대한수학교육학회지 <학교수학> 제 5 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.5, No.3, 343-360. Sep 2003

패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰

김 성 준*

초등수학에서 중등수학으로의 이행에서 대수는 중요한 역할을 한다. 그리고 학교수학에서 어떻게 대수를 도입하는가 하는 문제는 중등수학 전반에서 그 성공여부를 결정짓는 중요한 요소가 된다. 일반적으로 학교대수는 대수 기호를 형식적으로 도입하는 전통적인 접근법을 따르고 있다. 이것은 대수를 일반화된 산술이라는 관점에서 보는 것으로, 여기서 문제는 이러한 접근법에서 학생들이 많은 어려움을 경험한다는데 있다. 따라서 이 글은 이러한 어려움을 해결하기 위한 하나의 대안으로 형식적인 대수 지도 방법을 대신하여 패턴과 일반화 측면을 강조하여 대수를 지도하는 방법에 대해 살펴보고자 한다. 이것은 대수를 도입하는 다양한 관점 곧, 문제해결과 모델링, 일반화된 산술을 비롯하여 함수를 포함하며, 동시에 대수에 내재된 패턴을 통해 대수학습에서 핵심으로 다루어지는 일반화라는 사고 양식을 이끌어내기 위한 것이다. 이를 위해 이 글은 먼저 대수와 패턴, 일반화 사이의 관계를 살펴보고, 그리고 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법이 대수 수업의 실제에서 어떻게 제시될 수 있는가에 대해 살펴볼 것이다.

Ⅰ. 서론

학교 수학에서 산술적 사고와 대수적 사고는 초등 수학과 중등 수학을 대표한다. 그러나 산술적 사고와 대수적 사고를 구분하는 것은 쉽지 않으며, 이러한 상황에서 산술과 대수간의 이행은 초등과 중등 과정 사이에서 다루어져야 한다. 따라서 대수의 도입 문제는 산술과 대수, 초등과 중등 수학 사이에서 그 핵심에 놓여 있으며, 이것은 대수 교육을 개선하려는 선행 연구에서 중요한 주제로 다루어져 왔다. 이러한 연구들은 산술에서 대수로의 이행에서 비롯되는 어려움을 최소화하고, 초등에서 중등 수학으로의 이행을 원활하게 이끌어내기 위해 대수 도입의 문제를 다루고 있다.[1)]

이 글은 그 가운데 전통적인 대수 도입 곧, 대수 기호를 형식적으로 도입하는 방식을 대신하여 패턴과 일반화를 강조하는 대수 도입에 대해 살펴보고자 한다. 또한 전통적인 대수 도입 방식에서는 학생들 스스로 자신의 생각을 나타내고 이를 통해 대수적 사고에 대한 기반을 마련하기 어렵다는 점을 강조하고, 이러한 문제점을 개선하기 위한 노력으로 패턴과 일반화를 통해 사고 측면을 강조하는 대수 도입이 어떻게 가능한지에 대해 살펴볼 것이다.[2)]

---

* 서울대대학원(joonysk@dreamwiz.com)

1) 대수 도입과 관련된 논의는 일반화를 통한 도입, 문제 해결을 통한 도입, 모델링을 통한 도입, 함수적인 상황을 이용한 도입을 비롯해서 다양하게 제시되고 있다(Bendnarz 외 2인, 1996).

2) 대수 교육과정을 개선하려는 노력으로 패턴을 강조하는 접근은 현재 학교 대수에서 강조되고 있는 가장 중요한 변화 가운데 하나이며, 이러한 변화는 미국, 영국, 호주 등의 대수 교육과정에서 광범위하게 나타나고 있다(졸고, 2002, p.353).

이를 위해 먼저 대수에서 패턴과 일반화 측면이 왜 중요하며, 그리고 그 관계가 어떻게 해석되는지를 살펴볼 것이다. 대수 학습에서 패턴을 통한 일반화가 어떻게 진행되는지, 또한 이 과정에서 나타나는 어려움의 수준에는 어떠한 것이 있는지를 논의할 것이다. 그리고 대수 수업의 실제에서 중학교 1학년 학생들을 대상으로 패턴을 인식하고, 패턴에서 일반화를 이끌어내는 수업을 산술과 도형, 표 패턴으로 나누어 살펴볼 것이다. 먼저 산술에서 발견되는 패턴을 대수를 통해 일반화함으로써 구조 측면에서 대수를 학습하는 기회를 제공하고, 다음으로 점이나 도형 등의 시각적인 패턴을 일반화하기 위해 시각적인 표현을 수 패턴으로 연결할 것이다. 마지막으로 표와 대응에서 함수적인 관계와 규칙을 발견하고 이것을 식으로 일반화하는 수업을 통해 패턴의 일반화가 무엇을 의미하는지 살펴볼 것이다. 이 글에서 우리는 이러한 수업의 실제를 통해 구체적인 상황에서부터 패턴을 이끌어내고, 여기서 관계와 규칙을 인식하고, 이것을 일반화하는 것이 학교 대수에서 무엇보다 중요하게 다루어져야 한다는 점을 강조한다. 그리고 이를 통해 대수 수업이 형식적인 기호 조작이 아닌 일련의 사고와 추론 측면에서 동시에 진행될 수 있음을 논의한다.

II. 대수, 패턴과 일반화

대수에는 다양한 측면들이 있다. Usiskin (1988)에 따르면, 대수는 일반화된 산술, 문제해결을 위한 도구로 정의되며, 동시에 양들 사이의 관계를 연구하는 대수, 구조를 연구하는 대수로 파악된다. 그러나 대수 도입과 관련된 대부분의 연구는 일반화된 산술을 강조하고 있다 (Wagner & Kieran, 1999, p.362). 그리고 그 일반화는 문자 기호를 사용한 형식적인 대수의 도입으로 생각할 수 있다. 그러나 오늘날 대수 교육과정을 개선하려는 움직임에서 그 핵심에 놓여 있는 것은 대수를 양들 사이의 관계 곧, 패턴을 파악하고 여기서 파악한 규칙성을 일반화시키는 것이다. 이것은 대수 교육이 패턴과 일반화를 통해 이루어질 때 사고와 추론 측면이 동시에 부각될 수 있다는 믿음에서 비롯된 것이다. 다음은 대수 도입에서 패턴과 일반화를 강조하는 것이 대수에 내재되어 있는 패턴과 일반화라는 속성에서부터 자연스럽게 비롯될 수 있다는 점을 분명히 하기 위해, 대수와 일반화, 패턴과 일반화 사이의 관계를 살펴본 것이다.

1. 대수와 패턴

패턴은 대수를 포함한 수학의 여러 분야에서 강조되는 주제 가운데 하나이다. 오늘날 이러한 패턴의 중요성은 무엇보다 대수 교육과정을 개선하기 위해 강조되고 있다.[3] 특히 대수 영역에서 패턴에 기초한 대수 도입은 문자사용 측면에서, 대수의 도입 시기에 있어서, 그리고 일반성을 획득하는 방식에 있어서 기존의 대수 교육과정과는 많은 차이를 보이는데(졸고, 2002, pp.355-356), 이러한 차이로 인해 패턴과 일반화를 통한 대수 도입은 기존의 전통적인 대수 도입과는 분명하게 구분된다. 다시 말해 패턴을 파악하는 것은 주어진 패턴에 내재해

3) 오늘날 미국, 영국, 호주를 비롯한 각국의 대수 교육과정에서 패턴을 표현하고 관계 및 규칙을 강조하는 것은 전통적인 대수의 주제인 변수, 대수식, 방정식에 앞서 제시되고 있는데, 이것은 대수 교육과정에서 일반적인 원리로 인식되고 있다(Stacey & MacGregor, 2001, p.141).

있는 관계를 파악하는 것으로, 패턴과 일반화를 통한 대수 도입은 이러한 관계에서 규칙성을 이끌어내는 것을 목적으로 한다. 그리고 이런 점에서 형식적인 기호 조작과 그 규칙을 강조하는 기존의 대수 도입과는 구분된다. 따라서 학생들 스스로 사고하는 교육을 강조한다고 할 때, 패턴에 대한 인식은 대수적 사고의 중요한 요소로 부각될 수 있으며, 패턴을 통해 수를 표현하고 이것을 대상으로 파악하고 그 결과 문자를 이끌어내는 일련의 과정이 강조되어야 한다.

