

포인트그룹 이론을 이용한 대칭적 건물 평면형태의 최적대안 결정방안

The Optimization Method of Symmetrical Building Plan Using Point Group Theory

진경일* / Chin, Kyung-Il

Abstract

The symmetry is general geometric design principal in contemporary architecture shape. But, Symmetry sometimes easily causes unreasonable design. In some reason, two of symmetric units in the apartment, one side of unit have very reasonable plan and arrangement but opposite side unit may not. For example, if the kitchen on right unit had right-handed arrangement, the symmetrical other would have left-handed kitchen arrangement. In addition to this, if each house unit has the same plan but different direction, each unit has different usage or affects the residents' life pattern. Nevertheless, Architects use only one unit plan to design public housing development by using symmetric operator (mirror, proper rotation, inversion center) at their option. This study suggests that using group theory and mathematical matrix rather than designer's discretion can solve this symmetry problem clearly. And, this study analysis the merits and demerits between each symmetrical pair of unit plan shapes by using mathematical point group theory and matrix.

키워드 : 대칭(Symmetry), 포인트 그룹이론(Point Group Theory), 행렬(matrix)

1. 서론

1.1. 연구의 배경 및 목적

과거에서 현재에 이르기까지 많은 건물에 대칭이라는 기하학적 특징이 적용되었다. 그리고 특히 대칭은 건물의 경우 평면에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 국내 아파트의 형태는 대부분 대칭성을 가지고 있다. 이 경우 하나의 기본형이 존재하고 이것을 전후 및 좌우 대칭이나 회전대칭을 이용하여 연속적으로 배열해나가는 방법을 사용한다. 이렇게 작성된 동일한 평면을 가지는 아파트 단지를 형성하는 경우는 쉽게 찾아볼 수 있다.

대칭성을 가지는 아파트 평면은 실제로 건물 이용자에게 편의성이나 전통적인 관습 등의 측면에서 최적화 되었기보다는 배선이나 배관 또는 효과적인 배치의 측면에 초점을 두고 설계된 경우가 많다. 예를 들어 에어컨 냉각기 팬 위치가 한쪽으로 편중되어있어 설치하기에 적절한 설치 위치가 없는 대칭 도면이 존재할 수도 있고, 도면을 대칭 시킴으로 인하여 부엌의 싱크대 위치와 조리대 위치가 왼손잡이에게 유리한 집이 되거나 오른손잡이에게 유리한 집이 될 수도 있다. 문이나 주방, 실내 가구 등도 상용 제품은 오른손잡이 위주로 제작되었으나 실내에

배치는 왼손잡이 위주로 설계되어 배치에 어려움을 겪는 경우도 있다.

한편, 아파트의 경우 평면은 동일하나 건물의 향이 달라서 거주단위 중 동일한 위치의 방(혹은 기타 실내 위치)에서 생활 하더라도 생활의 유리함과 불리함이 있을 수 있다. 방향에 관한 문제는 전통적으로 남향을 선호하는 동양의 문화에서 실의 위치와 향은 내부가 동일하게 생겼다 하여도 생활에 대단히 큰 영향을 미친다.

즉, 공동주택 계획 시 동일한 평면을 대칭 시키거나 회전시켜 아파트 주거단위나 단지를 구성하는 경우 대칭을 적용하여 얻어진 공간에서 주거하는 사용자에게 뜻하지 않은 불편이 발생할 수 있다. 따라서 이러한 문제를 개선하기 위하여 대칭적인 평면형태와 계획은 무조건적으로 이루어지기보다는 보다 계획적이고 과학적인 분석방법에 의하여 결정할 필요가 있다.

본 연구의 목적은 아파트 단위평면 및 단지 설계 시 대칭성을 이용하고자 할 때 대칭성을 적용한 후 계획안이 기본 도면에 비하여 부적절한 문제가 발생하는 것을 예측하고 개선하기 위하여 포인트 그룹과 그에 수반된 매트릭스를 이용하여 초기 대안 및 파생된 도면을 평가하는 방법을 제시한다.

대칭성을 가지는 건물 중 대칭성을 가지는 각 주거단위 대칭적 구성요소¹⁾의 배치 및 향의 우열에 따른 점수를 주어 평

* 정회원, 연세대학교 건축과학기술연구소 연구원, 공학박사

가하고 건축계획 시 불합리한 평면이 발생할 경우 이것을 수정할 수 있는 방법을 포인트그룹 이론을 이용하여 제시한다.

1.2. 연구의 범위 및 방법

대칭성은 다양한 건물에서 볼 수 있다. 그러나 본 연구는 이러한 대칭성이 인간의 주거 생활에 밀접한 영향을 줄 수 있고 우리 나라 특성상 전통적으로 향(向)에 영향을 많이 받고 대칭이 많이 존재하고 있는 주거용 건물을 대상으로 한다. 특히 아파트의 경우는 주거용으로 일반적으로 하나의 동에 다양한 대칭적 형태가 존재하는 경우가 많고 그 대칭에 따라서 사용자의 선호도가 큰 차이를 보이기 때문에 본 연구의 대상으로 선정하였다. 한편 입체의 대칭성은 X, Y, Z 3개 방향에서 이루어지는 대칭이지만 건물의 경우 평면인 2차원이므로 본 연구에서는 2차원 항목 위주로 다루도록 한다.

본 연구는 대칭이론을 전개하고 건물 평면에 적용시키기 위하여 대칭성을 가지는 건물 평면의 기본형²⁾을 결정하고 그 기본형에서 파생되는 대칭적 가능성을 분석한다. 이때 그 대칭성은 대칭의 종류에 따른 행렬로 표현될 수 있으며 그것은 캐릭터테이블³⁾에서 대칭성의 특징이 찾아질 수 있다.

이렇게 기하학 이론에 의하여 작성된 그룹이론(Point Group Theory)을 건축평면 디자인 구성에 적용시킨다. 이때 건물의 평면이 대칭성을 가지면서 어떤 평면형태에 대하여 상대가 되는 평면에서 초기 상태의 평면에 비하여 개선되거나 나빠지는 점들을 분석하도록 한다.

2. 대칭요소와 포인트그룹

2.1. 대칭요소/연산자 (Operator)

본 연구에서는 대칭을 나타내는 방법으로 대칭기호(symmetry symbol)를 사용한다. 대칭은 면이나 점을 기준으로 이루어지는 대칭과 선을 중심으로 개체의 회전을 통하여 이루어지는 대칭(proper rotation), 그리고 변칙회전(improper rotation)이 있다.⁴⁾ 이것을 간략히 정리하면 <표 1>과 같다. 본 연구에서는 평면만을 다루므로 Sn이나 σ_h 는 사용하지 않는다.

