AR(1) 공정을 탐지하는 VSS $\overline{X}$ 관리도의 통계적 설계

이재헌
광주대학교 산업정보공학과

Statistical Design of VSS $\overline{X}$ Charts for Monitoring an AR(1) Process

Jaeheon Lee
Dept. of Industrial Information Engineering, Gwangju University

Key Words : AR(1) Model, Autocorrelation, Control Chart, Markov Chain, VSS

Abstract

A basic assumption in standard applications of control charts is that the observations are statistically independent. However, this assumption is often violated from processes in many industries. The presence of autocorrelation has a serious impact on the performance of control charts, causing a dramatic increase in the frequency of false alarms. This paper considers a process in which the observations can be modeled as a first order autoregressive(AR(1)) process, and develops $\overline{X}$ charts with the variable sample size(VSS) scheme for monitoring the mean of this process.

1. 서론

제조분야에서 통계적 공정관리(statistical process control; SPC)는 공정의 탐지와 품질 향상을 위하여 생산자가 노력해야 할 가장 중요한 부분이다. SPC 활동 중 공정평균과 분산의 변화를 탐지하기 위한 도구로서 여러 종류의 관리도가 사용되어 왔으며, 이와 같은 전통적인 관리도를 사용하는데 있어서 가장 기본적인 가정은 관측값들이 서로 독립이라는 것이다.

그러나 독립성 가정은 화학공정과 같은 연속형 제조공정에서 자주 위배되고 있는 실정이다. 이들 공정에서의 관측값들은 자기상관(autocorrelation)이 존재하는 경우가 많으며, 자기상관은 독립성을 가정하고 수행하는 관리도에 많은 영향을 미치게 된다. 자기상관의 대표적인 영향은 서로 독립인 공정에 비하여 오경보(false alarm)가 증가하고, 따라서 관리상태(in-control)에서의 평균런길이(average run length; ARL)가 작아지게 된다. 평균런길이란 이상상태(out-of-control) 신호(signal)가 발생할 때까지 관측한 평균 표본수를 말한다. 이러한 영향은 관측값들이 서로 상관되어 발생하는 공정의 구조적 변동(systematic variation)을 이상원인으로 잘못 판단하기 때문에 발생하는 것이다.

이와 같이 상관된 자료에 적용하는 SPC 절차에 대해서는 이제까지 많은 연구가 진행되어 왔다. 그 중 가장 대표적인 방법으로 다음의 두 가지를 생각할 수 있다. 첫째는 공정의 관측값들에 대하여 자기상관을 고려하여 관리한계를 조정한 기존의 관리도를 적용시키는 것이다(Vasilopoulos와 Stamboulis(1978)와 VanBrackle와 Reynolds(1997) 참조). 다른 하나는 Alwan과 Roberts(1988)가 제안한 것으로 공정의 관측값들에 시계열 모형을 적합시킨 후 계산된 잔차들에 대하여 관리도를 적용시키는 것이다. Lu와 Reynolds(1999)는 공정 평균의 변화를 탐지할 때 자기상관이 크지 않을 경우 Shewhart 관리도에서는 잔차 보다 관측값에 관리도를 적용하는 것이 훨씬 효율적이며, EWMA 관리도에서는 큰 변화에는 잔차에 적용하고 작은 변화에는 관측값에 적용하는 경우가 더 효율적이라는 사실을 발표하였다. 이 외에 자기상관이 있는 공정에 대한 SPC 절차로는 Zhang(1998)이 제안한 EWMAST 관리도와 Jiang et al.(2000)이 제안한 ARMA 관리도 등을 들 수 있다.

일반적으로 관리도에서 표본을 추출하는 방법은 고정된 표본추출간격(fixed sampling interval; FSI)에서 고정된 표본크기(fixed sample size; FSS)를 추출하는 고정표본추출비(fixed sampling rate; FSR)를 사용하는 것이다. 이에 반하여 현재의 관리 통계량 값에 기초하여 다음 시점의 표본추출비를 변화시키는 관리도를 변량추출비(variable sampling rate; VSR) 관리도라 한다.