한편 패턴을 강조하는 대수 교육과정은 대수의 역사적 전개에서도 그 흔적을 찾아볼 수 있다. 초기 이집트와 그리스 시대의 경우, 대수는 기호가 아닌 주어진 조건 사이에서 관계를 인식하기 위해 나타났다(Moses, 1999, p.1). 그리고 대수에서 축약된 형태의 기호는 오랜 시간이 지나서야 등장했으며, 16세기에 비로소 대상을 나타내기 위한 문자가 도입되었다. 패턴에서부터 그 관계를 인식하고 규칙을 찾아내는 것은 대수의 역사적 전개에서 기호 이전 단계의 대수로 볼 수 있으며, 따라서 형식적인 기호 사용 이전에 패턴을 비롯하여 관계와 규칙을 찾는 것은 학교대수에서 오히려 자연스럽게 생각할 수 있을 것이다.

그러나 우리의 경우 대수와 패턴의 연결은 대수 도입 과정에서 자연스럽게 이루어지지 않고 있다. 7차 교육과정은 초등학교에서 다양한 형태의 패턴을 다루고 있으며, 중학교에서는 '문자와 식'을 통해 대수를 도입하고 있다. 우리의 초등수학 교과서는 다양한 영역에서 패턴을 강조하고 있지만, 그러나 이러한 패턴은 각각의 영역에서 단편적으로 다루어지고 있을 뿐 그 영역들간의 연결이 고려되지 않고 있다(졸고, 2002, p.363). 또한 이러한 패턴과 관계는 초등학교에서는 규칙성과 함수 영역에서 다루어지고 있기 때문에, 중학교에서 문자와 식을 학습하는 것과 그 연결이 이루어지지 않고 있다. 그 결과 학생들은 패턴을 인식하고, 패턴에서 발견한 관계와 규칙들을 대수 학습과 관련해서 생각하지 못하게 된다. 이것은 앞서 대수의 역사적 전개에서처럼 패턴과 그 관계에 대한 인식이 대수 학습의 출발점이 될 수 있다는 사실을 제대로 반영하지 못한 것이다. 대수에서 사고와 추론을 강조한다고 할 때, 대수는 패턴과 그 일반화를 통해 변수, 대수식, 방정식을 비롯한 학교 대수의 여러 주제들과 연결되어야 한다. 이 글은 이러한 가정에 근거하여 패턴의 일반화가 어떻게 대수 수업의 실제에서 구성되는지를 이후 논의를 통해 살펴볼 것이다.

2. 대수와 일반화

일반화는 수학의 여러 영역에서 사실상 그 핵심으로 다루어진다(Mason, 1996, p.81). 그리고 수학 학습의 목적으로 일반화가 강조되는 것은 수학 학습에서 이러한 일반화를 인식하는 것이 다양한 수학적 사고의 개발과 직접 또는 간접적으로 관련되어 있기 때문이다. 특히 대수는 이러한 일반화를 통해 표현되고 조작되는 언어 체계를 그 특징으로 한다. 다시 말해 대수는 동일한 과정을 반복하면서 설명할 때 좋은 도구가 되는데, 여기서 공식이 등장하며 일반화는 이러한 공식의 이론적인 근거가 된다. 따라서 대수에서 이러한 일반화를 거쳐 만들어진 공식들은 여러 형태의 문제를 한 번에 해결하게 하는 동시에 주어진 양 사이의 관계를 구조적으로 파악할 수 있게 한다.

한편 대수가 일련의 절차에 따라 과정에서 하나의 대상으로 진행되었다(Sfard & Linchevski, 1994)는 주장은 대수에서 일반화의 역할을

가능하는데 도움이 된다. 다시 말해 대수는 이 과정에서 일반성을 표현하고 조작하기 위해서 기호를 도입하게 되었으며, 따라서 대수적 이해를 과정에서 대상으로의 이행으로 생각해볼 때 일반화는 그 핵심에 놓이게 된다. 이와 같은 맥락에서, Mason(1996, p.65)은 일반화에 대한 인식이 보다 구체적으로 학생들에게 지도된다면 대수 학습이 보다 쉽게 이루어질 수 있다고 보았다. 이것은 대수 교육에서 일반화의 역할을 강조한 것으로, 일반화는 그 과정을 나타내면서 동시에 대상과 결과를 표현하는데 강력한 도구가 된다는 사실을 강조한 것이다.

Gattegno(1980)는 '인식'과 관련해서 의식성의 문제를 강조하는데, 그는 어떤 대상들의 조작을 가능하게 하는 의식에서부터 대수가 시작된다고 보았다(Mason, 1996, p.70, 재인용). 따라서 대수는 특수한 조건들을 제거하여 그것을 보다 일반적인 맥락 속에 놓거나 또는 특수한 것들과의 연결을 거쳐 과정과 대상이 어떻게 관련되고 일반화되는지를 파악하는 것이 중요하며, 이것은 대수 학습에서 일반화가 핵심에 놓여야 하는 이유가 된다.

이와 함께 대수 학습에서 일반화를 강조한다고 할 때, 우리는 일반화를 필요로 하는 이유를 정당화의 논리에서 찾을 수 있다. 이것은 일반화 과정과 그 결과에서 비롯되는 지식간의 관계를 분명히 하는 것으로, 일반화의 인식론적 역할에 대한 논의에 해당한다. 다시 말해 수학은 개연성이 아닌 확실성을 그 원칙으로 하고 있으며, 학교 수학 역시 이러한 확실성을 이끌어내기 위해 일반화를 통해 정당화의 논리가 다루어진다고 볼 수 있다. 대수에서 일반화의 과정은 이러한 측면에서 학교 수학과 연결되며,[4] 따라서 일반화를 통해 표현되고 조작되는 대수는 학생들에게 수학 학습에서 정당화의 논리를 개발하는 주제가 될 수 있다. 동시에 일반화에 대한 논의는 대수에서 사고와 추론 측면을 논의하는데 중요한 역할을 할 수 있다. 패턴의 일반화를 강조한 대수는 관계와 규칙을 정당화하는 과정에서 기존의 대수 교육과정과 구분되면서, 동시에 패턴에서부터 일반화를 통해 기호를 도입함으로써 이 과정에서 대수적 사고를 강조하는 것이다.

3. 패턴과 일반화: 패턴의 일반화 단계

패턴의 일반화는 패턴을 통해 과정을 표현하는 것이며, 여기서 대상과 구조를 파악하는 것이다. 따라서 산술 패턴, 시각적 패턴 및 함수적 패턴을 일반화하고 이렇게 일반화된 패턴을 정당화하는 것은 대수 도입에 있어서 새로운 관점을 제공할 수 있다. 특히 변수와 대수식 개념은 본질적으로 패턴의 일반화에서부터 시작될 수 있는데, 패턴을 일반화하는 과정은 그 자체가 하나의 대상으로, 이것은 구체적인 수가 아니라 그것을 대상으로 하는 일반적인 수에 관한 것이기 때문이다. 여기서 일반적인 수는 변수의 전-개념(pre-concept)으로, 그리고 이러한 일반적인 수들이 연산을 통해 표현되는 식은 대수식의 전-개념에 해당하는 것이다. 따라서 패턴의 일반화는 본격적인 대수 학습 이전이라 하더라도, 패턴을 인식할 수 있는 수준에서 다루어질 수 있으며, 이것은 이후 대수 학습에서 대수적 사고를 이끌어내는 출발점이 될 수 있다.

한편 대수에서 패턴의 일반화와 관련해서,

4) 우리는 이것과 같은 맥락에서 일반화를 강조한 연구 가운데 '모든 일반화는 정당화를 위한 것이다'와 '일반화의 토대가 되는 논리적 근거는 결론을 정당화하는 것이다'라는 주장을 볼 수 있다(Radford, 1996, p.111; Wheeler, 1996, p.321).