- 1) 주거단위에 존재하는 구성요소로서 문, 창문, 방, 부엌, 가구 등과 같은 것을 의미함
- 2) 여기서는 아파트의 경우 주동을 이루는 대칭의 단위가 되는 기본 평면을 의미한다. 이 기본 평면은 좌·우 대칭의 어느 것이라도 상관없다.
- 3) 캐릭터테이블(Character Table)은 특정한 개체의 포인트그룹에 존재하는 모든 가능한 대칭에 대하여 해당 행렬식을 적용시켰을 때 나타나는 결과값을 표시한 것으로 가능한 모든 대칭을 나타낸 것을 말한다. Alan Vincent, Molecular Symmetry and Group Theory, John Wiley & Sons, 1978, p.52
- 4) 진경일, 포인트그룹 이론을 이용한 건축디자인 형태의 대칭성 분석과 적용 연구, 한국실내디자인학회 논문집 Vol.35, 2002.12., pp23~24

<표 1> 대칭의 종류별 표현과 정의

표시	영문	정의	
E	Identity	대칭을 가하기 이전 자기 스스로의 형태	
C _n	Proper Rotation	2π/n radians 만큼 회전하는 대칭성 (선대칭)	
C _n ^k	-	2π/n radians 만큼 k회 회전하는 대칭성	
S _n	Improper Rotation	2π/n radians 만큼 회전 후 회전축 직각방향 대칭	
i	Inversion Center	역상연산자로서 점대칭	
σ	Sigma (reflect plane)	면대칭	
σ	σ _h	Horizontal	수평 면대칭
	σ _v	Vertical	수직 면대칭
	σ _d	Dihedral	대각 또는 2면각 면대칭

2.2. 대칭그룹 (Symmetry Groups)

대칭그룹은 특정한 개체 또는 도형이 유형별로 동일한 대칭요소들을 포함하는 것을 그룹으로 정의하고 기호로 나타낸 것이며 본 연구에서는 Schönflies식 표현⁵⁾을 사용하도록 한다.

각 포인트그룹 심벌은 존재하는 대칭의 수(order)와 연산자(Operator)의 종류와 개수에 따라서 결정된다. 포인트그룹은 크게 나누어 '이면각(dihedral)대칭계열', '회전성(cyclic)대칭계열' 그리고 '입방체(cubic)대칭계열'로 나누어진다. 다음 <표 2>에 포인트그룹의 몇 가지 예를 정리하였다.

<표 2> 대칭의 종류별 표현과 연산자

표시*	예시**	예시에 대하여 존재하는 연산자(Operator)	
D	D _n	D ₂	E, C ₂ , C ₂ , C ₂
	D _{nh}	D _{2h}	E, C ₂ , C ₂ , C ₂ , i, σ, σ', σ''
	D _{nd}	D _{2d}	E, 2S ₄ , C ₂ , 2C ₂ , 2σ _d
C	C _n	C ₂	E, C ₂
	C _{nh}	C _{2h}	E, C ₂ , i, σ _h
	C _{nv}	C _{2v}	E, C ₂ , σ _v , σ _v '
Cubic***	T _h	E, 8C ₃ , 3C ₂ , 3σ _v , i, 8S ₆	

* n은 2이상의 임의의 숫자

** n이 2인 경우를 예로 들었으나 다른 경우 존재하는 연산자는 전혀 다르다.

*** Cubic을 형성할 수 있는 최소가 4개의 점이므로 tetra인 경우를 예로 들었다

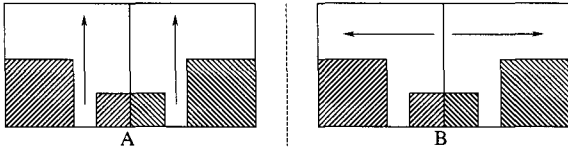
3. 대칭의 연산자 값 표현

3.1. 캐릭터테이블 (Character Table)

대칭을 가지는 개체는 대칭변화 판단기준에 따라서 대칭 후 기존 성질의 반대 성질이 반대로 될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. <그림 1>은 그러한 한 예를 나타내었다. <그림 1>에서 만약, 화살표 방향이 특정한 중요한 요소라고 가정한다면 A의 경우 좌·우 대칭으로 이루어진 한 쌍은 배치는 반대로 이루어졌으나 화살표는 모두 위쪽을 향하고 있다. 이러한 경우는 좌·우 대칭 연산자를 적용하지 않은 상태와 달라지는 것이 없다. 그러나 B의 경우는 A와 마찬가지로 좌·우 대칭 연산을 수행한 경우이나 화살표 방향은 반대로 되었다. 이 경우는 개체의 성질이 달라졌다고 볼 수 있을 것이다. 이렇게 되었을 때

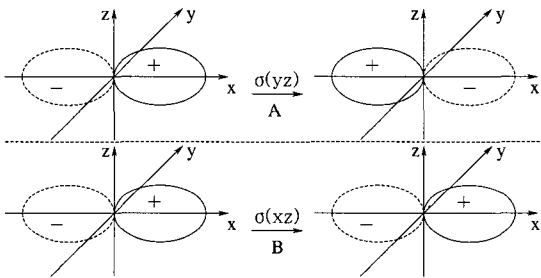
5) Symmetry Group은 Point Group과 동일한 의미로 사용된다. 그 밖의 용어 및 정의는 'http://methworld.wolfram.com/topics/algebra/'를 참고하였다.

연산결과 값을 A의 경우 초기 값과 이후 값은 동일하므로 '1'이라고 쓸 수 있고 B의 경우는 '-1'로 표현할 수 있다.6)



<그림 1> 좌·우 대칭 후 그 성질이 변하는 개체와 그렇지 않은 개체의 예

상기의 그림에서 화살표는 건축물의 경우 실내에 배치된 가구나 건물에 고정 배치된 문, 창문 등으로 볼 수 있으며, 이것은 대칭을 수행함으로써 인하여 발생하는 여러 가지 성질 중 하나의 성질만을 표시한 것으로 볼 수 있다. 이렇게 특정한 대칭 연산자에만 영향을 받는 요소들이 존재하므로 어떤 디자인을 대칭 시켜 유사한 모양의 다른 디자인을 얻어낸다 하여도 개체의 특성에 따라서 적용된 대칭연산자가 항상 동일한 연산효과를 낸다고 볼 수는 없다. <그림 2>는 x축에 성질만을 가지는 어떤 도형의 경우 $\sigma(yz)$ 및 $\sigma(xz)$ 대칭을 수행할 경우 나타나는 결과를 도해하였다. A는 x축에 대하여 연산효과를 나타내어 -1값을 적용하였지만, B는 아무런 효과를 나타내지 못하였다.



