되어 있다. 이산량을 세는 활동을 통하여 자연수를 도입한 현행의 방법에서는 하나의 사과는 고정 단위로 암묵적으로 규정되고 있다고 볼 수 있다—물론 현행 교과서에서는 명시적으로는 단위에 대하여 언급하고 있지 않다. 하나의 사과를 고정 단위로 본다면, 그것을 두 부분으로 똑같이 나눈 것 중에서 한 조각은 고정 단위를 나눈 것이므로 결코 단위가 될 수 없다. 다시 말하면 사과 반조각은 1이 될 수 없는 것이다. 그러나 양의 측정에 기초한 분수 개념의 본질은 비개념으로서, 거기에는 단위의 상대성이 중요한 위치를 차지하며 분수 학습 과정에서 사과 반조각을 1로 보아야만 하는 상황은 반드시 발생하게 된다. 고정 단위에 익숙한 아동은 반조각의 사과를 하나의 단위, 즉 1로 보아야만 하는 상황에서는 심리적인 저항을 느끼기 쉽다. 단위량의 등분할을 통하여 분수 개념을 도입할 경우, Davydov나 Dewey가 말하는 측정의 의미가 전혀 없다고 말할 수는 없지만, Davydov나 Dewey가 주장하는 바 분수 개념의 본질인 비 개념이나 단위의 상대성 등은 이해되기 어렵다고 생각된다(유현주, 1995, p.116).

"분모와 분자를 0이 아닌 같은 수로 곱하면 크기가 같은 분수가 된다", "분모와 분자를 0이 아닌 같은 수로 나누면 크기가 같은 분수가 된다"와 같은 분수의 기본 성질은 수학 5-가 (2002) 교과서의 '크기가 같은 분수를 알아보자'라는 단원에서 제시된다(pp.34-36). 교과서에서는 원과 사각형의 종이와 같은 반구체물에 $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}$의 크기만큼을 색칠하면 그 크기가 같고, 분모와 분자에 같은 수를 곱하고 나누면 그 값이 같아진다는 것을 확인한다. 이와 같은 방식으로 분수의 성질을 학습하게 하는 것은

양의 측정을 통한 분수 자체의 성질 자체를 이해하는데 초점을 두거나 비로서의 분수 개념과의 관련성 속에서 끌어낸 것으로 볼 수는 없으며, 단지 사칙연산에 손쉽게 이용하기 위하여 알고리즘적으로 도입한 것이라고 생각된다. 유현주(1995)는 이것이 실제의 맥락에서 상황을 조직하는 방식으로 제시된 것이 아니라, 수학적으로 미리 구조화된 모델로서 주어진 크기를 다르게 나타낸 것으로서 사후 통찰적인 방식이라고 비판한다(p.121).

4. 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의

앞서 살펴본 양의 측정을 통한 수 개념의 지도 방법과 현행 수학교육과정에서의 수 개념의 지도 방법을 바탕으로 양의 측정을 통한 자연수와 분수의 지도가 가지는 교수학적 의의를 고찰하고자 한다.

첫째로, 자연수와 분수는 양의 측정이라는 하나의 활동에서부터 분화된다. 자연수와 분수 개념 모두 대상—단위—수의 관계를 핵심으로 한다. 양의 측정 활동 안에서 자연수와 분수는 다른 종류의 수가 아니라 비의 관념을 본질로 하는 동일한 '수'임을 말해준다. 결과적으로 양의 측정을 통한 방법은 자연수와 분수 개념 지도가 통합된 교육과정을 구성할 수 있게 해준다는 교육적 의의를 가진다.

둘째로, 자연수에서 분수로의 전이과정이 필연성을 근거로 진행된다는 점이다. 자연수 개념을 학습하고 난 후 분수 개념을 학습하는 데 있어 중요한 것은 왜 분수 개념의 학습이 요구되는가 하는 것이다. 측정에 기초하여 분수를 학습하는 경우 측정이 보다 정교해져야만 한다는 객관적인 필요성이 학습과정을 이끈다. 처음 선택된 단위로는 근사적으로밖에 평가할 수 없는 상황에서 더 정확한 측정을 위해 처음 단위와 명확한 관계를 가지는 더 작은 단위를 고안할 필요성이 제기되는 것이다.

셋째로, 측정을 통하여 자연수와 분수에 관련된 전체 내용이 유의미하게 통합된다. 자연수의 경우, 숫자가 필연성을 띤다는 점, 수직선의 활동이 대상—단위—수 사이의 관계를 파악하는 일환으로 도입된다는 점을 들 수 있다. 분수의 경우, 분수 도입 자체가 측정의 정확성이라는 필연성을 띤다는 점, 나머지를 측정하는 새로운 단위의 두 가지 요구조건이 분모, 분자와 관련된다는 점, 단위 선택의 다양성으로부터 자연스럽게 분수의 기본성질을 이해하게 된다는 점 등을 들 수 있다.

Ⅲ. 맺음말

본 연구는 수 개념의 기원을 양의 개념과 그에 대한 조작으로부터 비롯되는 것으로 보는 관점에서 출발하였다. 그 관점에 대한 철학적인 논의를 거친 후, 양의 측정이라는 조작이 어떻게 자연수와 분수 개념의 학습으로 이어질 수 있는가를 살펴보았으며, 마지막으로 양의 측정을 통한 자연수와 분수의 개념 학습이 지닐 수 있는 교수학적 의의를 탐색하였다.