많은 선행 연구들은 일반적으로 알려진 것보다 더 일찍 대수적 추론이 가능하다는 연구 결과를 제시하고 있다. 또한 이러한 패턴의 일반화를 통해 이후 대수로의 원활한 이행이 가능하며 동시에 기본 산술에 대한 이해를 이끌어낼 수 있다는 점을 강조한다. 이러한 논의의 예로 산술에서 대수로의 일반화 곧, 수의 연산에서 다루었던 성질을 일반화하는 연구를 생각할 수 있다(Carpenter & Frank, 2001, p.155). 이 연구는 초등학생이 어떻게 대수적 추론을 발달시키는가 하는 물음에 대하여 그 답을 어떻게 패턴에서 산술의 기본 성질들을 일반화하고 그것들을 정당화하는가와 관련해서 논의하고 있다.

다음 <표 Ⅱ-1>은 패턴의 일반화 단계를 4단계로 나누어 살펴본 것이다. 이것은 패턴이 주어지면서 일반화를 위한 출발점이 되는 단계, 일반화를 형성하는 단계, 패턴을 명확하게 하는 단계, 그리고 이러한 일반화에 대한 정당화 단계로 구분된다(Friedlander & Tabach, 2001, p.255).

한편 <표Ⅱ-1>과 같이 패턴을 일반화하는 단계에서는, 각 단계에서 또는 단계와 단계 사이에서 여러 가지 어려움이 발생할 수 있는데, 우리는 그 어려움을 세 가지 수준으로 구분할 수 있다. 그 수준은 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준(Lee, 1996, p.105)으로 구분되데, 먼저 주어진 패턴에서 그 패턴이 의도하있는 내용을 파악하느냐 못하느냐 하는 것 인지 수준에서 일어나는 어려움으로, 이것 주로 <표Ⅱ-1>의 1단계에서 그리고 2단계로 어가는 과정에서 일어난다. 다음으로 패턴 일반화하기 위해서는 그 패턴을 언어 형태 명확히 인식하고 표현하는 것이 요구되는 이것은 언어화 수준에서 학생들이 경험하는 려움에 해당한다.

이것은 <표Ⅱ-1>의 2단계에서 3단계로 넘가는 과정에서 그리고 3단계의 전반부에서 타난다. 마지막으로 이렇게 언어화된 패턴 기호 등을 이용한 대수적 표현으로 패턴을 반화해서 나타내는 과정이 요구되는데, 이것 학생들이 기호화의 수준에서 경험하는 어려으로 3단계 후반부에서 그리고 4단계에서 나난다. 이러한 패턴의 일반화 단계에서 비롯는 어려움은 전통적인 대수 교육과정에서처 다양한 형태로 나타날 수 있다. 그러나 우리 이러한 패턴의 일반화가 학생들로부터 대수 사고를 이끌어내고, 이를 통해 대수를 형식인 조작이 아닌 사고와 추론 측면에서 학습다는 점에서 전통적인 대수 교육과정과의 차를 생각해볼 수 있다.

<표Ⅱ-1> 패턴의 일반화 단계

1단계	시작하는 단계	특별한 예가 학생들에게 주어지거나 또는 그들 스스로 이러한 예들을 만든다.
2단계	일반화를 형성하는 단계	주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결한다, 그리고 이를 통해 일반화를 생각하게 된다.
3단계	일반화를 명확하게 하는 단계	관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다.
4단계	정당화의 단계	일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다.

Ⅲ. 패턴과 일반화를 강조한 대수 수업의 실제

대수 도입을 패턴에서 시작하여 이를 일반화하는 것은 수학의 구조적 측면에 대한 이해를 바탕으로 한다(Warren, 2001, p.634). 수학에서 그 구조를 안다는 것은 수학적 대상들의 집합을 이해하는 것으로, 다시 말해 대상들 간의 관계와 이러한 대상들의 성질을 이해하는 것을 의미한다. 그리고 이러한 패턴은 대수를 시작하기 이전 단계인 초등 수학에서부터 다루어지고 있으며, 중학교에서 산술, 시각적 패턴, 함수적 상황 등에서 반복되는 학습을 통해 귀납적 일반화를 하면서, 이러한 일반화를 통해 패턴과 그 관계를 이해할 수 있게 된다. 그러나 문제는 이러한 다양한 패턴에서 비롯된 지식을 명확하게 인식하지 못한 상태에서 대수를 학습하는데 있으며, 따라서 이러한 상태에 있는 지식들을 올바르게 구조화, 형식화하는 것은 대수 학습에서의 제대로 이루어지지 않고 있다.

무엇보다 패턴에서 그 관계와 규칙성을 발견하는 것에서 시작하여 추상화된 구조를 학습하는 것은 일반화를 학습하기 위한 전제조건이 된다. 그리고 대수적 사고는 다양한 패턴 상황에서 비롯된 수치적 관계를 이해하고, 이러한 관계를 언어 수준에서 기술하고 문자를 통해 표현함으로써 구체화될 수 있다.[5] 따라서 대수에서의 일반화는 산술에서 다루었던 다양한 형태의 패턴을 간결하고 통합적으로 제시하면서 시작될 수 있다. 다음에서 우리는 이러한 대수에서의 일반화를 산술에서 발견되는 패턴, 시각적 형태에서 발견되는 패턴, 함수적 상황에서 발견되는 패턴을 구분하여 살펴볼 것이다.

1. 산술에서 발견되는 패턴을 일반화하기

대수 도입에서 일반화 과정은 정당화 과정이며, 산술에서의 패턴을 일반화하는 것은 대수로의 이행에서 그 과정과 결과를 동시에 보여준다는 점에서 효과적이다. 먼저 산술에서 발견되는 패턴을 대수 도입에서 일반화하기 위해 '큰 수'를 도구로 해서 살펴볼 것이다. 큰 수는 그것들이 즉각적인 산술 조작으로 계산되지 않는다는 점에서 그리고 계산기를 사용해서 계산할 수 있는 범위를 벗어난다는 점에서 어느 정도 추상적인 대상으로 볼 수 있는 반면, 다른 한편으로 그것들은 실제로 어떤 특정한 수라는 점에서 그리고 계산 과정에서 다루어진다는 점에서 보면 구체적이다(Zazkis, 2001, p.676). 따라서 이러한 두 가지 특성을 고려해 볼 때, 큰 수는 산술적 사고와 대수적 사고를 연결하는 좋은 도구가 될 수 있다. 다음에서 우리는 대수 학습에서 산술 패턴을 통한 구조적인 통찰이 어떻게 일반화와 연결되고 표현되는지를 두 단계로 나누어 살펴볼 것이다.

가. 산술에서 대수적 표현으로 일반화하기

먼저 다음과 같은 문제를 생각해보자.

<문제> 2 · 3, 3 · 4, 4 · 5 …에서 100번째 수는 무엇인가? 그리고 n번째는 무엇인가?

우리는 위의 값들을 계산하여 6, 12, 20, 30, 42, …가 된다는 사실로부터, 그 차가 일정하게 증가하는 수열 패턴임을 알 수 있다. 그러나 이러한 계산에서부터 100번째 값을 구하는 것

5) 이 과정은 앞서 패턴의 일반화 단계에서 파악되는 어려움의 각 수준을 반영한 것으로 각각은 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분해서 생각할 수 있다.