<그림 2> x축에만 변화 성질을 가지는 도형과 각 연산자 A, B의 역할

포인트그룹을 가지는 대칭성 있는 어떤 건물(또는 평면)이 있다면 그 건물은 몇 가지 대칭 연산자를 가지게 된다.7) 이때 발생할 수 있는 모든 대칭연산자에 대하여 연산자 값을 구하면 특성표(Character Table)⁸⁾를 작성할 수 있다.

<그림 3>은 C_{2v}그룹이 가질 수 있는 모든 연산자에 존재할 수 있는 특성(벡터, 회전)을 고려하여 그 연산결과를 표와 그림으로 나타낸 것이다. C_{2v}대칭그룹이 가지는 대칭연산자는 4가지가 있으므로 해당 연산자와 x, y, z축에 대하여 값의 변화를 기록한 것이다. 점선으로 표시한 부분은 x축과 y축의 회전에 의하여 발생되는 값이며 <그림 3>에는 이 항목을 적용할 수 있는 예가 표시되어있지 않다.

6)표현(Representations)은 이렇게 연산자를 이용하여 수행된 연산결과 값을 의미한다.

7)포인트 그룹에는 일정한 대칭연산자가 포함되어있으며 동일한 포인트 그룹을 가지는 유사한 건물이나 도형들은 항상 동일한 대칭연산자를 가지게 된다. 본문의 <표2> 참조.

8)Character Table은 우리말로 적절한 표현이 없으므로 본 연구에서는 '특성표' 또는 '캐릭터 테이블'이라고 부르기로 한다

C _{2v}	E	C ₂	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
A ₁	1	1	1	1
A ₂	1	1	-1	-1
B ₁	1	-1	1	-1
B ₂	1	-1	-1	1

<그림 3> C_{2v}에 대한 캐릭터 테이블과 도면의 예

아래 <표 3>, <표 4>에 C_{2v} 대칭그룹과 C_n 그룹의 캐릭터 테이블을 각각 나타내었다. 캐릭터 테이블은 모든 포인트그룹(Point Group)에 각각 고유한 테이블이 존재하지만 여기서는 편의상 C_n 및 C_{nv}그룹을 나타내고 이론을 전개하도록 한다.9)

<표 3> 주요 C_n 그룹의 캐릭터 테이블¹⁰⁾

C ₂	E	C ₂	
A	1	1	z, R _z , x ² , y ² , z ² , xy
B	1	-1	x, y, R _x , R _y , yz, xz

C ₃	E	C ₃	C ₃ ²	
A	1	1	1	z, R _z , x ² +y ² , z ²
E	1	exp(2πi/n)	exp(-2πi/n)	(x, y)(R _x , R _y)
	1	exp(-2πi/n)	exp(2πi/n)	

C ₄	E	C ₄	C ₂	C ₄ ³	
A	1	1	1	1	z, R _z , x ² +y ² , z ²
B	1	-1	1	-1	x ² -y ² , z ²
E	1	i	-1	-i	(x, y)(R _x , R _y)
	1	-i	-1	i	(yz, xz)

<표 4> 주요 C_{nv} 그룹의 캐릭터 테이블

C _{2v}	E	C ₂	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$	
A ₁	1	1	1	1	z, x ² , y ² , z ²
A ₂	1	1	-1	-1	R _z , xy
B ₁	1	-1	1	-1	x, R _v , xz
B ₂	1	-1	-1	1	y, R _x , yz

C _{3v}	E	2C ₃	2σ _v	
A ₁	1	1	1	z, x ² +y ² , z ²
A ₂	1	1	-1	R _z
E	2	-1	0	(x, y)(R _x , R _y)

C _{4v}	E	2C ₄	C ₂	2σ _v	2σ _d	
A ₁	1	1	1	1	1	z, x ² +y ² , z ²
A ₂	1	1	1	-1	-1	R _z
B ₁	1	-1	1	1	-1	x ² -y ²
B ₂	1	-1	1	-1	1	xy
E	2	0	-2	0	0	(x, y)(R _x , R _y) (xz, yz)

C _{5v}	E	2C ₂	2C ₅ ⁺	5σ _v	
A ₁	1	1	1	1	z, x ² +y ² , z ²
A ₂	1	1	1	-1	R _z
E ₁	2	2cos72°	2cos144°	0	(x, y)(R _x , R _y) (xz, yz)
E ₂	2	2cos144°	2cos72°	0	(x ² -y ² , xy)

9)'C'그룹은 수평면을 기준으로 한 상·하 대칭이 존재하지 않는 그룹이며, 'D'그룹은 상·하 대칭이 존재하는 그룹이다. 또한 입방체 그룹에 다양한 그룹이 존재하지만 본 연구의 범위가 입체를 다루기보다는 평면도를 위주로 다루고 있고 여기에 적용되는 대칭그룹은 'C'가 가장 많고 'D'그룹은 적용 용례가 적으므로 'D'그룹은 생략하고 'C'그룹만 다루었다.

10)Alan Vincent, Op. Cit. pp141~150 Morton Hamermesh, Group Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1964. pp.124~127

만약, 어떤 건물 단위공간 평면이 C_{2v}대칭그룹에 해당하는 대칭이 존재한다면 <표 4>에서 볼 수 있는 대칭 연산자들이 존재하고 그 각각에 대응하는 대칭성을 갖는다고 볼 수 있다.

A, B, E, T 등의 문자는 대칭공간의 형태에 따른 분류로 A, B는 1, E는 2, T는 3까지의 캐릭터수가 존재 할 수 있다.¹¹⁾

3.2. 감소 가능한 캐릭터 값

어떤 도형이나 개체에 대하여 특정한 포인트 그룹이 존재한다 하여도 해당 캐릭터테이블에 나타나있는 모든 항목의 회전이나 향(向)에 대한 항목들이 모두 그 도형이나 개체에 존재하는 것은 아니다. 따라서 캐릭터 값을 평가하기에 앞서 도형에 어떤 항목들이 있는지 살펴 항목을 추출하는 과정이 필요하다.