VSR 관리도에서 표본추출간격만을 변화시키는 관리도를 변량추출간격(variable sampling interval; VSI) 관리도라 하고, 표본크기만을 변화시키는 관리도를 변량표본크기(variable sample size; VSS) 관리도라 한다. 본 논문에서 고려하고자 하는 VSS 관리도는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 많은 크기의 표본을 추출하고, 그렇지 않은 경우에는 작은 크기의 표본을 추출하여 공정을 관리하는 것이다.

서로 독립인 공정에서 VSR 관리도 방법을 사용하는 절차 또한 이제까지 많은 연구가 되어져 왔다. 특히 서로 독립인 공정에 적용하는 VSS $\overline{X}$ 관리도에 대한 연구로는 Prabhu et al.(1993), Costa(1994), Park과 Reynolds(1994), 그리고 Zimmer et al.(1998) 등이 있다. 그러나 자기상관이 존재하는 공정에 VSR 관리도 방법을 적용하는 것에 대해서는 그 특성을 규명하기가 복잡하여 아직까지 많은 연구가 이루어지지 않은 실정이다. 대표적으로 Reynolds et al.(1996)는 자기상관이 존재하는 경우 VSI 관리도의 특성에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 자기상관이 존재하는 공정의 평균 변화를 탐지하는 경우 관측값에 대하여 VSS $\overline{X}$ 관리도를 적용하는 절차를 제안하고 제안된 관리도의 특성에 관하여 연구하였다. 자기상관이 존재하는 공정의 모형으로는 시계열 모형 중 가장 간단한 형태인 AR(1) 모형을 사용하였고, 제안된 VSS $\overline{X}$ 관리도의 효율을 FSS $\overline{X}$ 관리도와 비교하여 서로 독립인 공정에서와 마찬

가지로 VSS 관리도가 공정관리의 효율을 증진시키는지 살펴보고자 한다.

2. AR(1) 모형과 VSS $\overline{X}$ 관리도의 절차

시점 t에서의 품질특성치 X_t가 AR(1) 모형을 따른다고 가정하면 X_t는

$$X_t = (1-\phi)\xi + \phi X_{t-1} + a_t$$

로 표현할 수 있다. 여기서 ϕ는 시차 1의 자기상관함수 값이며, a_t는 평균이 0이고 분산이 σ_a^2인 정규분포를 따르는 확률변수를 나타낸다. 이 때 X_t의 평균은 ξ이고 분산은 $\sigma_X^2 = \sigma_a^2 / (1-\phi^2)$가 됨이 잘 알려져 있다.

만일 시점 t에서 크기가 n인 표본을 추출하는 경우를 고려해 보자. 이 경우 n개의 표본을 추출하는 시간이 아주 짧아서, 하나의 표본 내 관측치들 간의 시간은 표본들 간의 시간에 비하여 무시할 정도로 작음을 가정한다. 이 가정 하에서 시점 t의 표본평균 $\overline{X}_t$는

$$\overline{X}_t = (1-\phi)\xi + \phi \overline{X}_{t-1} + \overline{a}_t \tag{1}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 $\overline{a}_t$는 평균이 0이고 분산이 σ_a^2 / n인 정규분포를 따르는 확률변수이며, $\overline{X}_t$는 평균이 ξ이고 분산이 $\sigma_{\overline{X}}^2 = \sigma_a^2 / ((1-\phi^2)n)$이 됨을 쉽게 알 수 있다.

본 논문에서 고려하는 공정관리 목표는 공정평균 ξ가 이상원인(special cause)에 의하여 목표치 ξ_0에서 변화하는지를 탐지하는 것이다. 이 때 N_t를 시점 t에서의 표본크기라 할 때, 시점 t에서 VSS $\overline{X}$ 관리도의 관리 통계량은 표본평균 $\overline{X}_t$를 표준화시킨

$$Z_t = \sqrt{1-\phi^2}\sqrt{N_t}\left(\frac{\overline{X}_t - \xi_0}{\sigma_a}\right) \tag{2}$$

를 사용하며, VSS $\overline{X}$ 관리도의 절차는 $|Z_t|$가 미리 설정된 관리한계 $\pm c$를 벗어날 경우 이상상태라는 신호를 주게 된다.