은 쉽지 않다. 다시 말해 100번째 값은 또 다른 사실 곧, 곱해지는 두 수가 어떻게 결정되는지를 문제에서 찾아야만 구할 수 있다. 다음은 'n번째는 무엇인가'에 대한 답을 이끌어내기 위한 수업의 일부이다.[6)]

교사: 이 문제(n번째는 무엇인가)를 해결할 수 있겠니?
학생: 이것이 무엇을 의미하는지 잘 모르겠어요.
교사: 첫 번째, 두 번째, 세 번째 등에서 그 값을 구하듯이 n을 먼저 어떤 수라고 생각해보렴. 예를 들어, n이 50이라면 50번째는 어떤 값이 되겠지.
학생: 그렇다면 그 답은 각각의 수에 따라 결정되겠군요.
교사: 그렇지. 이제 n의 값에 따라 결정되는 표현을 생각해봐. n번째는 어떻게 나타낼 수 있겠니?
학생: 글쎄요. 어떻게 해야 할지 아직 모르겠어요.
교사: 좋아. 그렇다면 먼저 n이 100일 때부터 살펴보자. n이 100이면 100번째 값은 어떻게 되지.
학생: 그러니까 그 값은 10,100이 되요. 아니 잠깐만요. 다시 생각해보니까 그건 10,302가 되는데요.
교사: 좋았어. 너는 어떻게 그 값을 구했니?
학생: 처음엔 100 · 101인 줄 알았거든요. 그런데 가만히 보니까 101 · 102를 계산해야 되요.
교사: 그렇다면 만약 n이 187이라면 187번째 값은 어떻게 되겠니?
학생: 그러면 188 · 189가 되겠죠. 계산하면 35,532가 되는군요.
교사: 187번째 값을 계산하지 말고 그냥 어떤 식으로 표현되는지에 주목하렴. 예를 들어, 3100이 n의 값이라면 넌 어떻게 하겠니.
학생: 3100 이면 계산이 안 되잖아요. 그러면 계산하기 전에 썼던 것처럼 그 수에다 1을 더하고 다시 1을 더 더한 수를 곱하면 되나요. 그래요. 그 수를 계산하면 답이 되겠군요.
교사: 좋아. 그렇다면 그 표현을 한 번 써보렴.
학생: 그러니까 이렇게 되겠죠. 3100+1 × 3100+2, 맞나요?
교사: 좋아. 이제 그렇다면 넌 이제 n인 경우, 그러니까 n번째에 대해서도 이런 식으로 표현할 수 있겠지.
학생: 그렇다면 혹시 n번째는 n에다 1을 더하고 다시 거기다 1을 더하니까 n에다 2를 더한 수를 곱한 걸 의미하나요? 그걸 나타내면 이렇게 n+1 × n+2 되나요?
교사: 좋아. 넌 이제 수 패턴에서부터 일반화된 식을 구했단다. 이제 이 식에서부터 너는 어떤 순서에 있는 값이든 구할 수 있단다.

위의 대화에서 학생은 패턴을 분명히 인식하고 있음에도 불구하고 그것을 대수적인 표현으로 나타내는 과정은 어려워하고 있다. 그리고 패턴을 표현하기보다 산술에서 익숙한 계산을 이용해서 그 답을 나타내려는 경향을 보인다. 이것은 패턴을 대수적 표현으로 나타내는데 장애가 된다. 여기서 큰 수는 산술에서 대수로 넘어가는 이행에서 인식한 패턴을 산술 계산에 의존하려는 경향에서 벗어나도록 하는데 도움을 준다. 학생들은 대수적 표현인 $(n+1)\times(n+2)$를 $(3100+1)\times(3100+2)$에서부터 직접 유도할 수 있다. 따라서 '큰 수'와 같은 도구의 적절한 사용은 산술 패턴에서부터 대수적 표현을 이끌어내는데 도움이 되며, 이를 통해 패턴의 구조를

6) 여기서 제시된 문제와 대화는 Zazkis(2001, pp.677-678)의 실험 연구에서 인용한 것이다. 그의 연구에서는 예비교사를 대상으로 하고 있으나, 우리의 경우는 중학교 1학년 '문자와 식'에서 심화 과정으로 이와 같은 내용을 다룰 수 있을 것이다.

파악하는데 결정적인 역할을 한다. 이처럼 패턴을 통한 일반화에서 주된 문제는 그 패턴을 보는 것이 아니라, 그것을 유용한 대수적 표현으로 나타내는 것이며, 여기서 사용된 큰 수는 이러한 대수적 표현을 이끌어 내기 위한 중간 단계에서 산술 과정과 대수 결과를 동시에 나타내기 위해 효과적으로 사용될 수 있다.

나. 계산에서 산술 구조로 그리고 대수 구조로 일반화하기

Zazkis & Campbell(1996)은 예비 교사와 학생을 대상으로 한 실험연구에서, 예비 교사들도 학생들과 마찬가지로 문제를 해결하기 위해 주어진 형태를 파악하기보다 그것들을 계산하려는 경향이 있다는 사실을 확인하였다(Zazkis, 2001, p.678, 재인용). 예를 들어, 예비 교사들에게 $M=3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$을 주고, M이 7로 나누어지는지를 조사하였더니, 그 결과 몇몇 참가자들은 M의 값을 계산하여 4725임을 확인하고 다시 그것을 7로 나누어 답을 하는 것을 볼 수 있었다. 한편 다른 예비 교사들은 M의 소인수분해에서 제시된 7을 보고 즉각적으로 7로 나누어진다는 답을 하였으나, 그러나 그들 역시 M이 63으로 나누어지는가, 또는 21, 15처럼 소인수분해에서 직접 나타나지 않는 수를 제시할 경우에는 앞서 M의 값을 계산했던 것처럼 이를 계산해서 답을 했다. 그리고 이러한 경향은 학생들의 경우 더욱 자주 나타나는데, 이것은 익숙한 산술 계산에 의존하려는 경향에서 비롯된다.

'큰 수'는 이러한 문제에서 또한 효과적으로 사용될 수 있다. 다음 대화에서 등장하는 학생은 M이 7로 나누어진다는 사실을 소인수분해에서부터 쉽게 파악했으나, M이 15로 나누어질 수 있는지에 대해서는 주어진 값을 계산하려 하였다. 우리는 산술 구조에서 파악되는 패턴을 대수 구조에 적용하기 위한 중간 단계로 다음과 같은 학생과 교사간의 대화를 생각해 볼 수 있다.[7]

교사: 너는 M이 7로 나누어진다는 사실을 쉽게 알 수 있지.
학생: 예. 7은 M의 소인수 가운데 하나거든요.
교사: 그렇다면 M이 15로 나누어질 수 있겠니?
학생: 그건 계산기로 계산을 해봐야 할 것 같은데요. 계산하면 4725가 되고, 이것을 15로 나누면 315가 나오니까. 나누어지는데요.
교사: 자. 여기서 너는 네가 가진 계산기를 이용해서 M이 15로 나누어진다는 사실을 확인할 수 있었지. 그렇다면 이제 다른 수에서는 어떻게 할지 한번 생각해보자. 이제 B라는 수를 $3^{30} \cdot 5^{20} \cdot 7$로 생각해보자. B는 15로 나누어지는지 어떻게 확인할 수 있을까?
학생: (계산기를 사용하려다 멈춘 뒤) 이건 계산기로 할 수 없는데요. 어떻게 하죠?
교사: 그렇다면 넌 계산기를 사용하지 않고 답을 구하는 것이 불가능하다고 생각하니?
학생: 글쎄요. 컴퓨터나 아니면 좀더 시간이 주어진다면 가능할 수도 있겠죠. 아 잠깐만요. 15는 3곱하기 5니까, B에서 보면 여기 3이 있고 또 여기 5가 있으니까, 그러니까 B는 이 둘을 곱해 놓은 15로 나누어질 수 있을 것 같아요.
교사: 맞았어. 그렇다면 B는 63으로도 나누어지겠니?
학생: 잠깐만요. 63은 9곱하기 7이니까, 그리고 9는 3곱하기 3, 그런데 B에는 두 개의 3과 7이 하나 있어요. 그렇다면 B는 63으로 나눌 수 있

7) 여기서 제시된 문제와 수업에서의 대화는 Zazkis(2001, p.679)의 실험 연구에서 인용한 것이다. 이것은 우리의 중학교 수준에서는 실제로 적용하기 어렵겠지만, 대수에서 그 구조를 살펴볼 수 있다는 점에서 이와 같은 주제를 심화수준 등을 통해 생각해보는 것은 의미 있을 것이다.

겠군요.
교사: 좋아. 그러면 다시 앞으로 돌아가서 M(=33 · 52 · 7) 역시 63으로 나누어진다는 사실을 계산하지 않고도 확인할 수 있겠지.
학생: 예. B에서처럼 똑같이 하면 되는 것 아닌가요. M 역시 두 개의 3이 있고 7이 하나 있으니까, 그러니까 63으로 나눌 수 있어요.