만약, 어떤 도형에 존재하는 각각의 대칭연산자를 이용하여 변환 후 결과가 계산되었다면 그 결과를 이용하여 어떤 항목의 변환이 적용되었는지 다음 (식 1)¹²⁾을 통하여 알 수 있다.

$$k = \frac{1}{h} \sum \chi_p \times \chi_i \times N$$

- k - Irreducible representation의 수(식1)
- h - 그룹의 차수(order of the group)
- χ_R - Character of reducible representation
- χ_i - Character of irreducible representation
- N - Number of symmetry irreducible representation

만약 <그림 3>과 같이 대칭과 도면이 존재 할 때 그 도면에 연산자를 적용시킨 후 x축의 값이 어떤 값으로 변하는지 본다면 E일 경우 2개 모두 유지되므로 2, C₂를 적용할 경우에 대하여 -좌표를 가지므로 -2, $\sigma(xz)$ 를 적용할 경우 양쪽 2개 모두 유지되므로 2, $\sigma(yz)$ 을 적용할 경우 -2가 된다. 이때 값을 Γ_1 이라고 표시하고 그 값을 적어 표시한다.

C _{2v}	E	C ₂	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
Γ_1	2	-2	2	-2

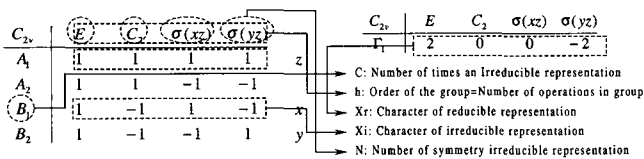
<그림 4> reducible representation의 예

이것을 (식1)을 이용하여 계산하면 $\Gamma_1 = 2B_1$ 과 같이 표시될 수 있으며 여기서 우리는 해당 도형이 x축에만 영향을 받는 2개의 개체로 구성되어 있음을 알 수 있다.¹³⁾

11)행렬로 볼 때 행렬의 규모 및 행렬의 캐릭터 수와 관계 있다. 예를 들어 2x2행렬이면 캐릭터 값은 -2~2까지 숫자가 존재할 수 있다.

12)Alan Vincent, Loc. Cit., pp.55~58

13)아래와 같이 왼쪽에 캐릭터테이블과 오른쪽에 representation테이블이 있다면 각각의 용어는 다음과 같다.

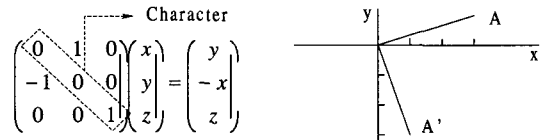


C는 B1등과 같은 대칭항목(irreducible representation)의 개수이며, h는 그룹에 존재하는 operator 개수의 합, Xr은 현재 대칭연산자를 이용하였을 경우 변화 여부가 계산된 값이며 Xi는 캐릭터 테이블에 존재하는 캐릭터

4. 행렬표현 (Matrices)

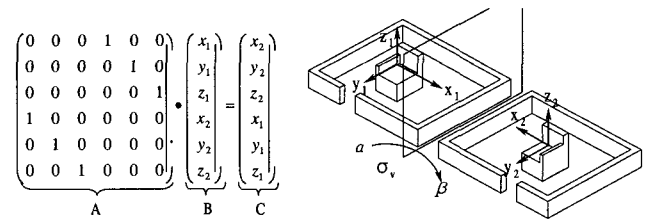
4.1. 행렬식

대칭 변환은 행렬을 이용하여 표현될 수 있다. <그림5>는 행렬식을 이용하여 기존의 좌표A를 이동시켜 A'로 이동한 경우이다. 이 경우 x의 값은 y로 변환되었고 y값은 -x로 되었다. 이들은 원래의 위치에서 사라졌다고 볼 수 있다. 그러나 z축 좌표는 대칭 전 값을 유지하므로 캐릭터¹⁴⁾값이 1이다.



<그림 5> C₄ 변환을 행렬과 변환으로 표현 한 예

만약, 다음 <그림 6>과 같은 경우 어떤 방에 한쪽 팔걸이만 있는 의자가 있다면 대칭 연산자를 적용하기 전 'α'의 의자에서 좌표를 각각 x₁, y₁, z₁ 이라고 할 때 대칭 $\sigma_v(yz)$ 를 적용한 후 'β'의 좌표는 각각 x₂, y₂, z₂ 값을 가지며 <그림 6>의 오른쪽 그림과 같이 표현된다. 그리고 'α'의 초기 행렬값을 'B'라고 하고, 변환 후 행렬값을 'C'라고 할 때 $\sigma_v(yz)$ 의 연산자 행렬은 'A'와 같이 표현될 수 있다.



<그림 6> 개체의 위치에 따른 변환과 전체 행렬식

<표 5> Symmetry Operator에 따른 몇 가지 2차원 행렬식의 예¹⁵⁾

Operator	E	C ₄	C ₂	$\sigma_v(xz)$	σ_{d1}
Matrix	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Operator	C ₃	C ₄ ³	i	$\sigma_v(yz)$	σ_{d2}
Matrix	$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

* $\epsilon = e \exp(-2\pi/3)$

<그림 5>와 <그림 6>의 경우 행렬식은 3차원에 적용시킨 것이며 각 대칭에 의하여 변화하는 개체들의 값을 나타낸 것이

값이다. N은 operator의 개수(상기의 표는 모두 1이다) 이다.

14)어떤 변환을 나타내는 행렬이 존재할 경우 단위행렬에서 1이 존재하는 위치에 있는 모든 숫자의 합을 캐릭터라고 부른다. Alan Vincent, Loc. Cit., p.88

15)여기서는 행렬식을 2차원으로 나타내었다. 특히 C₂ 와 i가 동일한 행렬식으로 나타났으나 3차원의 경우는 다르다.

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

다. 그 중 <그림 5>의 행렬식은 하나의 점에 대하여 표현한 것이며 <그림 6>의 행렬식은 개체가 2개일 때 표현한 것이다. 이러한 유형의 주요 행렬식 예를 <표 5>에 나타내었다.

4.2. 회전대칭

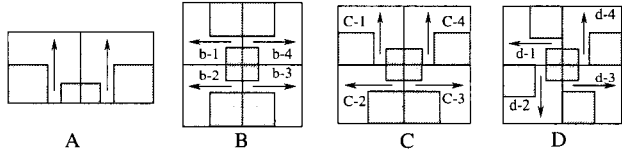
지금까지 다룬 행렬은 90°, 180° 등과 같이 수직 및 수평에 관하여 전개하였다. 그러나 실제로 아파트단지의 경우 삼각형으로 배치하는 경우도 있으며 경우에 따라서는 5각형으로 배치할 수도 있다. 이렇게 특정한 각도가 주어지면 회전대칭은 삼각함수가 적용되어야 한다. z축에 회전이 주어지지 않을 경우 다음과 같이 쓸 수 있다. 여기서 θ 는 회전각도이다.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \dots\dots(식2)$$

5. 건축 디자인에 적용방법

5.1. 건축 평면에서 그룹 분석

건물이 평면에 그룹이론을 적용시키기 위하여서는 먼저 그룹을 구분하는 것이 중요하다. 도면에 대하여 어떤 대칭성을 어떻게 적용할 것인가가 결정되어야 그룹을 분석할 수 있다.