시점 t에서의 표본크기 N_t는 이전 시점에서의 관리 통계량 Z_{t-1} 값에 따라 변화하게 되는데, 몇 개의 표본크기를 사용하는 것이 최적인가에 대해서는 알려진 바가 없다. 다만 편의상 2가지의 표본크기를 사용하는 경우가 일반적이며, 본 논문에서도 2가지의 표본크기를 사용하고자 한다. 이 경우 N_t는

$$N_t = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_S \\ n_2 & \text{만일 } c_S \le |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 $n_1 < n_2$이고, c_S는 표본크기의 값을 결정짓는 영역의 분계선(threshold limit)을 나타낸다.

3. VSS $\overline{X}$ 관리도의 효율

VSS 관리도의 통계적 효율은 신호까지의 표본수와 신호까지의 개별 관측치수로 측정할 수 있다. 탐지의 시작부터 신호까지 추출한 평균 표본수를 ANSS(average number of samples to signal)라 하고, 신호까지 추출한 평균 관측치수를 ANOS (average number of observations to signal)이라 하자.(ANSS는 관리도 효율의 일반적인 측도로 사용하는 ARL과 동일한 개념이다.) VSS 관리도의 평균 표본크기는 $\overline{n}$ = ANOS/ANSS로 정의할 수 있다.

전통적으로 사용하고 있는 FSS 관리도와 본 논문에서 제시한 VSS 관리도의 통계적 효율을 비교하기 위해서는 관리상태에서의 수행 능력을 동일하게 하여야 한다. 이것은 오경보율을 동일하게 하고 공정이 관리상태인 경우 VSS 관리도의 평균 표본크기. $\overline{n}$와 FSS의 고정된 표본크기를 동일한 값으로 설정함으로 달성할 수 있다.

관리도의 비교를 위하여 공정평균 ξ의 변화량은

$$\delta = \sqrt{\overline{n}}\,(\xi - \xi_0)/\sigma_X \tag{3}$$

와 같이 편의상 평균 표본크기로 계산된 표본평균의 표준편차로 표준화된 양으로 나타낸다. 이 때 ANSS_δ와 ANOS_δ를 각각 평균의 변화량이 δ인 경우 ANSS와 ANOS의 값이라 하면, 관리상태에서의 ANSS는 3-시그마 관리한계를 사용한 FSS $\overline{X}$ 관리도의 경우와 동일한 값인 $\mathrm{ANSS}_0 = 370.4$로 설정하고 관리상태에서의 ANOS에 대해서는 $\mathrm{ANOS}_0/\overline{n} = 370.4$로 설정함으로 VSS와 FSS 관리도에서 관리상태에서의 수행능력을 동일하게 할 수 있다.

<표 1>에는 여러 가지 ϕ와 δ에 대하여 ANSS_δ를 최소로 하는 최적의 관리모수 값(FSS $\overline{X}$에서는 c이고, VSS $\overline{X}$에서는 $n_1/\overline{n}$, $n_2/\overline{n}$, c_S, 그리고 c임)과 이 때의 ANSS_δ 값이 나타나 있다. 제조공정에서 발생하는 자기상관은 그 값이 양수인 경우가 일반적이기 때문에 $\phi > 0$ 인 경우에만 결과를 제시하였다. 표에서 각 경우의 첫째 행은 FSS $\overline{X}$ 관리도의 경우이고, 둘째 행은 VSS $\overline{X}$ 관리도의 경우이다. VSS $\overline{X}$ 관리도에서 표본크기의 분계선 c_S는 $\delta = 0$인 경우 $\mathrm{ANSS}_0 = \mathrm{ANOS}_0/\overline{n} = 370.4$를 만족하도록 선정된 값을 $\delta > 0$인 경우에도 계속 사용하였으며, 주어진 c_S에 대하여 ANSS_δ를 최소로 하는 $n_1/\overline{n}$, $n_2/\overline{n}$, 그리고 c를 선정하였다. 이 값들의 선정은 편도함수(partial derivatives)에 대한 유한차분근사(finite difference approximations)를 이용한 일반화된 축소경사법(generalized reduced gradient procedure)을 사용하였다.(Lasdon et al.(1978) 참조) ANSS와 ANOS를 계산하는 방법은 부록에 상세하게 기술하였다. 표의 제일 마지막 열에 제시된 PR은 FSS $\overline{X}$ 관리도 대신 VSS $\overline{X}$ 관리도를 사용함으로 얻을 수 있는 ANSS_δ