우리는 위의 대화에서 수치적 계산에서부터 벗어나 산술 구조를 볼 수 있는 안목을 기르는 과정을 살펴볼 수 있다.

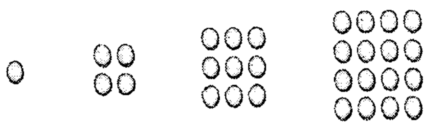
그리고 이렇게 파악된 구조는 대수적 표현에서도 같은 맥락에서 적용될 수 있을 것이다. 곧, 교사가 목적으로 하는 것이 $A=px \cdot qy \cdot rz$에서 이 수 A가 $a \leq x$, $b \leq y$, $c \leq z$ 인 조건에서 $pa \cdot qb \cdot rc$ 나누어질 수 있음을 보이고자 한다면 위의 대화는 이러한 대수 문제를 효과적으로 해결하는 좋은 예가 될 것이다. 그러나 이러한 산술 구조에서부터 대수 구조로의 일반화는 산술에서 익숙하게 해온 계산에서부터 직접 이끌어내기에는 어려움이 있다. 따라서 이러한 이행을 원활하게 하기 위한 중간 단계로서 큰 수를 이용한 산술 패턴은 산술처럼 보이지만 사실 대수와 다름없이 작용한다는 점에서 그 가치가 있다. 그리고 여기서 우리는 작은 수 M에서 큰 수 B로의 이동을 단순히 수의 대소가 아닌 궁극적으로 수의 구조에 대한 이해와 관련해서 생각해볼 수 있다.

이와 함께 우리는 산술 패턴에서부터 시작하여 산술 구조와 대수 구조가 어떻게 연결되는지, 그리고 패턴의 일반화와 함께 대수 구조를 파악하는데 일반화가 어떤 역할을 하는지 보다 효과적으로 논의할 수 있다.

2. 시각적 형태에서 발견되는 패턴을 일반화하기

다음은 7차 교육과정에서 중학교 7-가 교과서에 제시된 문제 가운데 하나이다(이준열 외 4인, p.93).[8] 이 문제는 '문자와 식' 단원 가운데 규칙성을 표현하는데 문자가 어떻게 사용되는지를 확인하기 위한 것이다.

다음 그림은 사각형 모양으로 바둑돌을 규칙적으로 늘어놓은 것이다. 첫 번째 사각형의 가로에는 바둑돌이 1개, 두 번째는 2개, 세 번째는 3개, 네 번째는 4개이다.



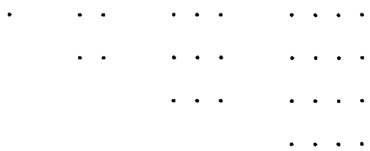
(1) n 번째 사각형의 가로에는 바둑돌이 몇 개 있는가?
(2) n 번째 사각형에는 바둑돌이 모두 몇 개 있는가?

우리는 이러한 다각(형)수를 포함한 도형 패턴을 일반화하고, 이것을 대수적 표현으로 연결하는 수업을 다음과 같이 구성해보고자 한다. 이러한 시각적 패턴을 일반화하는 수업 모형은 중학교 7-가 단계 '문자와 식' 단원에서

8) 이와 비슷한 유형의 문제는 초등학교에서 규칙성을 이용한 문제 푸는 방법 찾기에서 다루고 있다(초등학교 3-나, p.110/ 초등학교 4-가, p.112/ 초등학교 5-가, p.129). 그리고 중학교 7-가의 다른 교과서(강행고 외 9인, p.115)에서도 '좀 더 알아보기'를 통해 다루어진다.

또는 그 심화 과정에서 생각해볼 수 있을 것이다.[9)]

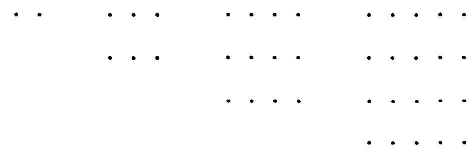
<패턴 1>



교사: 다섯 번째 사각형에서 가로에는 몇 개의 점이 있겠는가?
학생: 5개입니다.
교사: 그렇다면 다섯 번째 사각형에서 점은 모두 몇 개 있겠는가?
학생: 가로에 5개, 세로에도 5개니까, 모두 25개의 점이 있습니다.
교사: 이제 그렇다면 보다 큰 경우를 생각해보자. 100번째 사각형에는 점이 몇 개 있을까?
학생: 마찬가지로 가로에도 세로에도 모두 100개씩 점이 있으니까, 100×100, 그러니까 10,000개의 점이 있습니다.
교사: 좋아요. 그렇다면 n번째 사각형에서 가로에는 몇 개의 점이 있겠는가?
학생: 역시 n개가 있을 것 같습니다.
교사: 이제 너는 n번째 사각형에 있는 점의 개수를 계산할 수 있겠니?
학생: 앞서 했던 것처럼 하면, n번째 사각형에는 모두 n×n개의 점이 있을 것 같습니다.
교사: 맞았어요. 이제 네가 만든 식에서 n대신 각각의 값을 대입하면 몇 번째 사각형이든 상관없이 각각에서 모든 점의 개수를 구할 수 있겠지.

<패턴1>과 같은 형태는 초등학교 3, 4학년부터 교과서에서 삼각수를 비롯한 다각(형)수에서 규칙성을 찾는 문제로 다루어지고 있다. 학생들은 위에서 제시한 점 패턴에서 점의 개수가 작은 경우부터 시작하여 가로, 세로의 점의 개수를 세어 나가면서 전체 점의 개수를 파악한다. 학생들은 처음 주어진 도형 패턴을 수 형태로 정리해서 나타내고, 그리고 이러한 패턴을 일반화해서 대수식으로 나타낸다. 여기서 중학교 1학년 학생들은 '문자와 식' 단원을 학습하면서 문자를 미지수로 보는 경향에서 벗어나 문자를 변수 개념으로 파악할 수 있게 된다. 다음으로 두 번째 패턴을 통해 이러한 시각적 패턴에서의 일반화를 확인하고 그리고 이들 패턴간의 관련성에 대하여 살펴보자.

<패턴 2>



교사: 자. 이제 두 번째 패턴을 살펴봅시다. <패턴1>은 정사각형이라서 계산하기가 수월했지만 이제 살펴볼 패턴은 직사각형 패턴입니다. 역시 같은 질문으로 시작해볼까요. 다섯 번째 사각형에서 가로에는 몇 개의 점이 있는가?
학생: 5개입니다. 아니. 6개가 답입니다.
교사: <패턴1>과는 다소 차이가 있다는데 주목하세요. 그렇다면 다섯 번째 사각형에서 세로에

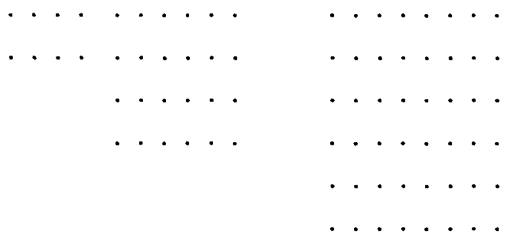
9) 여기서 제시된 패턴 1, 2, 3은 Lee(1996. p.97)에서 인용한 것으로, 수업에서 제시된 교사와 학생 간의 대화는 패턴을 일반화하는 Lee(1996, pp.97-100)의 설명에 근거해서 이 글에서 가상적인 수업 형태로 구성해 본 것이다. 이 수업은 중학교 1학년 학생을 대상으로 하고 있으며, '문자와 식'의 학습에서 또는 그 심화과정으로 다루기 위해 구성한 것이다. 중학교