<그림 7> 공동주택 단위공간에 적용될 수 있는 대칭의 예

<그림 7>은 일반적으로 공동주택에 적용되는 단위공간의 대칭적 구조 형태이다. 화살표 방향이 거주공간에서 전면(前面)으로 설정한다면, A의 경우는 하나의 평면을 남·북 방향으로 σ 대칭을 적용하여 동·서향으로 늘어진 공간이 만들어졌다. B는 혼한 형태는 아니나 동·서향을 전문으로 배치한 형태이다. C는 근래에 많이 지어지고 있는 타워형 아파트에서 쉽게 찾아볼 수 있는 형태이다. D는 역시 타워형에서 볼 수 있는 회전형 형태이나 아직 혼한 형태는 아니다.

<그림 7>의 각 그림에 적용될 수 있는 대칭그룹을 살펴보면 <표 6>과 같다. 여기서 도면을 분석할 때 도면은 2차원이지만 실제로 공간은 3차원이라는 점을 고려해야 한다. 즉, x, y 축은 도면에 나타나 있으므로 고려하기 쉽지만 z축은 도면에 나타나지 않으므로 고려하기 쉽지 않지만 고려해 주어야 한다. <그림 7>의 C는 하나의 대칭그룹이 적용되기 어려운 형태이다. 좌·우로 나누어 생각한다면 C_s 그룹으로 볼 수도 있으나 전·후가 회전 대칭성을 가지므로 복합적이라고 생각할 수 있다.

<표 6> 그림7에서 적용된 대칭그룹과 연산자 분석

그림	대칭그룹	연산자	비고
A	C_s	E, σ_n	
B	C_{2v}	E, σ_v, σ_v', C_2	
C	없음	E, $\sigma_v, C_4^2, \sigma_d$	다양한 대칭의 조합
D	C_4	E, C_4, C_4^2, C_2, C_4^3	

5.2. 인테리어 구성요소와 대칭성

일반적으로 아파트에서 상호 대칭이 되는 공간은 실내에 존재하는 많은 구성요소들이 반대(역상)가 되거나 기본이 되는 단위공간이 설치된 모습과 비교하여 다른 방향을 가지게 되는 경우가 많다. 이때 이 각각의 요소들이 대칭을 통하여 어떤 모습으로 변화하는지 알아볼 필요가 있다. 여기서는 실내 구성요소들이 대칭을 통하여 어떤 변화를 나타내는지 살펴본다.

(1) 문 (출입문, 창문)

출입문의 경우 공통적으로 고려할 수 있는 사항은 문 회전 방향이다. 한편, 창문이라면 창문이 향하는 전면(前面)의 방위와 창문의 안쪽 문이 왼쪽으로 열리는지, 오른쪽으로 열리는지 역시 고려할 수 있는 문제이다.

문의 회전방향 문제는 회전대칭(proper rotation)과는 관계 없는 문제이다. C_2, C_3, C_4 등 어떤 것을 적용시켜도 항상 동일한 값을 나타낸다. 따라서 캐릭터 값¹⁶⁾은 항상 1이다.

(2) 부엌

부엌의 경우 싱크대가 왼손잡이에 유리한지 오른손잡이에 유리한지가 고려할 수 있는 문제이다. 일반적으로 인테리어 구조를 대칭으로 하기 위하여 싱크대와 조리대의 위치 등을 반대로 설계하는데 이것은 주방의 설계에 따라서 이용자에게 불편을 줄 수 있다. 부엌의 싱크대 배치 문제 역시 회전성 함수에 관한 문제라고 볼 수 있다. 따라서 캐릭터 테이블에서 R_x, R_y, y, x 대칭 등이 영향을 줄 수 있다.

(3) 실 배치와 이용

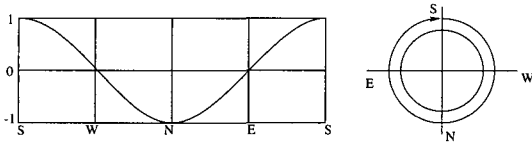
건물의 대칭문제에서 가장 중요한 항목은 실 배치라고 볼 수 있다. 건물의 용도가 외형보다는 실내에서 생활하는 것이 더 큰 요소임을 고려할 때 방의 배치는 매우 중요한 요소이며 창문이 면한 부분의 향이 어떤 방향인지도 중요하다고 볼 수 있다. 건물의 향에 관한 문제는 실 배치나 인테리어가 동일하더라도 전혀 다른 결과를 가져올 수 있다. 이 항목은 회전대칭을 시키는 동일한 연산자라 하여도 대상에 따라서 전혀 다른 결과가 나올 수 있으므로 방위의 개념이 적용되어야 한다.

(4) 방위의 적용

건축물에서 향(向)은 매우 중요하다. 특히 전면이 어느 방향인가는 건물의 가치를 결정짓는 요인으로 작용하기도 한다. 여

16) <표 3>, <표 4>에서 대칭연산자가 회전인 경우(R_z)는 모두 1을 갖는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 모든 캐릭터테이블에서 동일하며 건축물의 평면에 대한 대칭을 다루고자 할 때 회전성이 포함된 항목이 있는 부분으로 볼 수 있다.