의 절감율(percent reduction)을 나타낸다. 즉 ANSS_F와 ANSS_V를 각각 FSS와 VSS 관리도를 사용할 때의 ANSS_δ라 할 때 PR은

$$PR = \frac{\text{ANSS}_F - \text{ANSS}_V}{\text{ANSS}_F} \times 100$$

으로 계산할 수 있다.

<표 1>에 제시된 최적의 관리모수와 ANSS_δ 값을 비교할 때 다음과 같은 사항을 알 수 있었다. FSS $\overline{X}$ 관리도 대신 VSS $\overline{X}$ 관리도를 사용함으로 일반적으로 공정의 변화를 더 빨리 탐지할 수 있었으며, ANSS_δ의 절감율을 살펴보면 최소 3.0%에서 최대 75.6%까지 절감됨을 알 수 있다. 특히 공정평균의 변화량 δ가 아주 크지 않은 경우($\delta \le 2.0$) VSS $\overline{X}$ 관리도의 효율이 FSS 관리도에 비하여 훨씬 좋게 나타났으며, δ가 더 커질수록 그 효율의 차이는 점점 줄어드는 것으로 나타났다.(δ가 커질수록 PR 값이 작아지며 $n_1/\overline{n}$와 $n_2/\overline{n}$ 값이 FSS의 경우인 1에 점점 접근한다.) 또한 자기상관이 작은 경우 VSS 관리도의 효율이 FSS 관리도에 비하여 훨씬 좋았으며, 자기상관이 커질수록 그 효율의 차이는 점점 줄어드는 것을 알 수 있었다.

4. 예제

<표 1>을 이용하는 간단한 예를 들어보자. 공정의 품질특성치가 $\phi = 0.4$인 AR(1) 모형을 따른다고 할 때 공정평균의 변화를 탐지하는 것이 공정관리의 목적이라 하자. 이제까지는 공정의 관측값에 대하여 표본크기가 4, 즉 $\overline{n} = 4$ 인 FSS $\overline{X}$ 관리도를 사용해 왔는데, VSS $\overline{X}$ 관리도를 적용하여 공정평균의 변화를 좀 더 빨리 탐지하고자 한다.

탐지하고자 하는 공정평균의 변화량은 품질특성치의 표준편차 σ_X의 0.25배 정도라 할 때, <표 1>을 이용하여 VSS $\overline{X}$ 관리도를 설계해 보자. 먼저 <표 1>의 δ는 식 (3)과 같이 $\sigma_X/\sqrt{n}$의 배수로 정의했으므로 σ_X의 0.25배로부터 $\delta = 0.25 \times \sqrt{n} = 0.5$가 되며, 이 때의 VSS $\overline{X}$ 관리도의 최적의 모수는 $n_1/\overline{n} = 0.7$, $n_2/\overline{n} = 4.53$, $c_S = 2$, 그리고 $c = 4.091$임을 알 수 있다. 대략적으로 $n_1 = 2.8 \doteq 3$과 $n_2 = 18.12 \doteq 18$로 선정한다면 VSS $\overline{X}$ 관리도의 절차는 식 (2)의 표준화된 관리 통계량의 절대값이 2 보다 작은 경우 다음 시점의 표본크기를 3으로 사용하며, 통계량의 절대값이 2와 4.091 사이인 경우에는 다음 시점의 표본크기를 18로 사용하는 것이다. 만일 통계량의 절대값이 4.091 보다 큰 경우에는 이상상태라는 신호를 주는 것이다.