는 몇 개의 점이 있을까?
학생: 세로에는 5개가 있습니다. 그렇다면 5번째 사각형에는 모두 20개의 점이 있겠군요.
교사: 좋아요. 이제 다른 경우를 생각해봅시다. 먼저 100번째 사각형에서 가로의 점과 세로의 점을 구해보세요.
학생: 가로에는 101개의 점이 있고, 세로에는 100개의 점이 있습니다.
교사: 맞았어요. 그렇다면 100번째 사각형에는 모두 몇 개의 점이 있을까?
학생: 101×100이니까, 모두 10,100개의 점이 있습니다.
교사: 좋아요. 그렇다면 마찬가지로 n번째 사각형에서 가로, 세로의 점을 생각해보고 모두 몇 개의 점이 있는지 알 수 있겠니?
학생: 가로에는 n+1 개가, 그리고 세로에는 n개가 있을 것 같습니다. 그러니까 이것을 식으로 나타내면 $(n+1) \times n$이 되겠군요.
교사: 이제 <패턴1>과 <패턴2>를 한 번 비교해볼까? <패턴1>과 <패턴2>를 잘 살펴보면 둘 사이의 관련성을 발견할 수 있는데, 그게 무얼까?
학생: 글쎄요. 잘 모르겠습니다.
교사: 자. 그렇다면 <패턴1>의 두 번째와 <패턴2>의 첫 번째를 비교하면, 한 줄이 줄어든 걸 알 수 있죠. 다른 것들도 한 번 비교해보렴.
학생: 잠깐만요. 정말 그러네요. <패턴1>에서 두 번째, 세 번째, 네 번째 모두 한 줄씩 지우니까 <패턴2>의 첫 번째, 두 번째, 세 번째가 나오는데요.
교사: 좋아요. 그럼 <패턴2>의 100번째 사각형의 점의 개수를 <패턴1>을 이용해서 어떻게 하면 구할 수 있을까?
학생: 그러니까 <패턴1>의 101번째 사각형에서 한 줄을 없애니까, $101 \times 101-101$ 하면 되지 않을까요.
교사: 맞았어요. 마찬가지로 <패턴2>의 n번째 사각형도 이런 방식으로 구할 수 있을까?
학생: 그러니까 <패턴2>의 n번째 사각형은 <패턴1>의 n+1번째 사각형에서 한 줄을 없애는 거니까, 그렇다면 점의 개수는 $(n+1)\times(n+1)-(n+1)$ 하면 되겠네요.
교사: 좋아요. 그렇다면 조금 전에 구한 $(n+1)\times n$과 방금 구한 $(n+1)\times(n+1)-(n+1)$에서 n에 같은 수를 넣어 보세요. 그리고 그 결과를 한 번 비교해보세요. 어떤가요?
학생: n에 2를 넣으면, 3×2, 그리고 $3\times3-3$이니까 둘 다 6, 두 번째 사각형의 점의 개수는 6개 맞네요... 그렇다면 5를 넣으면, 5×4, $5\times5-5$ 가 되니까 둘 다 20, 같습니다.
교사: 좋아요. 우리는 이제 하나의 패턴에서 n번째 사각형의 점의 개수를 구하고, 그것을 앞서 구한 다른 패턴과 관련해서 구하는 방법을 배웠습니다.

<패턴2>는 첫 번째 패턴에 비해 난이도가 높아진 경우이다. 그러나 이 경우 역시 직사각형에서 결국 가로와 세로의 점의 개수를 파악한다면 문제는 마찬가지로 해결된다. 여기서 먼저 사용되는 방법은 앞서 <패턴1>과 동일한 방식이 적용된다. 학생은 작은 경우부터 시작하여 보다 큰 경우, 그리고 이러한 패턴의 규칙을 일반화하여 대수식으로 표현한다. 그러나 실제로 <패턴2>에서 중요하게 다루어야 할 부분은 앞서 다루었던 패턴과 연관지어 생각하는 부분이다. 직사각형과 정사각형 형태의 패턴을 관련지어 생각하는 것은 첫 번째 방법이 다소 산술 계산에 치우친 것이었다면, 이것은 산술적 사고 과정에서 벗어나 각각의 패턴을 하나의 대상으로 파악하고 비교하는 대수적 사고를 요구하는 것으로, 학생들은 이를 통해서 패턴 간의 패턴 곧, 보다 높은 수준에서 패턴을 파악할 수 있게 된다. 또한 <패턴2>에서 이러한

패턴간의 관계를 통해 대수식에서의 동치를 파악할 수 있게 되고($(n+1)\times n=(n+1)\times(n+1)-(n+1)$), 이것은 이후 대수 학습에서 다루어질 내용이다. 다음 <패턴3>은 <패턴1>의 방법으로 해결하기 어려운 경우, <패턴2>에서 다루었던 패턴간의 관계를 다시 한번 적용해보기 위해 제시될 수 있다.

<패턴 3>



교사: 자. 이제 세 번째 패턴을 살펴봅시다. 세 번째 패턴은 조금 더 복잡한 형태입니다. 먼저 다섯 번째 사각형에서 가로와 세로의 점을 구해봅시다. 각각 몇 개씩 있습니까?

학생: 첫 번째 사각형에는 4개, 2개, 두 번째는 6개, 4개, 세 번째는 8개, 6개... 그렇다면 네 번째는 10개, 8개이고 다섯 번째는 12개, 10개일 것 같습니다.

교사: 좋아요. 다섯 번째 사각형에서 모두 12×10, 그러니까 120개의 점이 있습니다. 다음은 마찬가지로 100번째 사각형의 점의 개수를 구해 봅시다. 가로와 세로의 점의 개수를 구할 수 있습니까?

학생: 어려운데요. 어떻게 해야 되죠.

교사: 그렇다면 앞서 구한 패턴을 한 번 이용해볼까요. 그러니까 <패턴2>와 <패턴3>을 한 번 비교해보세요. <패턴3>은 <패턴2>를 어떻게 하면 만들 수 있을까요. 잘 살펴보세요.

학생: 글쎄요. 잘 모르겠습니다.

교사: 자. 그렇다면 <패턴3>에서 각각의 사각형을 이렇게 네 부분으로 나누어 보세요. 어때요. 두 번째 패턴과 어떤 관계가 있는지 알 수 있나요.

학생: 잠깐만요. 그러니까 <패턴3>의 첫 번째는 <패턴2>의 첫 번째에 4를 곱하면 되고, 두 번째도, 세 번째도 모두 <패턴2>의 사각형을 4배씩 하면 됩니다.

교사: 좋아요. 그럼 <패턴3>의 100번째 사각형의 점의 개수는 어떻게 하면 구할 수 있을까?

학생: 그러니까 두 번째 사각형의 100번째가 10,101이니까, 여기다 4를 곱하면 40,400이 되겠군요.

교사: 맞았어요. 마찬가지로 <패턴3>의 n번째 사각형도 이런 방식으로 구해보세요.

학생: 한 번 해 볼께요. <패턴2>의 n번째 사각형이 $(n+1)\times n$이니까 여기다 4를 곱해서 $4\times(n+1)\times n$일 것 같습니다.

교사: 좋아요. 이제 어떤 형태의 점 패턴이 나와도 첫 번째 방식처럼 작은 수부터 차례대로 구하든지 아니면 단순한 패턴을 이용한 두 번째 방식을 사용하면 n번째 사각형의 점의 개수를 구할 수 있겠죠.

<패턴3>은 <패턴1>에서 적용한 방법으로는 패턴 사이의 규칙성을 쉽게 파악하기 어렵다. 이것은 무엇보다 각각의 앞 뒤 관계에서부터 가로와 세로의 점의 개수가 어떻게 증가하는지 파악한다 하더라도, 큰 경우에서는 직접 점의 개수를 파악하기 어렵기 때문이다. 이러한 경우 <패턴2>에서처럼 패턴 사이의 관계에서 규칙을 발견하는 방법을 이용하면 문제를 효과적으로 해결할 수 있다. 그리고 학생들은 패턴들 사이의 관계에서 규칙을 발견하고 이를 일반화 함으로써, 패턴들 내부에서 패턴을 결정짓는 요소들을 파악하는 동시에 그들 사이의 일반성을 파악할 수 있게 된다.