러 가지 대칭항목 중 창문의 향은 방위에 가장 큰 영향을 받는 항목이라고 볼 수 있는데 남향을 가장 선호하는 국내 문화에서 볼 때 방위별 점수는 태양 빛을 가장 많이 받는 방향부터 순서대로 남쪽>동쪽=서쪽>북쪽으로 볼 수 있으며 <그림 8>과 같이 삼각함수 $\cos \theta$ 와 유사한 관계를 가진다고 볼 수 있다.¹⁷⁾



<그림 8> 방위에 따른 점수 변화 (cos값)

여기서 캐릭터 값을 Ψ , 연산자 적용 후 변화된 각도를 θ , 연산자 적용전의 위치 라디안 값을 α 그리고 그 값을 라디안으로 표현한 것을 k, y 를 최대값이라고 한다면, 방위에 따른 대칭연산 후 값은 함수로 표현 될 수 있다. 여기서 일반적으로 각도는 반시계 방향으로 진행되지만, 대칭함수는 시계방향으로 진행되므로 이 문제를 고려한다면 (식3)이 얻어진다.

$$\Psi = -y \times \sin \theta = -y \times \sin \left(\alpha - \frac{2\pi k}{n} \right) \dots\dots\dots(식3)$$

<그림7>의 D와 같은 경우 위쪽을 남쪽, 오른쪽을 동쪽이라고 한다면 남향인 'd-4'은 연산자 'C4'를 수행한 후 서향이 되었다. 최대값이 1이고 최소값이 -1이라고 보면 y 는 1로 설정하였을 때, 초기위치에서 값은 0.5π 일 때 $-\sin(-0.5\pi)=1$ 여기서 원래 위치 남향(= $\pi/2$)위치에서 $-2\pi/4$ 만큼 회전하였으므로 이후 위치는 0이 된다. 이 값을 (식3)에 적용하면 값은 0이 된다. 'd-3'를 'C4'만큼 회전할 경우 'd-2'가 된다. 'd-3'가 0π 이므로 값은 0이고 'd-2'는 $-2\pi/4$ 만큼 회전하였으므로 이 값을 (식3)에 적용하면 -1이 된다.

이와 같은 방법으로 대칭함수를 적용하면 건물의 향과 방위에 관한 항목을 평가할 수 있다. 단, 본 연구에서 제시하는 함수는 단순히 건물의 방위와 향에 관한 문제를 햇빛을 많이 받을 수 있는 면을 좋은 방향이라고 가정한 것이다. 만약, 조망이나 그 밖의 다른 원인에 의하여 선호되거나 바람직한 향이 달라지거나 태양이 북쪽에 뜨는 남반구의 건물에서 고려된다면 (식3)은 상황에 따라서 적절히 수정되어야 한다.

(5) 가전제품 설치 및 배치 방향

에어컨 냉각기 팬 위치나 냉장고 문의 열리는 방향, 책상 서

17)방위에 대한 문제는 <그림 7>의 B와 같은 형태의 단위공간이 존재할 경우 만약, 동서로 위치한다면 두 집의 방위별 점수는 주광(晝光)의 획득이라는 측면에서 볼 때 서로 유사하다. 그러나 남북방향으로 위치한다면 대칭 하는 두 공간은 b-1과 b-4, b-2와 b-3은 방위라는 측면에서 남향과 북향이므로 서로 상반된 값을 가진다고 볼 수 있다. 수학적으로는 동서방향과 남북방향이 서로 상반된 값을 가지므로 두 가지 경우가 동일하지만, 실제적으로는 남북방향만 상반되고 동서방향은 상반되지 않는다. 따라서 이것을 평가하는 또 다른 연산자가 필요하며 본 연구에서는 $\alpha - 2\pi k/4$ 를 이용하였다.

랍위치 등은 한쪽에 편향되어 배치되어 있는 경우가 많다. 이러한 예로 <그림9>는 에어컨 냉각기 설치대가 있는 두 대칭형 아파트의 예이다. 왼쪽 사진은 모두 에어컨을 실내에 배치시키는데 무리가 없으나, 오른쪽 그림은 에어컨 냉각기와 환풍구가 맞지 않아서 외부에 설치한 모습이다. 이 문제는 대칭연산자와 관계없는 요소에 해당하며 위치를 대칭으로 결정하기보다는 일괄적으로 결정해야 하는 항목이다.



<그림 9> 대칭형 아파트 베란다에 설치된 에어컨 냉각기 설치의 예

(6) 기타

실내 공간 구성요소나 가구 배치는 실 구조나 배치에 따라서 결정되지만 상당 경우 풍수나 습관에 따라서 결정하며 침대를 배치시키는 방향이나 건물에서 안방이 위치하는 방향 등은 사용자의 선호를 고려해야 하는 항목이다¹⁸⁾. 이러한 항목들은 단순히 건물의 향이나 배치된 모양을 가지고 판단하기 어려운 문제이므로 사용자들에 대한 선호도 조사가 필요하다.

5.3. 대칭 후 대안 평가 방안

(1) 다양한 실 구성요소의 적용

하나의 공간에 적용되는 대칭항목(함수/기준)은 매우 다양한 인테리어 요소들에 동시에 적용되어 공간의 우열을 결정한다. 따라서 어떤 공간에서 인테리어 구조가 매우 우수한 배치를 가진다 하여도 대칭 되는 다른 공간 역시 그렇다고 할 수는 없다. 반대로 그 공간에서 나쁜 배치와 구조를 가진다 할지라도 대칭으로 파생된 다른 디자인의 공간에서 역시 열등한 결과를 가져온다는 보장은 없다. 따라서 이들은 대칭을 계획 할 때 동시에 고려되어야 한다.

(2) 대칭요소간의 중요도

대칭연산자를 적용시켜 얻어진 실내공간에 대칭의 영향을 받는 실 구성요소들이 여러 개 있을 경우 이들을 모두 고려해 주더라도 항목마다 동일한 비중을 줄 수는 없다. 즉, 건물의 향이나 오른손/왼손잡이형 주방설계, 가전제품이나 생활용품이 설치되거나 사용할 때 불편한 실내공간 유무 등은 사용자 환경에 따른 중요도가 다를 수도 있기 때문이다. 거주자의 성격에 따라서 건물의 향이나 실 배치가 매우 중요하다고 생각할 수도 있고 주방과 냉장고위치가 중요한 기준이 될 수도 있다. 따라서 이러한 항목들은 선호도별로 가중치를 적용해야 한다.¹⁹⁾

18)전통적으로 동양 문화권에 널리 분포되어있는 풍수에서는 잠을 자는 방향은 남쪽과 동쪽을 길(吉)한 방향으로 보고 있고 안방의 경우는 집의 동쪽에 배치하는 것이 좋다고 보고 있다.

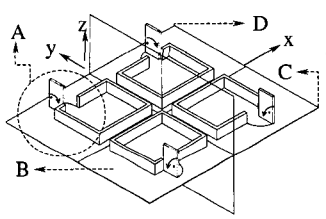
6. 대칭그룹 적용과 디자인 평가

6.1. 단일한 항목을 평가할 경우

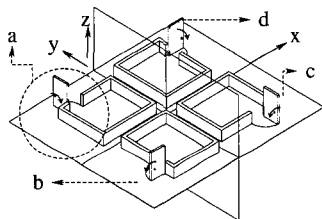
<그림 10>은 출입문을 C2v형태로 배치할 경우이다. 물론 평면계획과 대칭계획 후 결정해야 하지만, 편의상 C2v를 사용하였다. <그림 10>에서 남쪽을 y, 서쪽을 x, 그리고 -y와 -x 방향을 각각 북쪽과 동쪽으로 본다면 A를 대칭연산자를 이용하여 변환 후 얻어진 각 대칭 결과물의 특징은 다음과 같다.