이와 같이 VSS $\overline{X}$ 관리도를 설계하여 FSS $\overline{X}$ 관리도 대신 사용할 경우 훨씬 빨리 공정평균의 변화를 탐지할 수 있으며, 이 때의 ANSS의 절감율은 대략적으로 68% 정도라 할 수 있겠다.

<표 1> FSS와 VSS $\overline{X}$ 관리도의 최적 관리모수와 ANSS 값

ϕ	δ	$n_1/\bar{n}$	$n_2/\bar{n}$	c_S	c c	$ANSS_\delta$	PR
0.2	0.25	1.00	1.00		2.999	282.70	61.1
		0.43	15.42	2.200	3.635	110.00	
	0.50	1.00	1.00		2.999	157.91	74.9
		0.48	11.08	2.200	3.371	39.56	
	0.75	1.00	1.00		2.999	83.90	75.6
		0.52	9.68	2.200	3.298	20.44	
	1.00	1.00	1.00		2.999	46.26	70.3
		0.52	9.68	2.200	3.298	13.72	
	2.00	1.00	1.00		2.999	7.58	45.6
		0.92	3.97	2.200	3.041	4.12	
	3.00	1.00	1.00		2.999	2.72	19.1
		0.96	2.57	2.200	3.018	2.20	
	4.00	1.00	1.00		2.999	1.56	3.8
		0.98	1.71	2.200	3.007	1.50	
0.4	0.25	1.00	1.00		2.991	286.15	48.1
		0.72	5.03	2.000	4.364	148.37	
	0.50	1.00	1.00		2.991	163.69	68.0
		0.70	4.53	2.000	4.091	52.40	
	0.75	1.00	1.00		2.991	89.31	71.6
		0.70	4.03	2.000	3.860	25.34	
	1.00	1.00	1.00		2.991	50.70	70.3
		0.71	3.61	2.000	3.686	15.06	
	2.00	1.00	1.00		2.991	9.49	45.9
		0.72	3.45	2.000	3.626	5.13	
	3.00	1.00	1.00		2.991	3.75	22.4
		0.93	2.13	2.000	3.151	2.91	
	4.00	1.00	1.00		2.991	2.22	7.2
		0.96	1.63	2.000	3.071	2.06	
0.6	0.25	1.00	1.00		2.966	292.85	27.5
		0.90	2.44	2.000	4.425	212.46	
	0.50	1.00	1.00		2.966	174.94	48.3
		0.90	2.36	2.000	4.282	90.40	
	0.75	1.00	1.00		2.966	99.69	54.8
		0.89	2.26	2.000	4.131	45.05	
	1.00	1.00	1.00		2.966	59.05	55.2
		0.89	2.17	2.000	3.996	26.44	
	2.00	1.00	1.00		2.966	12.84	38.1
		0.90	1.86	2.000	3.629	7.95	
	3.00	1.00	1.00		2.966	5.51	18.5
		0.90	1.86	2.000	3.629	4.49	
	4.00	1.00	1.00		2.966	3.37	5.3
		0.90	1.86	2.000	3.629	3.19	

<표 1> 계속

ϕ	δ	$n_1/\overline{n}$	$n_2/\overline{n}$	c		ANSS_δ	PR
				c_S	c		
0.8	0.25	1.00	1.00		2.877	306.54	12.0
		0.96	1.47	1.993	4.256	269.74	
	0.50	1.00	1.00		2.877	199.47	26.0
		0.96	1.45	1.993	4.184	147.62	
	0.75	1.00	1.00		2.877	123.24	32.0
		0.96	1.43	1.993	4.093	83.77	
	1.00	1.00	1.00		2.877	78.42	33.1
		0.96	1.41	1.993	3.997	52.45	
	2.00	1.00	1.00		2.877	21.03	21.4
		0.96	1.32	1.993	3.647	16.53	
	3.00	1.00	1.00		2.877	9.95	8.2
		0.96	1.31	1.993	3.613	9.13	
	4.00	1.00	1.00		2.877	6.27	3.0
		0.99	1.16	1.993	3.114	6.08	