앞의 논의에 따르면, 양의 측정을 통해 자연수와 분수 개념은 자연스럽게 도입될 수가 있으며, 자연수에서 분수 개념으로의 전이과정이 연속성을 확보할 수 있었다. 무엇보다도 자연수와 분수를 하나의 '수'로서 볼 수 있게 하며, 그 결과 수 개념을 비 개념을 중심으로 하여 통합된 교육과정으로 구성할 가능성을 보여준다는 점에서 큰 의의를 찾을 수 있었다.

수 개념에 관한 통합된 교육과정의 구성이라는 논의가 완성되기 위해서는 무리수에 관한 논의가 더해져야만 한다. 본 연구에서는 상세히 논의하지 않았지만 '양의 측정'이라는 지도 원리는 무리수까지도 무리 없이 포괄할 수 있다는 것이 필자의 견해이다. Toeplitz(1963)에 의하면 19세기에 Dedekind와 Weierstrass에 의해서 공리적인 실수론이 완성되기 이전까지 수학자들이 마음에 품었던 실수 개념 그리고 현재 학교 수학에서의 실수 개념은 소수(decimal fraction)의 관념이며 이것이 바로 현대적인 수 개념이다(p.14). Toeplitz(1963)에 의하면 이 소수의 관념은 양의 측정의 관념 즉 "선분이나 넓이의 양은 무제한으로 정확하게 측정될 수 있다"는 관념과 동일하다. 넓이라는 양을 예로 들어서 말한다면, 수는 어떤 주어진 넓이와 단위 정사각형의 비, 즉 두 넓이 사이의 비를 가리킨다(p.18). 이러한 사실은 양의 측정을 통한 자연수와 분수 개념의 지도 방법이 "통약불가능한 두 선분의 비"로서의 무리수 개념에로 자연스럽게 이어질 수 있음을 시사한다. 그러나 무리수는 "비", "통약 불가능성" 이외에도 극한 등의 여러 개념들이 복합적으로 얽혀있는 개념이다. 양의 측정을 통한 무리수의 연구는 앞으로 계속 연구되어야할 과제라고 생각된다.

참고문헌

강완 외(2001). **초등 수학 학습지도의 이해.** 양서원.

교육부(2000). **초등학교 교사용 지도서 수학 1-가.** 대한 교과서 주식회사.

교육부(2001). **수학 1-가.** 대한 교과서 주식회사.

교육부(2001). **수학 3-가.** 대한 교과서 주식회사.

교육부(2002). **수학 5-가.** 대한 교과서 주식회사.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Davydov, V. V. (1975), The psychological characteristics of the 'prenumerical' period of mathematics instruction. In L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in psychology of learning and teaching mathematics*(Vol.Ⅶ, pp.109-205). The University of Chicago Press.

Davydov, V. V. (1982). The psychological characteristic of the formation of elementary mathematical operations in children. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition & subtraction : A cognitive perspective*(pp.224-238), Lawlence Erlbaum Associates, Inc.

Davydov, V. V., & Tsvetkovich, Z. H.(1991), The object sources of the concept of actions. In V. V. Davydov (Ed.), *Soviet studies in mathematics education*(Vol.6, pp.86-147). National Council of Teachers of Mathematics.

Dewey, J., & McLellan, J. A. (1895), *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*, New York: D. Appleton company.

Dewey, J. (1986), Psychology of number, In J. A. Boydston (Ed.)(1972), *John dewey: The early works 1895-1898*(Vol.5, pp.424-429), Carbondale and Edwardsville: Southern Ill- inois University Press.

Dewey, J. (1898). Some remarks on the psychology of number. In J. A. Boydston (Ed.)(1972), *John dewey: The early works 1895-1898*(Vol.5, pp.177-354). Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Fine, H. B. (1896). Review of the psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic. In J. A. Boydston (Ed.)(1972), *John Dewey: The early works 1895-1898*(Vol.5, Appendices(xxiii-xxvii)), Carbondale and Edwardsville: Southern Illinois University Press.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D, Reidel Publishing Company.

Kolmogorov, A. N. (1973). Quantity. In A. M. Prokhoriv (Ed.), *Great Soviet encyclopedia.* New York: Macmillan.

Minskaya, G. I. (1975), Developing the concept of number by means of the relationship of quantities, In L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in psychology of learning and teaching mathematics*(Vol.Ⅶ, pp.207-261), The University of Chicago.

Moreno-Armella, L. E., & Waldeg, G. (2000), An epistemological history of numbers and variation. In V. J. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: an international perspective.* The Mathematical Association of America.

Toeplitz, O. (1963). *The calculus: A genetic approach.* The University of Chicago Press.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and language.* M.I.T Press.

The Educational Significance of the Method of Teaching Natural and Fractional Numbers by Measurement of Quantity

Kang, Heung Kyu (Hansung Science Highschool)
Ko, Jung Hwa (Seoul National University Graduate School)

In our present elementary mathematics curriculum, natural numbers are taught by using the a method of one-to-one correspondence or counting operation which are not related to measurement, and fractional numbers are taught by using a method which is partially related to measurement. The most serious limitation of these teaching methods is that natural numbers and fractional numbers are separated. To overcome this limitation, Dewey and Davydov insisted that the natural number and the fractional number should be taught by measurement of quantity.

In this article, we suggested a method of teaching the natural number and the fractional number by measurement of quantity based on the claims of Dewey and Davydov, and compare it with our current method.

In conclusion, we drew some educational implications of teaching the natural number and the fractional number by measurement of quantity as follows.

First, the concepts of the natural number and the fractional number evolve from measurement of quantity.

Second, the process of transition from the natural number to the fractional number became to continuous.

Third, the natural number, the fractional number, and their lower categories are closely related.

***key words: number concept, measurement of quantity, natural number, fractional number,**