A는 문이 CCW방향으로 열리고 문은 남쪽을 향한다. 그리고 그 문은 실내에서 동쪽보다 서쪽을 바라보기 쉽다. 이러한 측면에서 보면 A를 대칭 시켜 얻어지는 대안들이 이런 점들을 만족하는지 여부를 <표 7>에 나타내었다. 해당하는 성질이 그대로 남아있으면 1, 대칭연산 후 초기 질문에 대하여 상관관계가 없다면 0, 반대로 되었으면 -1을 적용한다. 그 결과 <표 7>은 C2v캐릭터 테이블과 동일한 값이다. (*이상 <표 7> 참조)

<그림 11>에서 기본 도면a를 C4회전하여 디자인 대안을 발생시킬 경우 C4=d, C42=c, C43=b가 된다. 이 경우 문의 회전 방향 및 문손잡이의 방향 역시 동일하다. 그러나 문이 바라보는 방위는 모두 달라진다고 볼 수 있다. (*이상 <표 8> 참조)



<그림 10> 기본 도면 A를 대칭 시켜 얻어진 디자인들 (C2v)



<그림 11> 기본 도면a를 대칭 시켜 얻어진 디자인들 (C4)

<표 7> 그림 10에서 A를 C2v를 수행한 후 캐릭터테이블 값과 각각의 결과

C2v	E	C2	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
A1 : 문손잡이	yes=1	yes=1	yes=1	yes=1
A2 : 손잡이는 오른쪽에 위치?	yes=1	yes=1	no, 왼쪽(-1)	no, 왼쪽(-1)
B1 : 문을 열면 남쪽이 보이는가?	yes=1	no, 북(-1)	no, 북(-1)	yes=1
B2 : 문에서 보기 쉬운 쪽이 서쪽?	yes=1	no, 동(-1)	no, 동(-1)	yes=1

<표 8> 그림 11에서 a를 대칭그룹 'C4'를 수행한 후 캐릭터테이블 값과 결과

C4	E	C4	C2	C43
A: 문 회전 방향	yes=1	yes=1	yes=1	yes=1
B: (도면상에 존재하지 않음)	1	-1	1	-1
E: (건물 전면의 방위)	남(i)	동(i)	북(-1)	서(i)
	남(i)	서(-i)	북(-1)	동(i)

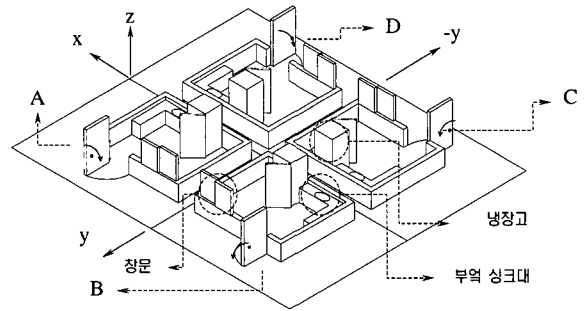
6.2. 복합적인 요소를 평가할 경우

건물의 대칭은 외형적 대칭과 더불어 실내 구성요소의 대칭이 함께 이루어진다. 따라서 하나의 기준만으로 좋은 대칭형태를 결정할 수 있는 것이 아니고 모든 항목을 동시에 적용하여

19)본 연구에서는 대칭성 항목을 조사하고 그 항목에 대하여 사용자 만족도를 조사하는 부분은 연구범위에 포함되지 않았다.

그 중 가장 좋은 값을 보이는 대안을 선택하여야 한다. 이 경우 포인트그룹 하나에 여러 실내공간 항목을 평가하고 개별항목의 중요도를 고려하여 결과를 가중치로 반영시켜야 한다.

다음 <그림 12>는 몇 가지 실내 구성요소를 반영시킨 예이다. 여기서는 부엌 싱크대, 냉장고, 출입문, 창문 이렇게 4가지 요소를 가지고 평가해보기로 한다. 또한 평가기준은 <표9>와 같이 가정한다. 이때 대칭 되는 모든 대안에 동일하게 적용될 수 있는 항목은 나열을 생략한다.



<그림 12> 여러 가지 요소가 대칭에 포함된 경우 (C2v)

<표 9> 평가기준 설정의 예

대상	우수	적용될 대칭기준	중요도*
출입문	시계 방향으로 연다	A1 = Rz	1
	남향을 바라보는 창문	A2 = y, Rx	5
창문	실내에서 오른손으로 열기 용이함	A1 = Rz	2
	부엌 싱크대	개수대 오른쪽에 선반이 위치	A1 = Rz
냉장고	주방에서 열 때 용이한 배치	A1 = Rz	2

* 중요도 결정 문제는 본 연구의 범위가 아니므로 임의로 기록하여 예를 보임

상기와 같은 기준을 설정한 다음 각 점수의 합을 기록한다. m가지의 평가항목 캐릭터 값을 t, 중요도를 w, n가지의 대칭기준을 Ψ 라 한다면 각 대칭요소의 점수 Γ 를 (식4)와 같이 나타낼 수 있으며 이를 이용하여 계산된 결과는 <표 10>과 같다.

$$\Gamma = \sum_{\Psi=1}^n \left(\sum_{i=1}^m t_i w \right)_{\Psi} \dots \dots \dots (식4)$$

<표 10> 그림 12의 유닛 A를 C2v그룹 대칭 기준에 적용한 결과²⁰⁾

평가항목(Ψ)	가중치	대칭	E(A안)	C2(C안)	$\sigma(xz)$ (D안)	$\sigma(yz)$ (B안)
출입문	1	(Rz)	1	1	-1	-1
창문(남북/손잡이)	5	(y, Rx)	5	-5	-5	5
	2	-(Rz)	-2	-2	2	2
부엌 싱크대	3	-(Rz)	-3	-3	3	3
냉장고 위치	2	(Rz)	2	2	-2	-2
Γ 값			3	-7	-3	7

<표 10>에서와 같이 가중치 값과 C2v캐릭터 테이블의 대칭기준을 적용시켜 종합적인 캐릭터 값(Γ)을 얻을 수 있다. 이 값을 비교하여 보면 <그림 12>와 같은 형태로 평면을 배치시킬 경우 B안은 7점으로 가장 우수한 대안이며 C안은 -7점으로

20)C2v 대칭그룹의 특징상 각도가 초기값 0.5π (A유닛의 방향=남향)에서 C2는 CCW로 $-\pi$ 씩 적용되어 C2의 Rx, Ry에 본 연구에서 제시한 식을 적용하면 $\Psi = \sin(\alpha - 2\pi k/n) = \sin(0.5\pi + 2\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1$ 이다.