5. 결론 및 향후 연구 과제

본 논문에서는 자기상관이 존재하는 공정으로 AR(1) 모형을 고려했으며, 공정의 관측값에 적용하는 VSS $\overline{X}$ 관리도의 절차를 제안하고 그 특성에 관하여 연구하였다. AR(1) 모형을 따르는 공정에서 평균의 변화를 탐지하고자 할 때 FSS 관리도에 비하여 VSS 관리도는 훨씬 빨리 변화를 탐지하였고, 특히 자기상관과 평균의 변화량이 크지 않은 경우 VSS $\overline{X}$ 관리도의 사용은 공정관리의 효율을 크게 증진시키는 것으로 나타났다.

향후 다양한 자기상관의 공정 모형에 대한 VSS $\overline{X}$ 관리도의 특성을 규명하고, $\overline{X}$ 관리도 이외에 지수가중이동평균(EWMA) 관리도와 누적합(CUSUM) 관리도에 VSS 방법을 적용하여 그 효율을 비교하는 것은 매우 의미있는 연구라고 생각된다. 또한 자기상관이 존재하는 공정에 대하여 이전에 연구된 바 있는 VSI 방법과 본 논문에서 제안된 VSS 방법을 병행하는 VSSVSI 관리도의 특성에 대해서도 연구할 가치가 있다고 판단된다.

참고문헌

[1] Alwan, L. C. and Roberts, H. V.(1988), "Time-Series Modeling for Statistical Process Control", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 6, pp. 87-95.

[2] Costa, A. F. B.(1994), "$\overline{X}$ Charts with Variable Sample Size", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 155-163.

[3] Jiang, W., Tsui, K. L., and Woodall, W. H.(2000), "A New SPC Monitoring Method: The ARMA Chart", *Technometrics*, Vol. 42, pp. 399-410.

[4] Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain, A., and Ranter, M.(1978), "Design and Testing of Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming", *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 4, pp. 34-50.

[5] Lu, C. W. and Reynolds, M. R., Jr.(1999), "EWMA Control Charts for Monitoring the Mean of Autocorrelated Processes", *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, pp. 166-188.

[6] Park, C. and Reynolds, M. R., Jr.(1994), "Economic Design of a Variable Sample Size $\overline{X}$-Charts", *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 23, pp. 467-483.

[7] Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B.(1993), "An Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 2895-2909.

[8] Reynolds, M. R., Jr., Arnold, J. C., and Baik, J. W.(1996), "Variable Sampling Interval $\overline{X}$ Charts in the Presence of Correlation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, pp. 12-30.

[9] VanBrackle, L. N. and Reynolds, M. R., Jr.(1997), "EWMA and CUSUM Control Charts in the Presence of Correlation", *Communications in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 26, pp. 979-1008.

[10] Vasilopoulos, A. V. and Stamboulis, A. P.(1978), "Modification of Control Limits in the Presence of Data Correlation", *Journal of Quality Technology*, Vol. 10, pp. 20-30.

[11] Zhang, N. F.(1998), "A Statistical Control Chart for Stationary Process Data", *Technometrics*, Vol. 40, pp. 24-38.

[12] Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1998), "Evaluation of a Three-State Adaptive Sample Size $\overline{X}$ Control Chart", *International Journal of Production Research*, Vol. 36, pp. 733-743.

부록

부록 A: ANSS와 ANOS의 계산

VSS 관리도의 특성을 나타내는 ANSS와 ANOS를 계산하는 방법으로 마르코프 연쇄(Markov chain)와 적분방정식 방법이 일반적으로 사용되는데, 본 논문에서는 마르코프 연쇄를 사용하겠다.

$\{(x_i, v_i), i=1,2,,\cdots,m\}$를 계속영역 $(-c, c)$에서 정의된 m개의 Gaussian quadrature 점과 가중치라 하면, 구간 $(-c, c)$는 다음과 같이 m개의 부분 영역으로 나눌 수 있다.(본 논문에서는 $m=21$을 사용하였다.)

$$I_i=(b_i, b_{i+1}),\ i=1,\cdots,m.$$

여기서 $b_i=-c+\sum_{j=1}^{i-1} v_j$이고 $v_0=0$ 이다.