우리는 위의 세 가지 형태의 시각적 패턴에서 산술 패턴에서처럼 학생들이 그 값을 먼저 계산하려는 경향이 있음을 살펴볼 수 있었다. 그리고 이러한 경향은 작은 경우(다섯 번째 사각형)부터 시작하여 큰 경우(100번째 사각형)에서도 여전히 나타나는데, 앞서 사용했던 '큰

수'는 이러한 상황에서도 역시 유용한 도구로 사용될 수 있을 것이다. 그리고 산술적 사고에서 진행되었던 계산을 위주로 하는 인식에서부터 벗어나, 패턴을 일반화시켜 하나의 대상으로 파악하고(패턴2), 그것들 사이의 관계를 통해 구조를 파악함으로써(패턴3), 대수 학습에서 일반화를 통해 대수적 사고를 이끌어낼 수 있을 것이다.

3. 함수적 관계에서 발견되는 패턴을 일반화하기[10]

우리는 패턴에 기초한 일반화 접근을 함수적 관계에 적용하기 위해 다음 표를 통해, 산술적 사고에서 대수적 사고로의 일반화가 어떻게 진행되는지를 살펴보고자 한다.

다음 질문은 표 1, 2, 3에서 동일하게 제시되는 것으로[11], 여기서 제시된 질문들은 표에서 제시된 구체적인 수치에서부터 시작하여, 표에 제시되지 않은 큰 수에서 관계를 생각해보고, 그리고 이것을 언어로 표현하고, 마지막으로 대수식을 이용해서 어떻게 일반화가 이루어지는지를 살펴보기 위한 것이다.

1. 표에서 구체적인 수치를 통해 알아내는 패턴과 관계들은 무엇인가?
2. 표에서 보다 일반적인 경우에 앞서 찾아낸 관계들을 확장할 수 있는가?
3. 일상 언어를 이용해서 이러한 패턴, 관계, 규칙 등을 설명할 수 있는가?
4. 이러한 패턴, 관계, 규칙 등을 대수식을 이용하여 표현할 수 있는가?

<표1>

x	y
1	5
2	6
3	7
4	8
5	…
6	10
…	…

<표2>

x	y
3	9
5	15
9	27
13	…
21	63
…	…

<표3>

x	y
0	2
1	5
2	8
3	11
4	14
5	…
…	…

먼저 <표1>에서 중학교 1학년 학생을 대상으로 해서 '함수' 단원에서 다음과 같은 가상 수업을 심화 과정으로 구성할 수 있으며,[12] 이를 통해 우리는 대응 패턴에서 규칙을 발견하고 일반화하는 과정을 살펴볼 수 있다.

교사: 자. 먼저 x가 2일 때, y는 얼마인가?
학생: 6입니다.
교사: 그렇다면 표에서 x가 5일 때, y는 얼마인가?
학생: 8에 1을 더하니까, 9입니다.
교사: 좋아요. 이제 표에서는 제시되어 있지 않은 값들을 생각해봅시다. 만약 x가 800이라면, 그 때 y는 얼마인가?
학생: (y 값들만을 비교하면서, 쉽게 답을 구하지 못한다.) x가 799일 때의 y 값에 1을 더하면

10) 외국의 경우 대수는 우리의 문자와 식 영역과 규칙성과 함수 영역을 포함한다. 이에 비해, 우리는 대수와 함수를 구분하여 제시하고 있다. 그러나 초등수학 교과서에서는 이 두 영역이 '문제 푸는 방법 찾기'에서 함께 제시되어 있으며, 이 글은 초등수학에서의 이러한 경험을 토대로 하여 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법을 다루고 있다.
11) 이 글에서 제시된 표와 질문 목록은 Stacey & MacGregor(2001, p.143)의 연구를 수정해서 인용한 것으로, 이를 통해 중학교 1학년 학생들이 함수적 상황에서 주어진 패턴을 어떻게 일반화하는지를 논의한 것이다.
12) 중학교 1학년 '함수' 단원에서 배우는 내용은 정비례와 반비례로 제한되어 있다. 따라서 학생들에게는 오히려 <표2>가 교과서에서 쉽게 만날 수 있는 형태이다. 그러나 이 글은 함수의 학습을 목표로 하는 것이 아니라 이러한 대응에서 그 패턴을 일반화하는 것으로 이러한 맥락에서 <표1>과 <표3>을 함께 살펴보고자 한다.

됩니다.

교사: 그렇다면 x가 799일 때는 어떻게 구할 수 있니. 표에서 y값들만 보지말고 x와 y 사이의 관계를 생각해보렴.

학생: 그러니까 x가 1일 때 y는 5, x가 2일 때는 y가 6... x에 4를 더하면 y가 나오는군요. 그렇다면 x가 800일 때, y는 804가 될 것 같은데요.

교사: 맞았어. 이제 x가 주어졌다면, 어떻게 y를 찾을 수 있는지 설명할 수 있겠지.

학생: x 값이 주어지면, y 값을 구할 수 있어요. x 값에 4를 더하면 되죠.

교사: 그렇다면 x와 y를 연결하는 규칙을 식으로 나타낼 수 있겠니?

학생: x 값이 주어져야 되요. 만약 x값이 주어지지 않았다면 그것을 나타낼 수 없어요.

학생들은 <표1>과 같은 형태를 수학 학습에서 자주 접하게 된다. 그리고 그들은 이러한 표에서 x 와 y 사이의 관계에 앞서 우선 각 열의 재귀 관계를 이용해서 x가 1 증가할 때, y가 1 증가하는 관계를 파악한다(이것은 산술적 사고에 해당한다). 그리고 x에 4를 더해서 y를 얻는 함수적 관계는 일반적으로 이러한 재귀 관계 다음에 파악된다(함수적 관계를 파악하는 것은 주어진 패턴에서 그 관계를 찾는 것으로 이것은 대수적 사고에 해당한다). 첫 번째와 두 번째 질문의 경우 재귀 관계만으로 문제는 해결 가능하다. 그러나 세 번째 질문에서 학생들은 이러한 재귀 관계를 통해 문제를 해결하기 어렵게 되고, 그들은 비로소 x와 y 사이의 함수적 관계를 생각하고 그것을 사용하여 문제를 해결한다. 문제는 이러한 함수적 관계를 사용하는 것이 암묵적으로 이루어진다는데 있다. 따라서 세 번째 질문에 답을 한 학생이라 할지라도 네 번째 질문에서 이러한 함수적 관계를 말로 표현하는 것을 어려워하고 그리고 그 표현은 x와 y를 대상으로 하는 것이 아니라 수값으로 제한되어 이루어진다. 이것은 학생들이 문제를 해결하는 수준이 패턴에서 비롯되는 어떤 관계에 기초하여 형성된 것이 아니라 단순히 표에서 유추되었음을 보여주는 대목이다. 그 결과 마지막 질문 곧, 대수식을 이용해서 x와 y 사이의 패턴 및 관계를 일반화하는 질문에 대해서 학생들은 쉽게 답을 하지 못한다. 따라서 함수적 관계를 구어적 표현으로, 그리고 이러한 구어적 표현을 대수적 표현으로 나타내는 과정에는 어떤 간격이 존재한다고 볼 수 있다.

<표2>의 경우는 <표1>에서처럼 각각의 열에서 일정한 규칙을 찾기 어렵게 되어 있다. 곧, 재귀 관계를 파악하기보다 오히려 x와 y 사이를 연결하는 함수적 관계를 패턴에서 먼저 발견하도록 되어 있다. 따라서 <표1>에 비해 <표2>는 패턴에서 관계를 파악하고 규칙을 발견하는데 있어서 보다 효과적이며, 일반화 역시 이러한 관계에서부터 이끌어낼 수 있을 것이다.

<표3>은 <표1>, <표2>와 차이가 있는데, <표3>은 재귀 관계를 생각할 수 있는 형태로 x가 1씩 증가하면, y는 3씩 증가하는 것을 표에서 직접 파악할 수 있다. 따라서 학생들은 위의 수업에서 제시된 첫 번째와 두 번째 질문은 비교적 쉽게 해결한다. 그러나 세 번째 질문은 <표1>에 비해 어렵게 생각되는데, 이것은 <표1>과 달리 함수적 관계를 파악하는 것이 쉽지 않기 때문이다. 그리고 이러한 어려움은 관계를 말로 표현하고, 식으로 표현하는 동안 곧, 일반화 과정이 진행되는 동안 계속된다.