가장 부적절한 대안이다. 또한 같은 남향집이라 하여도 A안과 B안은 이용의 편리함에 있어서 차이가 있는 것으로 판단된다.

6.3. 대안제시와 방법

<표10>에 나타난 배치의 점수(Γ)차이가 크므로 이를 해결하는 방법은 3가지가 있다. 첫째, 현재 C2v를 적용시킨 것을 다른 대칭그룹으로 바꾸어본다. 둘째, 대칭 기준도면 항목의 인테리어 구조를 바꾸어본다. 셋째, 각 대칭 유닛에서 불합리한 점들을 개선 가능한 범위 내에서 바꾸어 본다.

첫번째나 두 번째 방법을 이용하여 개선하고자 한다면 상기의 과정을 다시 수행하여 모든 유닛에서 유사한 값이 나오는 대안(또는 가능한 최고값 ' Γ '이 나오는 대안)을 찾는다. 세 번째 경우는 대칭성 평가를 다시 할 필요는 없으나 모든 유닛의 형태가 각기 다를 수 있다.

만약 가중치 값을 무시한다면 <표 10>에 나온 결과 Γ 값은 (식1)을 이용하여 역으로 평가항목들을 유추할 수 있다. 즉 동일한 편의성을 가지도록 각 도면을 설계하고자 한다면 (식1)을 이용하여 각 항목들을 결정할 수 있게 된다. 이 부분은 가중치를 적용하여 적용된 경우에 해결할 수 있는 방안에 대한 차후 연구가 필요한 부분이다.

6.4. 행렬의 적용

<그림 12>에 나타난 C2v항목을 x, y, z축에 대한 3차원 행렬로 나타내면 <표 11>과 같다. 해당 연산자에서 필요한 캐릭터 값만 선택적으로 적으면 <표 4>와 같은 캐릭터 테이블이 되며 이것을 3차원으로 바꾼 것이다. 이 결과를 이용하여 <표 10>과 같은 연산을 수행하여도 동일한 결과가 나온다.

<표 11> 행렬을 이용한 캐릭터 값의 추출과 계산

C _{2v}		E	C ₂	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$
-	행렬식=	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
A ₁	z	z=1	z=1	y=-1	x=-1
A ₂	Rz, (xy)	x×y=1	x×y=1	x×y=-1	x×y=-1
B ₃	x, Ry	x=1	x=-1	x=1	x=-1
B ₄	y, Rz	y=1	y=-1	y=-1	y=1

7. 결론

포인트 그룹이론은 대칭성의 모든 분야를 체계적으로 정리하여 캐릭터 테이블을 제시하고 있다. 본 연구는 이것을 건물 평면구성 문제에 적용하고자 하였으며, 지금까지 연구 내용을 요약 및 정리하여 다음과 같은 내용을 결론으로 제시한다.

첫째, 본 연구는 건축디자인 중 평면도 실내구성 및 건물배치라는 문제를 그룹이론에 적용시키고 파생되는 대칭평면의 유

용성을 평가하는 방법을 제시하였다. 그룹이론은 행렬이 포함되는 내용으로 캐릭터테이블을 이용하면 굳이 복잡한 행렬을 이용하지 않아도 대칭 후 대안의 특성을 쉽게 알 수 있다. 이 이론을 이용하면 대칭으로 파생되는 다양한 건물 배치 및 실내건축공간을 구성과 그 대안 평가 문제를 캐릭터 테이블을 이용하여 효과적으로 해결 할 수 있을 것이다.

둘째, 그룹이론은 기본적으로 대칭을 통한 개체(유닛)의 내부변화에 초점을 둔 것이다. 그러나 건물의 경우 건물 외부 요소인 방위를 어떻게 결정하는가에 따라서 실내에서 생활하는 사람들의 생활패턴은 큰 영향을 받는다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 외부의 방위를 계산될 수 있도록 (식3)을 제시하였다. 이것은 캐릭터 테이블 중 'Rx, Ry' 대칭 항목이 방위 일 경우 효과적으로 적용 될 수 있다.

셋째, 캐릭터테이블은 하나의 항목을 평가할 경우를 기준으로 작성된 것이나 건축디자인의 특성상 다양한 항목을 가중치를 주어 평가하는 과정을 수행하기 위하여 (식4)를 제시하였다.

한편 본 연구는 추후 연구과제로 다음을 제시한다.

첫째, 대칭요소 평가항목의 중요도에 따른 가중점수 (식4의 ω)는 설문문을 통하여 건물 이용자들에게 선호도가 조사되어야 한다. 건물의 향, 실 배치, 실내 가구배치경향, 냉장고문 열리는 방향 등은 모두 동일한 중요도를 갖지는 않기 때문이다.

둘째, 방이나 건물이 위치하는 방향이나 위치에 대한 심리적인 선호도 항목이 조사되어야 한다. 선호도는 정량적인 요소들과 더불어 정성적 요소를 고려해야 하기 때문이다.

참고문헌

- 진경일, 포인트그룹 이론을 이용한 건축디자인 형태의 대칭성 분석과 적용 연구, 한국실내디자인학회 논문집 Vol.35, 2002.12
- Alan Vincent, Molecular Symmetry and Group Theory, John Wiley & Sons, 1977.
- J. W. Leech and D. J. Newman, How to use groups, Methuen and Co Ltd, London, 1969.
- M. Tinkham, Group Theory & Quantum Mechanics, McGraw-Hill (New York), 1964.
- Morton Hamermesh, Group Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1964.
- N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid State Physics, WB Saunders and Co, 1976.
- R. L. Carter, Molecular Symmetry and Group Theory, Wiley and Sons Inc (New York), 1998.
- S. F. A. Kettle, Symmetry and Structure - Readable Group Theory for Chemists, Wiley and Sons Ltd, England, 1995.
- V. Heine, Group Theory in Quantum Mechanics, Pergamon Press (London, New York), 1960.
- G. Davidson, Group theory for chemists, Mac Millan Education Ltd (London), 1991.
- J. D. Graybeal, Molecular Spectroscopy, McGraw-Hill, 1988.
- Steven Post, The modern book of Feng-Shui, A Byron Press, 1998
- <http://methworld.wolfram.com/topics/algebra/>
- <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/>