VSS $\overline{X}$ 관리도에 대한 마르코프 연쇄는 위에서 정의된 m개의 부분 영역 I_i에 해당되는 m개의 일시적 상태(transient state)를 갖는다. $i,j=1,2,\cdots,m$에 대하여

$$q_{ij}^{\delta}=\Pr(Z_t\in I_j|Z_{t-1}\in I_i, \xi=\xi_0+\delta\sigma_X/\sqrt{n})$$

라 할 때, 일시적 상태의 전이확률행렬(transition probability matrix)은 $\mathbf{Q}_\delta=[q_{ij}^{\delta}]_{m\times m}$으로 표현할 수 있다. 전이확률 q_{ij}^{δ}의 계산 과정은 부록 B에 제시하였다. 마르코프 연쇄의 성질을 이용하면 ANSS_δ와 $\text{ANOS}_\delta/\overline{n}$는

$$\text{ANSS}_\delta=\mathbf{s}'[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_\delta]^{-1}\mathbf{1},$$
$$\text{ANOS}_\delta/\overline{n}=\mathbf{s}'[\mathbf{I}-\mathbf{Q}_\delta]^{-1}\mathbf{n}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 $\mathbf{s}$는 크기가 m인 초기확률의 벡터로서 관리 통계량의 초기값을 0으로 하였으므로 $(m+1)/2$번째 원소만 1, 나머지 원소는 0으로 놓았다. $\mathbf{I}$는 $m\times m$의 단위행렬(identity matrix), $\mathbf{1}$은 모든 원소가 1인 크기 m인 벡터, 그리고 $\mathbf{n}$은 크기가 m인 벡터로서 i번째 원소는 $n(i)$를

$$n(i)=\begin{cases} n_1 & \text{만일 } |x_i|<c_S \\ n_2 & \text{만일 } c_S\le|x_i|<c \end{cases}$$

라고 정의할 때 $n(i)/\overline{n}$로 나타낼 수 있다.

부록 B: 전이확률 q_{ij}^{δ}의 계산

식 (2)의 관리 통계량 Z_t는 식 (1)의 $\overline{X}_t$의 표현식을 이용하면

$$Z_t=\frac{\sqrt{1-\phi^2}\sqrt{N_t}}{\sigma_a}\{(1-\phi)(\xi-\xi_0)+\overline{a}_t\}+\sqrt{\frac{N_t}{N_{t-1}}}\phi Z_{t-1}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 N_{t-1}은 마르코프 연쇄를 이용하기 위하여 평균 표본크기인 $\overline{n}$로 추정하여 사용하기로 한다.

그러면 전이확률 q_{ij}^{δ}는

$$\begin{aligned} q_{ij}^{\delta} &= \Pr(Z_t\in I_j|Z_{t-1}\in I_i, \xi=\xi_0+\delta\sigma_X/\sqrt{n}) \\ &\approx \Pr(Z_t\in I_j|Z_{t-1}=x_i, \xi=\xi_0+\delta\sigma_X/\sqrt{n}) \\ &= \Pr\Big[b_j<\sqrt{\frac{n(i)}{n}}\{(1-\phi)\delta+\phi x_i\} \\ &\quad +\sqrt{1-\phi^2}Z<b_{j+1}\Big] \end{aligned}$$

로 근사시킬 수 있다. 여기서 Z는 표준정

규분포를 따르는 확률변수를 나타낸다. 따라서 전이확률 q_{ij}^{δ}는 $\Phi(\cdot)$가 표준정규분포의 누적분포함수라 할 때 다음과 같이 계산됨을 알 수 있다.

$$q_{ij}^{\delta} = \Phi\left[\frac{b_{j+1} - \sqrt{\frac{n(i)}{n}}\{(1-\phi)\delta + \phi x_i\}}{\sqrt{1-\phi^2}}\right] - \Phi\left[\frac{b_j - \sqrt{\frac{n(i)}{n}}\{(1-\phi)\delta + \phi x_i\}}{\sqrt{1-\phi^2}}\right].$$