우리는 위에서 제시한 <표1>, <표2>, <표3>에서 일반화와 함께 재귀 관계 및 함수적 관계에 대하여 살펴보았다. 함수적 관계에서 패턴을 일반화하는 이러한 수업에서 우리는 다음 두 가지 특징을 생각해 볼 수 있다.

먼저 수들의 짝을 연결하는 함수적 관계(대수적 사고)보다 이전의 값으로부터 수를 예측할 수 있는 재귀적 규칙(산술적 사고)을 찾는 경향이 선호된다는 사실이다. 예를 들어 <표3>에서 x가 1씩 증가하고 y는 3씩 증가한다는 사실을 발견하는 것은 어렵지 않다. 그러나 이러한 재귀적 규칙에 대한 이해는 두 변수들을 연결하는 함수적 관계에 대한 이해와 자연스럽게 연결되지 않는다. 이와 함께 재귀 관계를 비롯하여 학생들이 보았던 많은 패턴들은 타당하지만 대수적으로 생각들을 이끌어내는 것은 쉽지 않다.

다음으로 산술 계산으로 문제를 해결할 때 사용된 규칙은 일상 언어 형태로 쉽게 표현되지 않으며, 이러한 구어적 형태를 대수식으로 표현하는 것은 일반화에서 발견되는 가장 어려운 문제이다. 우리는 상식적으로 'x가 800일 때, y는 무엇인가?'와 같은 질문에 답을 한 경우 쉽게 그것을 일상 언어로 표현할 수 있을 것으로 생각한다. 그러나 문제는 관계를 설명하기보다 답을 구하는 과정을 기술하는 것이 우선한다는데 있으며, 이것은 산술적 사고의 중요한 특징으로 산술적 사고는 이처럼 답을 구하는 과정에 따라 형성되며, 따라서 이것은 관계에 초점을 두는 대수적 사고에서 장애로 작용한다. 이러한 표현 사이의 간격은 구어적 표현과 대수식 사이에 더 크게 존재하는데, 한 예로 Stacey & MacGregor(2001, p.145)는 함수적 관계를 이해하고 그것을 설명하는 학생들 가운데 30% 이상이 그것을 대수적인 형태로 기술하지 못하고 있음에 주목하였다.

대수 도입에 있어서 이처럼 함수적 관계를 이해했지만 그것들을 말로 표현하지 못하거나 대수적으로 표현하지 못할 경우, 이것은 계속되는 대수 학습에서 문제가 된다. 학생들은 산술에서처럼 계산할 수는 있지만, 자신이 하고 있는 그 과정을 어떤 형태로든 기술하는데는 익숙하지 못하다. 그리고 경우에 따라서는 어떤 패턴을 인식할 수는 있지만, 그것을 표현으로 나타내지 못한다. 곧, 대수 규칙을 표현하는 것은 올바른 언어적 표현을 이해한 학생이라 하더라도 이것과는 또 다른 수준을 요구한다. 따라서 대수 도입에서 함수적 관계에서 발견되는 패턴을 언어 형태로, 그리고 이것을 대수식 형태로 일반화하는 과정은 패턴의 일반화를 통해 대응 규칙에 의미를 부여하는 과정에서 중요하게 다루어져야 한다.

Ⅳ. 결론

수학은 다양한 논리와 증명 방법을 통해 전개되어 왔으며, 여기서 수학적 사고방식은 중요한 역할을 해왔다. 이러한 사고방식 가운데 특히 일반화는 수학에서 추구하는 논증적 사고의 밑바탕이 되어 왔으며, 이러한 일반화는 학교 수학에서 그 지도를 통해 강조되어야 하는 중요한 요소 가운데 하나이다. 대수는 일반화를 표현하고, 일반화에 의해 구성되는 언어 체계이다. 따라서 학교 대수에서 일반화를 강조함으로써, 우리는 학교 수학에서 필요로 하는 이러한 논증적 사고를 이끌어낼 수 있을 것이다.

대수는 학교 수학에서 고등 수학을 선택하는 기준이 된다. 그리고 대수에서의 성공은 전체 학교 수학에서의 성공을 판단하는 중요한 기준이 된다. 그러나 문제는 대수 학습이 이러한 과정에서 긍정적이지만은 않다는데 있으며, 이것은 기존의 대수 교육과정이 안고 있는 문제 가운데 하나이다. 따라서 대수 교육과정을 개선하려는 움직임은 이러한 문제를 해결하기 위해, 전통적인 대수 도입 방식을 대신하여 대수

를 도입하는 다양한 방식에 대해 논의하고 있다. 그리고 대수 도입에 있어서 이러한 연구의 목적은 문자와 식의 형식적인 도입을 대신하여 사고와 추론 측면에서 대수를 지도하는데 있다.

이 글에서 우리는 대수적 사고를 양들 사이의 관계를 분석하고 표현하는 능력으로, 그리고 패턴을 탐구하고 인식하고, 이것을 언어 또는 기호로 일반화하는 능력으로 보고 있다.

이와 함께 우리는 대수 학습에서 형식적인 조작 과정을 대신하여 그 자체를 하나의 대상으로 파악하고, 패턴에서 변화하는 양적 관계를 일반화하면서, 패턴의 구조를 파악하는 것을 대수 학습에서 요구되는 중요한 요소 가운데 하나로 보았다. 따라서 이러한 패턴과 일반화를 강조한 대수 도입을 통해, 우리는 사고와 추론이 강조되는 대수 학습을 이끌어낼 수 있음을 논의하였다. 이것은 대수 도입(중학교 1학년)에서부터 패턴과 규칙, 관계를 강조함으로써 대수에서 요구하는 일반화를 이끌어낼 수 있으며, 기존에 강조되었던 구문론적 측면을 대신하여 대수를 의미론적 측면에서 접근할 수 있음을 의미한다.

대수 교육과정을 개선하기 위한 차후 연구에서 문제해결을 비롯해서 함수, 모델링을 강조하는 대수 접근법과 대수와의 관계를 밝히고, 이러한 측면이 실제 대수 수업에서 어떻게 구체적으로 드러날 수 있는가에 대한 논의가 계속되기를 기대한다.

참고문헌

강행고 외 9인(2001). **중학교 수학 7-가.** (주) 중앙교육진흥연구소.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 3-나.** 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 4-가.** 대한 교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-가.** 대한 교과서 주식회사.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰-패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로-. **수학교육학연구, 12**(3), 353-369.

이준열 외 4인(2001). **중학교 수학 7-가.** (주) 도서출판 디딤돌.

Bendnarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra.* Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T. P., & Frank, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*(pp. 155-162). The University of Melbourne, Australia.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*(pp. 252-257). The University of Melbourne, Australia.

Lee, L. (1996) An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 87-106). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra*(pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Moses, B. (1999). *Algebraic thinking, grades* K-12. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Radford, R. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra*(pp. 107-111). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the fitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra*(pp. 141-153). Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12*(pp.8-19). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Wagner, S., & Kieran, C. (1999). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12*(pp. 362-372). National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding: The importance of learning in the early years. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 633-640). The University of Melbourne, Australia.

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra*(pp. 317-325). Kluwer Academic Publishers.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra*(pp. 676-681). The University of Melbourne, Australia.

A Study on Approaches to Algebra Focusing on Patterns and Generalization

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we deal with the teaching of algebra based on patterns and generalization. The past algebra curriculum starts with letters(variables), algebraic expressions, and equations, but these formal approaching method has many difficulties in the school algebra. Therefore we insist the new algebraic approaches should be needed. In order to develop these instructions, we firstly investigate the relationship of patterns and algebra, the relationship of generalization and algebra, the steps of generalization from patterns and levels of difficulties. Next we look into the algebra instructions based arithmetic patterns, visual patterns and functional situations. We expect that these approaches help students learn algebra when they begin school algebra.

*** key words: algebra, patterns, generalization, algebraic approaches**